A.S. Dawydow

THEORIE DES ATOMKERNS



VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN

A. S. DAWYDOW

THEORIE DES ATOMKERNS



VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN

A. S. DAWYDOW

Theorie des Atomkerns



HOCHSCHULBÜCHER FÜR PHYSIK
Herausgegeben von Otto Lucke und Robert Rompe

BAND 35

Theorie des Atomkerns

von

A. S. Dawydow
Professor
an der Staatlichen Lomonossow-Universität, Moskau



VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN

BERLIN 1963

А. С. Давыдов
Теория атомного ядра
Государственное издательство физико-математической литературы
Москва 1958

Ins Deutsche übertragen von
Dipl.-Phys. Karlheinz Müller und Dipl.-Phys. Günter Flach
Wissenschaftlicher Bearbeiter: Prof. Dr. Heinz Pose
Verantwortlicher Verlagslektor: Ralf Sube

ES 18 B 7

Printed in the German Democratic Republic
Lizenz-Nr. 206 · 435/67/63
Schutzumschlag: Hartwig Hoeftmann
Gesamtherstellung: VEB Leipziger Druckhaus, Leipzig (III/18/203)

VORWORT
zur deutschen Ausgabe

Kernphysik und Festkörperphysik sind die bedeutendsten Richtungen der gegenwärtigen physikalischen Forschung. Beide Richtungen haben in den letzten beiden Jahrzehnten glänzende technische Ergebnisse erzielt. Wenngleich die praktischen Auswirkungen auf dem Gebiet der Festkörperphysik zur Zeit vielfältiger erscheinen — man denke an die bedeutenden Erfolge hinsichtlich neuer Stoffe und Materialien und insbesondere hinsichtlich der Halbleiter —, so bieten doch die Ergebnisse von Kernphysik und Kerntechnik sehr deutliche Hinweise dafür, daß die weitere Erforschung der Eigenschaften des Atomkerns zur Erschließung gewaltiger Energiequellen führen wird. Erste Beispiele für die friedliche Anwendung derartiger Energiequellen sind die Kernreaktoren. Das gegenwärtige Ziel in technischer Hinsicht, die willkürliche Beherrschung der Herstellung beliebiger Elemente, ist erst in sehr geringem Umfang erreicht. Auf diesen Ergebnissen baut das wissenschaftlich und technisch bereits so wichtig gewordene Gebiet der Anwendung radioaktiver Nuklide auf. Von einer ökonomisch vorteilhaften Herstellung inaktiver Elemente kann jedoch noch nicht gesprochen werden. In dieser Hinsicht hat die Grundlagenforschung daher noch sehr große Aufgaben zu lösen.

Beide Forschungsrichtungen — Kernphysik und Festkörperphysik — verwenden den theoretischen Apparat, der durch die Quantenmechanik begründet wurde und noch in ständiger Entwicklung begriffen ist. Diese Entwicklung erfolgt in engem Zusammenhang mit der wissenschaftlichen Aufgabenstellung, und die Ergebnisse des einen Gebietes fördern die des anderen. Für den Studenten und den Forscher ist daher die gründliche Beherrschung weiter Bereiche der theoretischen Hilfsmittel notwendig. Diesem Ziel dienen umfassende Darstellungen des betreffenden Gebietes aus der Feder hervorragender Forscher.

Unseren Physikern stehen in deutscher Sprache die Bücher von Blatt und Weisskopf „Theoretische Kernphysik", herausgegeben von B. Kockel und D. Geissler, aus dem Jahre 1959 (englisches Original 1952) und das „Lehrbuch der Kernphysik", herausgegeben von G. Hertz, in dem die Theorie der Atomkerne im zweiten, 1960 erschienenen Band besonders behandelt wird, zur Verfügung.

Da die Kernphysik in der Sowjetunion in großem Umfang entwickelt worden ist, erschien es nützlich, zur Ergänzung der beiden genannten Werke einem größeren deutschen Leserkreis auch die Darstellungen eines sowjetischen Autors zugänglich zu machen. Eine umfassende und geschlossene Behandlung des Gebietes der theoretischen Kernphysik liegt aus der Feder eines erfahrenen Hochschullehrers und erfolgreichen Forschers, A. S. Dawydow, vor. Die

deutsche Bearbeitung dieses Buches wird hiermit den Fachkollegen vorgelegt.

Wie dem nachstehenden Vorwort zur sowjetischen Ausgabe zu entnehmen ist, sind einige Teile der Kernphysik sehr hoher Energien nicht berücksichtigt worden. Dasselbe gilt für den „MÖSSBAUER-Effekt" und damit zusammenhängende Probleme, die hinzuzufügen sich Autor, Herausgeber und Übersetzer nicht entschließen konnten.

Besonderer Dank gilt Herrn Professor Dr. A. S. DAWYDOW, der durch Ratschläge, Verbesserungen und ausführliche Korrekturbemerkungen die Herausgabe der deutschen Auflage wesentlich unterstützt hat. Den Übersetzern, Herrn Dr. K. H. MÜLLER und Herrn Dr. G. FLACH, verdankt man eine Übertragung, die bei flüssigem deutschem Stil den Charakter des Originals weitgehend erhalten hat. Ebenso schuldet man dem Verlag und der Druckerei Dank für die mühevolle Arbeit der Fertigstellung des schwierigen Textes, die mit bestem Erfolg durchgeführt wurde.

Dresden, im Februar 1963 H. POSE

VORWORT
zur sowjetischen Ausgabe

Die letzten Jahre waren durch eine schnelle Entwicklung der Kernphysik gekennzeichnet. Ohne Zweifel besitzt diese Forschungsrichtung gegenwärtig große Bedeutung für die Physik und Technik. Zahlreiche wissenschaftliche Arbeiten bereichern täglich unsere Kenntnisse über die Atomkerne und lassen uns immer tiefer die Prozesse verstehen, die bei der Wechselwirkung von Kernen miteinander sowie mit der elektromagnetischen Strahlung und dem Elektron-Neutrino-Feld vor sich gehen. Es erschien deshalb zweckmäßig und notwendig, ein Lehrbuch zu schaffen, in dem die Grundfragen der theoretischen Kernphysik unter Berücksichtigung der jüngsten Erkenntnisse auf diesem Gebiet zusammenfassend behandelt werden und das auf den vielfältigen Arbeiten aufbaut, die verstreut in verschiedenen wissenschaftlichen Zeitschriften publiziert wurden.

Das vorliegende Buch ist eine erweiterte Darstellung der Vorlesungen, die vom Verfasser mehrere Jahre lang an der physikalischen Fakultät der Staatlichen Lomonossow-Universität Moskau gehalten wurden. Es wird der große Kreis von Erscheinungen betrachtet, die bei Energien bis zu 100 MeV auftreten. Unter anderem werden dargelegt: das Schalenmodell, das kombinierte Modell des Atomkerns, Fragen, die mit der nichtsphärischen Form der Kerne zusammenhängen, die Rotations- und Schwingungsniveaus der Kerne unter Berücksichtigung ihres Zusammenhangs mit Einzelteilchenzuständen, die allgemeine Theorie der Kernreaktionen, das optische Modell der Kernwechselwirkung, die Theorie des Strippingprozesses und der Einfangreaktionen, die Theorie der direkten oder Oberflächenwechselwirkungen, die „Impuls"-Näherung, die Theorie der Winkelverteilung und der Polarisation von Nukleonen, die an Kernen gestreut wurden, die Theorie der Wechselwirkung von Kernen mit der elektromagnetischen Strahlung, die Theorie des β-Zerfalls und eine Reihe anderer Fragen.

Nukleare Erscheinungen, die mit der Erzeugung und Vernichtung von Mesonen zusammenhängen, werden nicht behandelt, da sie eine spezielle Betrachtung unter weitgehender Heranziehung relativistischer Theorien, der Quantenfeldtheorie mit den Methoden der zweiten Quantelung usw. erfordern. Demzufolge wurde den theoretischen Fragen der Kernkräfte, die auf der Grundlage der Mesonentheorien betrachtet werden müssen, weniger Raum gewidmet.

Das Ziel des Buches sollte es sein, den modernen Stand der Kerntheorie darzulegen und den Leser mit den wichtigsten Methoden bekannt zu machen, die bei der theoretischen Untersuchung von Erscheinungen in der Kernphysik benutzt werden. Es sind eine Reihe von Fragen aufgenommen worden,

die erst in den letzten Jahren auftraten und entwickelt wurden und noch keine dem Autor bekannte Darstellung in anderen Büchern und Monographien dieses Gebietes gefunden haben. Für viele dieser Fragen ist die Theorie bei weitem noch nicht abgeschlossen und in einigen Fällen keineswegs frei von erheblichen Unzulänglichkeiten. Es ist nicht ausgeschlossen, daß die weitere Entwicklung dieser Theorien in anderer Richtung verläuft. Trotzdem hielt es der Autor für zweckmäßig, sie in dieses Lehrbuch aufzunehmen, da er hofft, dadurch das Verständnis der Originalliteratur zu erleichtern.

Zur Erleichterung des selbständigen Studiums wurde der Rechentechnik größerer Platz eingeräumt. Dem gleichen Ziel dienen die Anhänge, die hauptsächlich mathematischen Charakter tragen.

Das angefügte Verzeichnis der theoretischen Originalarbeiten erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Die Hinweise auf experimentelle Arbeiten dienen dem Vergleich mit theoretischen Ableitungen oder der Begründung dieser oder jener Annahme, die zur Vereinfachung der Rechnungen verwendet wird.

Zum Verständnis des Buches sind Vorkenntnisse im Rahmen der üblichen Universitätsvorlesungen über theoretische Physik erforderlich. Die mit einem Stern versehenen Abschnitte und Kapitel sind schwieriger und können bei der ersten Durchsicht überschlagen werden.

Zum Schluß möchte ich Herrn Prof. Dr. D. I. BLOCHINZEW, auf dessen Initiative hin ich mit den Arbeiten an diesem Buche begann, meine tiefe Dankbarkeit ausdrücken. Ich danke außerdem den Herren I. S. SCHAPIRO und J. M. SCHIROKOW, die das Manuskript lasen und manchen wertvollen Hinweis gaben, sowie E. E. SHABOTINSKI für die sorgfältige Redaktion des Manuskripts.

Für alle Hinweise auf Lücken und Unzulänglichkeiten der Darstellung werde ich den Benutzern stets dankbar sein.

INHALTSVERZEICHNIS

ANHANG

KAPITEL 1

GRUNDEIGENSCHAFTEN DER ATOMKERNE

1.1. Einführung

Der Durchmesser eines Atoms hat die Größenordnung 10^{-8} cm. Fast seine gesamte Masse und seine positive Ladung sind jedoch in einem kleinen Volumen, dem Atomkern, konzentriert, dessen Durchmesser von der Größenordnung $5 \cdot 10^{-13}$ cm ist.

Die Materiedichte im Atomkern, die sogenannte Kerndichte, beträgt etwa 10^{14} g/cm³. Die geringe Größe sowie die außerordentlich große Massen- und Energiedichte unterscheiden die Kernmaterie stark von den Körpern, mit denen wir es unter üblichen Bedingungen zu tun haben.

Aufgabe der Theorie des Atomkerns ist es, die Eigenschaften der Atomkerne, die Gesetze ihrer Stabilität und ihrer gegenseitigen Umwandlungen aufzufinden. Die Kerntheorie stellt einen der jüngsten Zweige der theoretischen Physik dar. Ihr Ursprung geht auf das Jahr 1911 zurück, in dem von RUTHERFORD die Existenz von Kernen in den Atomen experimentell nachgewiesen wurde. Der Erfolg der RUTHERFORDschen Experimente wurde beträchtlich dadurch begünstigt, daß im Zusammenhang mit den großen Errungenschaften der Physik am Ende des XIX. Jahrhunderts — Entdeckung der Elektronen (1895), der Röntgenstrahlen (1895), der (natürlichen) Radioaktivität (1896) usw. — die Methoden der experimentellen Forschung eine hohe Vollkommenheit erreichten. Seit dieser Zeit gehört die Kernphysik zu den Zweigen der Wissenschaft, die sich am schnellsten entwickeln.

Im Jahre 1919 gelang es RUTHERFORD, die erste künstliche Kernreaktion zu erzeugen:

$$\alpha + {}^{14}_{7}\mathrm{N} \rightarrow {}^{17}_{8}\mathrm{O} + {}^{1}_{1}\mathrm{H}.$$

Im Jahre 1932 wurde von CHADWICK das Neutron entdeckt. Im gleichen Jahr stellten D. D. IWANENKO und W. HEISENBERG [1,1] die Hypothese auf, daß der Kern aus Neutronen und Protonen aufgebaut sei. Diese Hypothese wurde im weiteren vollauf bestätigt.

Im Jahre 1934 wurden von F. JOLIOT und IRÈNE CURIE die künstliche Radioaktivität und der β^+-Zerfall entdeckt. 1939 entdeckten HAHN und STRASSMANN die Spaltung der schweren Kerne. Noch im gleichen Jahr wurde von JOLIOT-CURIE, KOWARSKI und HALBAN auf die prinzipielle Möglichkeit einer Kettenreaktion hingewiesen, die auf der Spaltung der Urankerne beruht. Es wurde festgestellt, daß bei solchen Reaktionen riesige Energien frei werden.

Seit dem Jahre 1939 wurde verstärkt an der Freisetzung der Kernenergie gearbeitet. Diese Untersuchungen wurden im Dezember 1942 von Erfolg gekrönt, als es E. FERMI und Mitarb. gelang, den ersten Kernreaktor zu bauen, in dem eine Kettenspaltungsreaktion verwirklicht werden konnte. Diese Arbeit besaß ungeheure Bedeutung. Sie bewies, daß die praktische Ausnutzung der Kernenergie möglich ist und daß man neue Elemente (u. a. Plutonium) in beträchtlichen Mengen künstlich erzeugen kann. Im weiteren wurden bedauerlicherweise die Erfolge der Kernphysik zunächst zur Ausnutzung der Kernenergie für militärische Ziele mißbraucht. 1945 wurden die ersten Atombomben zur Explosion gebracht.

Die Anwendung der Kernenergie für friedliche Zwecke begann beträchtlich später. Im Juni 1954 wurde in der UdSSR das erste Kernkraftwerk der Welt errichtet. Gegenwärtig werden zahlreiche neue Kernkraftwerke mit größerer Leistung gebaut oder sind bereits im Betrieb.

Mit der Inbetriebnahme großer Kernreaktoren und der Herstellung größerer Mengen von künstlichen neuen Nukliden entstanden die Kernenergetik und ein neues Gebiet der Technik, die Kerntechnik, die sich in ihrer Entwicklung auf die wissenschaftlichen Untersuchungen stützt und ihrerseits dazu beiträgt, die Möglichkeiten und Maßstäbe der Forschungsarbeiten auf dem Gebiet der Atomkerne zu erweitern.

In den letzten Jahren wurden beträchtliche Erfolge bei der Untersuchung der Elementarteilchen erzielt. Nach der Entdeckung der μ-Mesonen und der π-Mesonen erschienen seit 1946/1947 in der Literatur Hinweise auf die Existenz schwererer instabiler Teilchen in der kosmischen Strahlung. Sie erhielten den Namen „schwere Mesonen“ oder „Hyperonen“. Gegenwärtig ist der Nachweis für die Existenz vieler verschiedener Elementarteilchen erbracht (s. Abschn. 1.2.).

Im Jahre 1955 wurde das Antiproton, 1956 das Antineutron entdeckt. Das Ende des Jahres 1956 ist durch eine weitere wichtige Entdeckung gekennzeichnet: die Nichterhaltung der Parität bei den schwachen Wechselwirkungen, die für den β-Zerfall der Kerne und der instabilen Elementarteilchen verantwortlich sind.

Dieser kurze (und bei weitem nicht vollständige) Überblick über die wichtigsten Errungenschaften auf dem Gebiet der Erforschung des Atomkerns mag genügen, die Bedeutung und schnelle Entwicklung dieses Zweiges der experimentellen und theoretischen Physik darzulegen.

Wir wollen nun zunächst die grundlegenden experimentellen Daten über die Eigenschaften der Atomkerne anführen, die beim Aufbau der Kerntheorie benutzt werden.

1.2. Zusammensetzung der Kerne. Elementarteilchen

Atomkerne besitzen eine positive elektrische Ladung q, die ein Vielfaches des Betrages der Elektronenladung e ist: $q = Z e$. Die ganze Zahl Z fällt mit der Ordnungszahl des Elements im Periodensystem der Elemente zusammen. Ein zweites wichtiges Charakteristikum des Kerns stellt seine

Masse dar. Die Masse jedes Kerns ist angenähert gleich einer ganzen Zahl von atomaren Masseneinheiten. Als atomare Masseneinheit wird $^1/_{16}$ der Masse des Sauerstoffatoms ^{16}O bezeichnet. Diejenige ganze Zahl, welche der Masse des Kerns in atomaren Masseneinheiten am nächsten kommt, heißt *Massenzahl* und wird mit dem Buchstaben A bezeichnet.

Atomkerne eines chemischen Elements X werden in der Regel mit dem chemischen Symbol des Elements bezeichnet, an dem noch 2 Zahlen angebracht werden, und zwar die Ladung und die Massenzahl: $^A_Z X$. Die Ladung wird oft auch weggelassen, da sie durch das chemische Symbol des entsprechenden Elements vollständig gegeben ist. Kerne mit gleicher Ladung, aber unterschiedlicher Massenzahl nennt man *Isotope*, Kerne mit gleicher Massenzahl, aber unterschiedlicher Ladung heißen *Isobare*.

Die Struktureinheiten des Atomkerns sind die Protonen und Neutronen. Ein Kern mit der Massenzahl A enthält Z Protonen und $N = A - Z$ Neutronen.

Wir wollen kurz an die Grundeigenschaften der Protonen und Neutronen erinnern. Das *Proton* (p) ist ein stabiles Teilchen. Seine Masse beträgt das 1837fache der Elektronenmasse, seine positive Ladung $4{,}802 \cdot 10^{-10}$ CGS-Einheiten. Das Proton besitzt den Spin $\hbar/2$. Das *Neutron* (n) besitzt keine Ladung und ist um etwa 2,5 Elektronenmassen schwerer als das Proton. Der Massenunterschied ($0{,}0023 \cdot 10^{-24}$ g) beträgt demzufolge etwa 0,1 %. Das freie Neutron ist instabil und zerfällt mit einer Halbwertzeit von etwa 12 min in ein Proton, ein Elektron und ein Antineutrino.

Obwohl freie Neutronen instabil sind, so bilden sie doch zusammen mit Protonen stabile Kerne. So sind z. B. das Deuteron, der Heliumkern (^4He), der Sauerstoffkern (^{16}O) und viele andere Kerne mit einem bestimmten Verhältnis von Neutronenzahl zu Protonenzahl stabil. Wenn das Verhältnis der Neutronenzahl zur Protonenzahl von dem Wert für die stabilen Kerne abweicht, so wird in diesen Kernen die Umwandlung eines Neutrons in ein Proton, Elektron und Antineutrino oder die Umwandlung eines Protons in ein Neutron, Positron und Neutrino möglich. Derartige Umwandlungen bezeichnet man als β-Zerfall des Kerns (s. Kap. 6). Sie gehen so lange vor sich, bis ein stabiler Kern entstanden ist.

Die wechselseitigen Umwandlungen von Neutronen in Protonen und Protonen in Neutronen gestatten, Neutron und Proton als zwei verschiedene Zustände ein und desselben Teilchens, des *Nukleons*, zu betrachten.

Elementarteilchen mit dem Spin $^1/_2$ (in Einheiten $\hbar$) werden durch die DIRAC-Gleichung beschrieben. Wenn Proton und Neutron ebenfalls durch die DIRAC-Gleichung beschrieben würden, so müßten das magnetische Moment des freien Neutrons gleich Null und das magnetische Moment des Protons gleich einem *Kernmagneton* sein. Das Kernmagneton ist 1837mal kleiner als das BOHRsche Magneton und gleich $\mu_0 = e\,\hbar/2 M_p\, c \approx 5{,}05 \cdot 10^{-24}$ erg/G. In Wirklichkeit ist das magnetische Moment des Protons jedoch gleich $2{,}792743\,\mu_0$ und das magnetische Moment des Neutrons gleich $-1{,}913138\,\mu_0$. Dies zeigt, daß die Eigenschaften von Neutron und Proton durch die DIRAC-Gleichung für freie Teilchen nicht vollständig wiedergegeben werden.

Die moderne Quantenfeldtheorie ist noch nicht in der Lage, die anomalen Werte der magnetischen Momente von Neutron und Proton zu erklären. Der Begriff des freien Teilchens stellt eine grobe Idealisierung dar, die der klassischen Physik entlehnt wurde. Es ist gegenwärtig sichergestellt, daß der freie Raum — das physikalische Vakuum — bestimmte physikalische Eigenschaften besitzt. So führt z. B. die elektromagnetische Wechselwirkung von Elektronen mit dem Vakuum zu einer Verschiebung der Spektralterme der Atome und zu einer Veränderung des magnetischen Moments des Elektrons. Da die elektromagnetischen Wechselwirkungen jedoch schwach sind, sind diese sogenannten „Vakuumeffekte" sehr gering. Die Nukleonen stehen in Wechselwirkung mit dem Vakuum des Mesonenfeldes. Diese ist so groß, daß der Begriff des freien Nukleons ohne das umgebende Mesonenfeld völlig unzulänglich ist. Die Methoden der Störungsrechnung können wegen der Stärke der Wechselwirkung von Nukleon- und Mesonenfeld nicht angewendet werden (für die Quantenelektrodynamik stellt diese den Grundapparat dar), und neue befriedigende Methoden zur quantitativen Beschreibung der Protonen- und Neutroneneigenschaften sind noch nicht geschaffen. Da also keine bessere Gleichung zur Verfügung steht, benutzt man zur Beschreibung von nichtrelativistischen Nukleonen Gleichungen vom PAULI-Typ, wobei man die empirischen Werte der magnetischen Momente einsetzt.

Außer den Protonen und Neutronen, die zum Bestand der Atomkerne gehören, ist zur Zeit eine verhältnismäßig große Zahl von Teilchen bekannt, die als Elementarteilchen angesehen werden. Als Elementarteilchen bezeichnet man solche Teilchen, die nach unserem jetzigen Wissen nicht aus einfacheren Teilchen zusammengesetzt sind. Viele der Elementarteilchen sind instabil und existieren („leben") nur sehr kurze Zeit nach ihrer Erzeugung, bis sie in andere Elementarteilchen zerfallen.

Eine Übersicht über die grundlegenden Elementarteilchen sowie einige ihrer Eigenschaften wird in Tab. 1 gegeben. Eingehendere Angaben über die Elementarteilchen findet man z. B. bei SHAPIRO [1,2].

Nach der modernen Theorie bilden einige der Elementarteilchen Paare, so z. B. Elektron und Positron, Neutrino und Antineutrino. Eine Komponente des Paares nennt man Teilchen, die andere Antiteilchen. Unter anderem müssen Proton und Neutron ebenfalls Antiteilchen besitzen: Antiproton und Antineutron. Die Suche nach den Antiprotonen und Antineutronen führte lange Zeit zu keinerlei Erfolgen. Schließlich wurde im Jahre 1955 an der California University von einer Mitarbeitergruppe unter der Leitung von E. SEGRÉ [1,3] das *Antiproton* entdeckt. Als Antiproton bezeichnet man das Teilchen, dessen elektrische Ladung und magnetisches Moment negatives Vorzeichen besitzen, bei dem diese Größen also den entsprechenden Größen des Protons entgegengesetzt sind. Das Antiproton steht in der gleichen Beziehung zum Proton wie das Positron zum Elektron. So können z. B. Antiproton und Proton beim Zusammenstoß „annihiliert" werden, wobei π-Mesonen oder — mit bedeutend geringerer Wahrscheinlichkeit — Photonen entstehen. Sie können auch ihre gesamte Energie und folglich ihre Masse an andere Teilchen abgeben und so z. B. den vollständigen Zerfall von Kernen

Tabelle 1

Die wichtigsten Elementarteilchen

Bezeichnung	Symbol und Ladung	Masse in Elektronenmassen m_e	Spin in Einheiten $\hbar$	Isospin[1]) T, T_3	Mittlere Lebensdauer im freien Zustand [s]
Elektron	e^- (e)	1	$^1/_2$	—	stabil
Positron	e^+ ($\tilde{e}$)	1	$^1/_2$	—	stabil[2])
Photon	γ	0	1	—	stabil
Neutrino	ν	0	$^1/_2$	—	stabil
Antineutrino	$\tilde{\nu}$	0	$^1/_2$	—	stabil
Proton	p	1836,12	$^1/_2$	$^1/_2$, $^1/_2$	stabil
Neutron	n	1838,65	$^1/_2$	$^1/_2$, $-^1/_2$	$1{,}11 \cdot 10^3$
μ-Mesonen	μ^+, μ^-	206,7	$^1/_2$	—	$2{,}21 \cdot 10^{-6}$
π-Mesonen	π^+	273,3	0	1, 1	$2{,}56 \cdot 10^{-8}$
(Pionen)	π^0	264,3	0	1, 0	$\approx 2 \cdot 10^{-16}$
	π^-	272,8	0	1, −1	$2{,}56 \cdot 10^{-8}$
schwere Mesonen	K^- ($\tilde{K}^-$)	966	0	$^1/_2$, $^1/_2$	$\approx 10^{-8}$
(K-Mesonen)	K^0, $\tilde{K}^0$	≈ 961	0	$^1/_2$, $-^1/_2$	$\approx 10^{-10}$
Hyperonen					
Λ-Hyperon	Λ^0 ($\tilde{\Lambda}^0$)	2181,5	$^1/_2$	0, 0	$2{,}50 \cdot 10^{-10}$
Σ-Hyperon	Σ^+	2327	$^1/_2$	1, 1	$7{,}8 \cdot 10^{-11}$
	Σ^0	2340	$^1/_2$	1, 0	$< 10^{-11}$
	Σ^- ($\tilde{\Sigma}^-$)	2340	$^1/_2$	1, −1	$1{,}6 \cdot 10^{-10}$
Kaskaden-	Ξ^-	2585	$^1/_2$	$^1/_2$, $-^1/_2$	$\approx 10^{-10}$
hyperon	Ξ^0	2585	$^1/_2$	$^1/_2$, $-^1/_2$	

[1]) Der Begriff des Isospins wird in Abschn. 2.1. erläutert.

[2]) Trifft ein Positron mit einem Elektron zusammen, so bildet sich das Positronium. Sind die Spins von Elektron und Positron parallel, so ist dessen Lebensdauer von der Größenordnung 10^{-7} s, im antiparallelen Fall beträgt sie etwa 10^{-10} s.

herbeiführen. Im Jahre 1956 konnte nach langen Versuchen das *Antineutron* beobachtet werden. Es steht im gleichen Verhältnis zum Neutron wie das Positron zum Elektron.

Die wichtigste Eigenschaft der Antiteilchen ist ihre Fähigkeit, mit den Teilchen zu „annihilieren", wobei die gesamte Energie, die der Ruhemasse beider Teilchen entspricht, abgegeben wird.

Zur Charakterisierung des Nukleonen- und Antinukleonenzustandes kann man die *Kernladung* oder *Nukleonenladung* einführen. Die Nukleonenladung des Protons und des Neutrons wird dabei gleich 1 gesetzt, die Nukleonenladung von Antineutron und Antiproton gleich −1. Die Nukleonenladung aller übrigen Teilchen, deren Masse geringer ist als die Nukleonenmasse, ist gleich Null. Wesentlich ist, daß in einem System aus Nukleonen und Antinukleonen die totale Kernladung, die gleich der Differenz zwischen der Zahl der Nukleonen und der Zahl der Antinukleonen ist, konstant bleibt und nicht von der Art der im System verlaufenden Prozesse abhängt.

Nach den modernen Vorstellungen sind die Naturgesetze invariant gegen Ladungskonjugation, d. h. gegen die Umwandlung aller Teilchen in Anti-

teilchen und umgekehrt. Bei der Ladungskonjugation müssen gleichzeitig die Vorzeichen aller Ladungen umgekehrt werden, sowohl der elektrischen wie auch der Nukleonenladungen. In der letzten Zeit wurde jedoch gezeigt, daß beim β-Zerfall der Kerne (und von Elementarteilchen) die Invarianz gegenüber Ladungskonjugation und räumlicher Inversion, nicht aber für jede einzeln (s. Abschn. 6.5. und 6.6.), gewahrt bleiben muß.

Aufgabe der Kerntheorie ist es, ausgehend von den Eigenschaften der Protonen und Neutronen, die Kerneigenschaften aufzufinden. Leider wissen wir gegenwärtig noch zuwenig über die Wechselwirkungskräfte zwischen den Nukleonen, um diese Aufgabe lösen zu können. Man muß sich mit einer Reihe halbempirischer Methoden zufriedengeben und diese oder jene Hypothese über die Kernkräfte benutzen. Der Vergleich der Theorie mit dem Experiment gestattet Rückschlüsse über den Wert solcher Hypothesen.

1.3. Mechanische Größen, die den Kern charakterisieren

Die stationären Zustände des Kerns werden durch einen Satz physikalischer Größen gekennzeichnet, die sich im Verlauf der Zeit nicht verändern, wenn der Kern keiner äußeren Einwirkung unterworfen wird. Zu diesen Größen gehören: die Energie E, die Masse M, der Impuls $\mathfrak{P}$, der Drehimpuls $\mathfrak{J}$ sowie einige andere Größen.

In diesem Abschnitt werden wir nur die stationären Zustände der Kerne betrachten oder Zustände, die den stationären Zuständen nahekommen, deren Energie also einen fast scharfen Wert besitzt. Die Gesamtenergie und der Impuls eines beliebigen Körpers sind durch die relativistische Beziehung

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 = (M\,c)^2 + \mathfrak{P}^2 \tag{1.3.1}$$

verknüpft, wobei E die Energie, c die Lichtgeschwindigkeit, $\mathfrak{P}$ der Impuls und M die Ruhemasse des Körpers sind. Im weiteren werden wir die Energie des Kerns in einem Koordinatensystem betrachten, das fest mit dem Kern verbunden ist ($\mathfrak{P} = 0$). In diesem System gilt folglich

$$E = M\,c^2. \tag{1.3.2}$$

Der Kernzustand mit der kleinstmöglichen Energie wird *Grundzustand* genannt. Wegen der Beziehung (1.3.2) kann man die Energie des Kerns durch die Messung seiner Masse bestimmen. Gegenwärtig ist es möglich, die Kernmasse bis auf 6 Stellen genau anzugeben.

Exakte Messungen der Kernmassen zeigten, daß die Kernmasse immer um einige Zehntel Prozent kleiner ist als die Summe der Massen der Protonen und Neutronen, die den Kern bilden. Die Energie, die dieser Massendifferenz entspricht, nennt man *Bindungsenergie* des Kerns:

$$\varepsilon = -\{M\,c^2 - (N\,M_{\mathrm{n}} + Z\,M_{\mathrm{p}})\,c^2\}. \tag{1.3.3}$$

Durch die Bindungsenergie wird die Arbeit bestimmt, die man aufwenden muß, um den Kern in seine Bestandteile zu zerlegen. Zur Charakterisierung der Stabilität des Kerns führt man die Bindungsenergie je Nukleon f ein.

Die Größe f liegt für die Mehrzahl der Kerne zwischen 6 und 8 MeV. In Abb. 1 ist f in Abhängigkeit von der Massenzahl A dargestellt.

Aus der Abbildung ist zu sehen, daß die gesamte Bindungsenergie des Kerns angenähert proportional der Zahl der Nukleonen im Kern ist. Die kleinen Abweichungen von dieser Proportionalität lassen sich durch den Oberflächeneffekt, die COULOMB-Wechselwirkung und einige zusätzliche Effekte erklären, so z. B. Korrektionen, die von der Parität des Kerns und der relativen Differenz zwischen der Neutronen- und Protonenzahl abhängen.

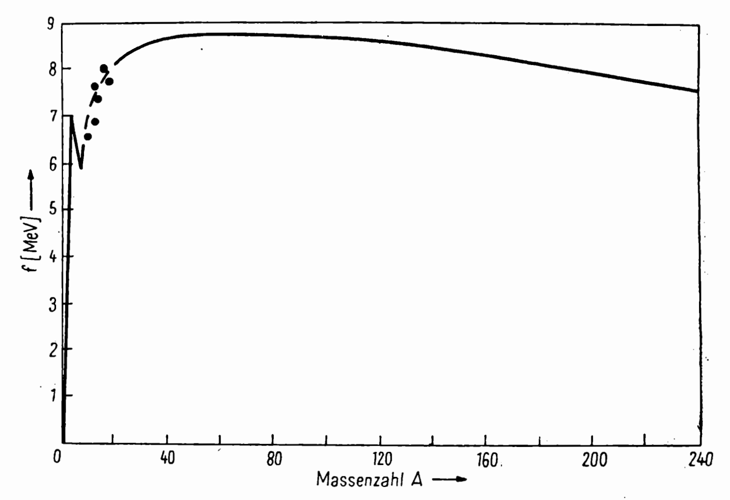


Abb. 1. Bindungsenergie f je Nukleon in Abhängigkeit von der Massenzahl A

Qualitativ kann man die Abhängigkeit $f(A)$ verstehen, wenn man annimmt, daß die Kernkräfte zwischen den Nukleonen Sättigungseigenschaften besitzen, d. h., daß jedes Nukleon nur mit seinen nächsten Nachbarn in Wechselwirkung steht (s. Abschn. 3.3.).

Die Kerne kann man aufteilen in stabile und instabile (radioaktive) Kerne. Die stabilen Kerne werden durch ein bestimmtes Verhältnis der Neutronenzahl zur Protonenzahl gekennzeichnet. Bei den leichten Kernen ist die Zahl der Neutronen gewöhnlich gleich der Zahl der Protonen, bei den schweren Kernen größer als diese. Bei Abweichungen der Größe N/Z von den für die gegebene Massenzahl A charakteristischen Werten wird der Kern instabil gegen β-Zerfall. Solche Kerne gehen durch die spontane Umwandlung von Neutronen in Protonen (oder umgekehrt) unter Emission von Elektronen (Positronen) sowie Neutrinos oder durch K-Einfang in stabile Zustände über.

Außer der Instabilität gegen den β-Zerfall besitzen die schweren Kerne noch eine „dynamische“ Instabilität gegenüber Zerfall in zwei oder mehr Teile. Zu dieser Art von Instabilität gehört der α-Zerfall der Kerne. Der Kern ist dann dynamisch instabil, wenn seine Bindungsenergie je Nukleon

kleiner ist als die entsprechende Energie der Spaltprodukte. Alle schweren Kerne ($A > 110$) sind instabil gegen Spaltung. Die Wahrscheinlichkeit der spontanen Spaltung ist jedoch sehr klein (s. Kap. 5).

1.4. Größe der Kerne

In erster Näherung kann man die Kerne als kugelförmige Gebilde mit relativ gut ausgeprägten Oberflächen betrachten (s. Abschn. 4.6.). Obwohl der Begriff „Kernradius" nicht ganz exakt zu definieren ist, wurde doch bei der Untersuchung der Elektronenstreuung, Neutronenstreuung, der Streuung von Protonen und α-Teilchen an Kernen sowie bei der Untersuchung der Röntgenstrahlung aus Mesoatomen festgestellt, daß man den Kernradius durch die einfache Formel

$$R = r_0 A^{1/3}$$

ausdrücken kann, wobei r_0 eine Konstante ist.

Die Ergebnisse dieser Messungen deuten unzweifelhaft darauf hin, daß das Kernvolumen proportional der Zahl der Nukleonen im Kern ist. Die Kerndichte ist deshalb für die verschiedenen Kerne fast gleich.

Der Wert der Konstanten r_0, den man aus der Streuung von Neutronen, Protonen und α-Teilchen an Kernen erhält, beträgt $(1{,}3 \cdots 1{,}4) \cdot 10^{-13}$ cm. Aus der Streuung der Elektronen und bei der Untersuchung der Mesoatome erhält man den Wert $1{,}2 \cdot 10^{-13}$ cm.

Untersucht man die Streuung schneller Elektronen an Kernen [1,4] und die Strahlung von Mesoatomen, so bestimmt man faktisch die Verteilung der elektrischen Ladung (der Protonen) in den Kernen. Nach den gegenwärtigen Vorstellungen unterscheidet sich die Verteilung der Protonen nicht wesentlich von der Neutronenverteilung, da sich mehrere Effekte gegenseitig kompensieren. Von diesen Effekten wollen wir die folgenden anführen:

a) die Wirkung der Coulomb-Abstoßung, welche die Protonendichte an der Kernperipherie zu erhöhen sucht;

b) der Unterschied der kinetischen Energie von Protonen und Neutronen, auf den Johnson und Teller [1,5] hinwiesen. Da in den Kernen mehr Neutronen als Protonen vorhanden sind, muß die kinetische Energie der Neutronen im Kern größer sein. Die Differenz der kinetischen Energien von Neutronen und Protonen kompensiert angenähert die Coulomb-Abstoßung zwischen den Protonen, wenn man annimmt, daß die Neutronen ein größeres Volumen einnehmen als die Protonen.

c) Der Coulomb-Wall hindert die Protonen an der Durchdringung der „Kernoberfläche". Wegen aller dieser Effekte sind die mittleren Radien der Protonen- und Neutronenverteilung im Kern angenähert gleich. Der „Neutronenschweif" zieht sich in der Verteilung jedoch anscheinend etwas weiter.

Die r_0-Werte, die man aus Experimenten erhält, in denen die Kernkräfte wirksam werden, unterscheiden sich etwas von den Werten aus Experimenten, in denen die elektrische Wechselwirkung auftritt. Das deutet

anscheinend darauf hin, daß die Kerndichte und das effektive Kernpotential unterschiedliche Abstandsabhängigkeit besitzen. Nach [1,6] nimmt das Kernwechselwirkungspotential langsamer ab als die Dichte der Kernmaterie. Deshalb ist der mittlere Radius des Potentials größer als der mittlere Radius der Kerndichteverteilung.

1.5. Drehimpulse der Nukleonen und der Kerne

Protonen und Neutronen besitzen den Eigendrehimpuls (Spin) $\hbar/2$. Die Komponenten des Eigendrehimpulses der Nukleonen (wie auch beliebiger anderer Teilchen mit dem Spin $\hbar/2$) werden in den Einheiten $\hbar$ durch die Operatoren

$$\hat{s}_x = \frac{1}{2}\sigma_x, \qquad \hat{s}_y = \frac{1}{2}\sigma_y, \qquad \hat{s}_z = \frac{1}{2}\sigma_z \tag{1.5.1}$$

beschrieben, wobei

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.5.2}$$

gilt. Die Operatoren $\hat{s}_x$, $\hat{s}_y$, $\hat{s}_z$ besitzen die Eigenschaften der Operatoren für die Komponenten des Drehimpulses; u. a. genügen sie den Vertauschungsrelationen $[\hat{s}_x, \hat{s}_y] = i\,\hat{s}_z$, $[\hat{s}_y, \hat{s}_z] = i\,\hat{s}_x$, $[\hat{s}_z, \hat{s}_x] = i\,\hat{s}_y$. Die Komponenten des Spinoperators werden oft zu einem Spinvektor vereinigt:

$$\hat{\mathfrak{s}} = (\hat{s}_x, \hat{s}_y, \hat{s}_z). \tag{1.5.3}$$

Der Gesamtdrehimpuls des Nukleons (in Einheiten $\hbar$) setzt sich aus dem Spin und dem Bahndrehimpuls nach den Regeln der Vektoraddition zusammen (s. Anhang 1.2.):

$$\hat{\mathfrak{j}} = \hat{\mathfrak{l}} + \hat{\mathfrak{s}}.$$

Im zentralsymmetrischen Feld sind das Quadrat des Gesamtdrehimpulses $\hat{\mathfrak{j}}^2$ und seine Projektion auf eine willkürliche z-Achse $\hat{j}_z$ gleichzeitig Bewegungsintegrale. Die Eigenwerte der Operatoren dieser Größen sind dabei gleich $j(j+1)$ und $m = \pm j, \pm(j-1), \ldots$ Die Quantenzahl j nimmt halbzahlige Werte an.

Da nur $\hat{\mathfrak{j}}^2$ und $\hat{j}_z$ gleichzeitig Bewegungsintegrale sind, kann man nicht von einer Richtung des Drehimpulses im Raum sprechen.

Der Atomkern wird als Ganzes durch einen bestimmten Wert des Drehimpulses charakterisiert, der meist *Kernspin* genannt wird. Wir bezeichnen den Operator des Kernspins (in Einheiten $\hbar$) mit dem Buchstaben $\hat{\mathfrak{J}} = (\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z)$. Die Operatoren der Spinprojektionen genügen dabei der Vertauschungsrelation $[\hat{J}_x, \hat{J}_y] = i\,\hat{J}_z$ und den beiden anderen, die man durch zyklische Vertauschung der Indizes x, y, z erhält. Die Operatoren $\hat{\mathfrak{J}}^2$ und $\hat{J}_z$ sind kommutativ. Ihre Eigenwerte werden durch folgende Gleichungen definiert:

$$\hat{\mathfrak{J}}^2\,\psi_{Jm} = J(J+1)\,\psi_{Jm},$$

$$\hat{J}_z\,\psi_{Jm} = m\,\psi_{Jm}.$$

Der Kernspin J kann ganz- und halbzahlige Werte annehmen. Bei allen Kernen mit gerader Massenzahl ist der Kernspin ganz-, bei allen Kernen mit ungerader Massenzahl halbzahlig. Alle Kerne mit gerader Anzahl von Protonen und Neutronen haben einen Kernspin des Grundzustands gleich Null. Zur Illustrierung der möglichen Kernspinwerte sind in Tab. 2 die Spins einiger Kerne im Grundzustand zusammengestellt. Außerdem sind in der Tabelle die Zahl der Protonen (Z) und die Zahl der Neutronen (N) im betreffenden Kern angegeben.

Tabelle 2

Die Spins einiger Kerne im Grundzustand

Kern	Z	N	Spin
^{4}He	2	2	0
^{16}O	8	8	0
^{2}H	1	1	1
^{10}B	5	5	3
^{40}K	19	21	4
^{58}Co	27	31	2
^{138}La	57	81	5
^{11}B	5	6	$^3/_2$
^{15}N	7	8	$^1/_2$
^{63}Cu	29	34	$^3/_2$
^{115}In	49	66	$^9/_2$
^{175}Lu	71	104	$^7/_2$
^{233}U	92	141	$^5/_2$
^{235}U	92	143	$^7/_2$
^{239}Pu	94	145	$^1/_2$
^{241}Pu	94	147	$^5/_2$

1.6. Magnetische Momente der Kerne

In der klassischen Physik entsteht ein magnetisches Moment bei der Bewegung elektrischer Ladungen. Wenn $\varrho(\mathfrak{r})$ die Dichte der elektrischen Ladung und $\mathfrak{v}(\mathfrak{r})$ die Geschwindigkeit sind, so hat man für das magnetische Moment des Volumens Ω

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2c} \int\limits_{\Omega} \varrho(\mathfrak{r})\, [\mathfrak{r}\, \mathfrak{v}(\mathfrak{r})]\, d\tau . \tag{1.6.1}$$

Besitzen die bewegten Teilchen die Masse M und die Ladung e, so ist mit dem magnetischen Moment (1.6.1) ein mechanischer Drehimpuls in Einheiten $\hbar$ verknüpft:

$$\mathfrak{J} = \frac{M}{e\hbar} \int\limits_{\Omega} \varrho(\mathfrak{r})\, [\mathfrak{r}\, \mathfrak{v}(\mathfrak{r})]\, d\tau . \tag{1.6.2}$$

Man kann somit schreiben

$$\vec{\mu} = \mu_0\, \mathfrak{J} \tag{1.6.3}$$

mit $\mu_0 = e\,\hbar/2M\,c$. Ist M gleich der Nukleonenmasse, so heißt μ_0 *Kernmagneton.* In der Quantenmechanik wird die Gl. (1.6.3) durch eine Beziehung zwischen den entsprechenden Operatoren ersetzt. Der Operator des magnetischen Moments der Kerne ist wegen der magnetischen Momente der Nukleonen und wegen des Fehlens einer Ladung beim Neutron komplizierter:

$$\hat{\vec{\mu}} = g\,\mu_0\,\hat{\mathfrak{J}}. \tag{1.6.4}$$

Der Faktor g in (1.6.4) wird *gyromagnetisches Verhältnis* oder *Kern-g-Faktor* genannt. Die gyromagnetischen Verhältnisse für die verschiedenen Kerne liegen zwischen -4 und 6. Zur Illustration sind in Tab. 3 die experimentellen Werte der magnetischen Momente von Kernen im Zustand mit $J_z = J$ und die entsprechenden gyromagnetischen Verhältnisse angeführt.

Tabelle 3

Werte der gyromagnetischen Verhältnisse für einige Kerne

Kern	J	μ/μ_0	g
p	$^1/_2$	2,79	5,58
n	$^1/_2$	$-1,91$	$-3,82$
^{2}H	1	0,86	0,86
^{3}He	$^1/_2$	$-2,1$	$-4,2$
^{27}Al	$^5/_2$	3,6	1,76
^{109}Ag	$^1/_2$	$-0,1$	$-0,2$
^{29}Si	$^1/_2$	$-0,6$	$-1,2$
^{57}Co	$^7/_2$	4,6	1,31
^{151}Eu	$^5/_2$	3,6	1,55
^{91}Zr	$^5/_2$	$-1,1$	$-0,55$
^{125}Te	$^1/_2$	$-0,9$	$-1,8$
^{54}Mn	6	3,4	0,57
^{40}K	4	$-1,3$	$-0,22$
^{86}Rb	2	$-1,7$	$-0,85$

1.7. Elektrische Quadrupolmomente der Kerne

Die Atomkerne besitzen anscheinend im Grundzustand alle ein Symmetriezentrum (Invarianz gegen Inversion). Das elektrische Dipolmoment der Kerne ist deshalb in dem mit dem Kern verbundenen Koordinatensystem gleich Null.

Experimentell zeigt sich, daß die elektrische Ladung bei einigen Kernen keine kugelförmige Verteilung besitzt, sondern daß axiale Symmetrie und eine Symmetrieebene senkrecht zur Achse vorhanden sind. Die Abweichung der Ladungsverteilung im Kern von der Kugelsymmetrie wird durch das elektrische Quadrupolmoment

$$Q_0 = \frac{1}{e}\int \varrho(\mathfrak{r})\,(3z^2 - r^2)\,d\tau \tag{1.7.1}$$

charakterisiert. Hierbei ist e die Ladung des Protons und $\varrho(\mathfrak{r})$ die Dichte der elektrischen Ladung. Die elektrischen Quadrupolmomente werden meist in Einheiten der Protonenladung ausgedrückt, so daß sie die Dimension einer Fläche besitzen. Ist die Ladungsdichte im Kern konstant und besitzt der Kern eine in Richtung der z-Achse gestreckte Form (z soll in die Symmetrieachse des Kerns fallen), so ist das Quadrupolmoment positiv. Ist der Kern in Richtung der z-Achse abgeplattet, so ist das Quadrupolmoment negativ.

Ein Kern von der Gestalt eines Rotationsellipsoids mit den Halbachsen c (in Richtung der z-Achse) und a (senkrecht zur z-Achse) und mit konstanter Ladungsdichte besitzt das elektrische Quadrupolmoment

$$Q_0 = \frac{2}{5} Z (c^2 - a^2), \tag{1.7.2}$$

wobei Z die elektrische Ladung des Kerns in Einheiten e (Kernladungszahl) ist.

Bei $c = a + \Delta a$ und $\Delta a \ll a$ gilt

$$Q_0 = \frac{4}{5} Z a^2 \frac{\Delta a}{a}.$$

Das beobachtete Quadrupolmoment Q des Kerns fällt nicht mit dem eigentlichen Quadrupolmoment Q_0 zusammen, das die Abweichung der Ladungsverteilung des Kerns von der Kugelform charakterisiert. Als beobachtetes Quadrupolmoment Q des Kerns bezeichnet man den Mittelwert des Quadrupolmoments in einem Zustand, in dem das Quadrat des Gesamtdrehimpulses

Tabelle 4

Die elektrischen Quadrupolmomente einiger Kerne

Kern	Z	N	J	Q_0 $[10^{26}\ \mathrm{cm}^2]$
^{2}H	1	1	1	0,27
^{17}O	8	9	$5/2$	−0,5
^{16}O	8	8	0	0
^{33}S	16	17	$3/2$	−0,8
^{65}Cu	29	36	$3/2$	−15
^{197}Au	118	197	$3/2$	60
^{150}Nd	60	90	0	480
^{153}Eu	63	90	$5/2$	770
^{154}Sm	62	92	0	670
^{158}Cd	64	94	0	1000
^{162}Dy	66	96	0	820
^{175}Lu	71	104	$7/2$	820
^{181}Ta	73	108	$7/2$	680
^{188}Os	76	112	0	510
^{232}Th	90	142	0	1000
^{238}U	92	146	0	1100
^{235}U	92	143	$7/2$	900
^{233}U	92	141	$5/2$	1400

den Wert $J(J+1)$ und die Projektion auf eine ausgezeichnete Richtung den Wert J besitzen. Wie im Anhang 2.1. gezeigt wird, gilt

$$Q \equiv \langle Q \rangle_J = Q_0 \frac{J(2J-1)}{(J+1)(2J+3)}.$$

Zum Beispiel ist $Q = 0$, wenn $J = 0$ oder $J = 1/2$ ist, $Q = 1/10\, Q_0$ bei $J = 1$ und $Q = 6/11\, Q_0$ bei $J = 9/2$.

Die Quadrupolmomente der Kerne verändern sich innerhalb sehr weiter Grenzen. Die Tab. 4 gibt eine Vorstellung von den beobachteten Werten der Kernquadrupolmomente.

Große Werte des Quadrupolmoments weisen auf beträchtliche Abweichungen einiger Kerne von der Kugelsymmetrie hin.

In der Regel sind die großen Quadrupolmomente positiv. Daraus kann man schließen, daß bei starken Abweichungen des Kerns von der Kugelgestalt das gestreckte Rotationsellipsoid bevorzugt wird.

KAPITEL 2

DER ISOSPIN DES ATOMKERNS

2.1. Proton und Neutron als zwei Zustände eines Teilchens Die Ladungsvariable

Bei der Beschreibung von Prozessen, die die Umwandlung eines Protons in ein Neutron und umgekehrt beinhalten, erweist es sich als zweckmäßig, Proton und Neutron als 2 Zustände eines Teilchens, des *Nukleons,* aufzufassen. Dann wird der Zustand eines Nukleons durch 5 Freiheitsgrade charakterisiert:

$$\{\mathfrak{r},\, s_z,\, t_3\} \equiv \{x,\, t_3\}.$$

Dabei bestimmt der Vektor $\mathfrak{r}$ die räumliche Lage des Nukleons, und s_z bedeutet die Spinprojektion. Der fünfte Freiheitsgrad wird durch die *Ladungsvariable* t_3 beschrieben. Diese kann nur 2 Werte annehmen; dem einen entspricht der Protonenzustand, dem anderen der Neutronenzustand.

Da t_3 nur 2 Werte annehmen kann, stellt man zweckmäßigerweise die Wellenfunktion $\psi(x, t_3)$, die den Nukleonenzustand beschreibt, in Form einer Spalte dar:

$$\psi(x, t_3) = \begin{pmatrix}\psi_1(x)\\ \psi_2(x)\end{pmatrix} \equiv \psi_1(x)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \psi_2(x)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}. \tag{2.1.1}$$

Die Matrizen $\pi \equiv \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $\nu \equiv \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ kann man als Funktionen betrachten, die den Ladungszustand des Nukleons definieren. Die Funktion π entspricht dem Protonenzustand, die Funktion ν dem Neutronenzustand.

Alle linearen Operatoren, die auf Funktionen der Ladungsvariablen wirken, lassen sich durch die PAULI-Matrizen

$$\hat{\tau}_1 \equiv \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \qquad \hat{\tau}_2 \equiv \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}, \qquad \hat{\tau}_3 \equiv \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \tag{2.1.2}$$

und die Einheitsmatrix

$$1 \equiv \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \tag{2.1.2a}$$

ausdrücken.

Wir untersuchen nun die Wirkung dieser Operatoren auf die Protonen- und Neutronenwellenfunktion. Wie leicht zu sehen ist, gilt

$$\hat{\tau}_1 \pi = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \equiv \nu,$$

$$\hat{\tau}_1 \nu = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \equiv \pi.$$

Also überführt $\hat{\tau}_1$ den Protonenzustand in den Neutronenzustand und umgekehrt.

Wir führen noch folgenden neuen Operator ein:

$$\hat{\tau}_p = \frac{1}{2}(1 + \hat{\tau}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.1.3}$$

Die Eigenwerte dieses Operators sind gleich Eins und Null. Daher kann man den Operator

$$\hat{q} = \frac{e}{2}(1 + \hat{\tau}_3) \tag{2.1.4}$$

als Operator der elektrischen Nukleonenladung (*Ladungsoperator*) ansehen, da seine Eigenwerte e für den Protonenzustand und 0 für den Neutronenzustand betragen. Für Antinukleonen muß der Ladungsoperator die Form $\hat{q}_{\text{anti}} = {}^1/_2 e(\hat{\tau}_3 - 1)$ mit $e > 0$ besitzen.

Außerdem führen wir noch den Operator

$$\hat{\tau}_n = \frac{1}{2}(1 - \hat{\tau}_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.1.5}$$

ein. Da die Operatoren $\hat{\tau}_p$, $\hat{\tau}_n$ und $\hat{q}$ mit $\hat{\tau}_3$ kommutieren, besitzen sie alle Eigenfunktionen, die Nukleonenzuständen mit bestimmter Ladung entsprechen. Ihre Eigenfunktionen sind also entweder π oder ν. Man überzeugt sich in der Tat leicht, daß die Operatoren $\hat{\tau}_p$ und $\hat{\tau}_n$ folgendermaßen auf die Protonen- und Neutronenwellenfunktionen wirken:

$$\hat{\tau}_p \pi = \pi, \qquad \hat{\tau}_n \pi = 0,$$
$$\hat{\tau}_p \nu = 0, \qquad \hat{\tau}_n \nu = \nu.$$

Der Operator $\hat{\tau}_p$ heißt *Protonenprojektionsoperator*, der Operator $\hat{\tau}_n$ *Neutronenprojektionsoperator*. Diese Bezeichnungsweise hat folgenden Grund: Mit Hilfe der Operatoren $\hat{\tau}_p$ und $\hat{\tau}_n$ kann man aus einem allgemeinen Zustand, der eine Linearkombination aus Protonen- und Neutronenzustand darstellt, entweder den Protonenzustand oder den Neutronenzustand heraustrennen.

2.2. Ladungsraum und Isospin. Isospin eines Nukleonensystems

Ähnlich wie die Operatoren des gewöhnlichen Spins $\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$, $\hat{\sigma}_z$ einen Spinvektoroperator $\hat{\mathfrak{s}} = {}^1/_2 \hat{\vec{\sigma}}$ bilden, kann man auch die Operatoren $\hat{\tau}_1$, $\hat{\tau}_2$, $\hat{\tau}_3$, die den gleichen mathematischen Gesetzen wie die Komponenten des Spinoperators gehorchen, als Vektoroperator $\hat{\mathfrak{t}} = {}^1/_2 \hat{\vec{\tau}}$ in einem gewissen abstrakten Raum betrachten, der als *Ladungsraum* oder *Isospinraum* (Isobarenspinraum) bezeichnet wird. Die Koordinatenachsen 1, 2, 3 dieses Raumes stehen in keiner Beziehung zu den Koordinatenachsen im gewöhnlichen Raum. Ebenso ist der Isospin t nicht mit Drehungen im gewöhnlichen Raum verknüpft, sondern induziert Drehungen im abstrakten Ladungsraum.

Man kann das Nukleon als Teilchen mit dem Isospin $t = {}^1/_2$ betrachten. In Zuständen, in denen die Ladung einen bestimmten Wert besitzt, müssen

bei der Definition des Ladungsoperators durch die Formel (2.1.4) die Matrizen (2.1.2) in einer Darstellung gewählt werden, in der $\hat{\tau}_3$ diagonal ist. Dann bestimmen die Eigenwerte der dritten Komponente des Isospins $t_3 = {}^1/_2, -{}^1/_2$ entsprechend den Protonen- und Neutronenzustand des Nukleons. Der Antineutronzustand wird durch $t_3 = {}^1/_2$ und der Antiprotonzustand durch $t_3 = -{}^1/_2$ charakterisiert.

Isospinvektoren können nach den Regeln der Vektorrechnung addiert und miteinander multipliziert werden. Als Skalarprodukt zweier Isospinvektoren ist z. B. die Größe

$$\mathfrak{t}(1)\,\mathfrak{t}(2) = t_1(1)\,t_1(2) + t_2(1)\,t_2(2) + t_3(1)\,t_3(2)$$

anzusehen. Diese Größe ist invariant gegenüber Drehungen im Ladungsraum.

Wir definieren den Isospinoperator eines Kerns, der aus A Nukleonen bestehen möge, folgendermaßen:

$$\hat{\mathfrak{T}} = \sum_{i=1}^{A} \hat{\mathfrak{t}}(i). \tag{2.2.1}$$

Der Ladungsoperator des Kerns besitzt dann nach (2.1.4) die Form

$$\hat{q} = e \sum_{i=1}^{A} \left(\frac{1}{2} + \hat{t}_3(i)\right) = e\left(\frac{A}{2} + \hat{T}_3\right). \tag{2.2.2}$$

Dabei ist $\hat{T}_3 = \sum_i \hat{t}_3(i)$ gesetzt. Der Eigenwert von $\hat{T}_3$ ist durch die Anzahl der Neutronen und Protonen im Kern festgelegt:

$$T_3 = \frac{Z-N}{2} = Z - \frac{A}{2}.$$

Die Operatoren $\hat{T}_3$ und $\hat{\mathfrak{T}}^2$ sind kommutativ. Daher können die ihnen entsprechenden physikalischen Größen gleichzeitig bestimmte Werte annehmen.

Wir untersuchen nun die Frage, unter welchen Umständen T_3 und $\mathfrak{T}^2$ Bewegungsintegrale in stationären Kernzuständen darstellen. Dazu ist festzustellen, ob $\hat{T}_3$ und $\hat{\mathfrak{T}}^2$ mit dem HAMILTON-Operator des Kerns kommutativ sind. Da im stationären Zustand Nukleonenzahl und Ladung konstant sind, müssen die Eigenwerte von $\hat{T}_3$ Bewegungsintegrale sein. Diese Bewegungsintegrale entsprechen dem Gesetz der Ladungserhaltung im System.[1]) Daher muß der HAMILTON-Operator H, der den Kernzustand beschreibt, mit $\hat{T}_3$ kommutieren.

---

[1]) Wir werden Prozesse bei sehr hohen Energien nicht betrachten. Bei sehr hohen Energien können instabile Teilchen (schwere Mesonen und Hyperonen) an den Prozessen beteiligt sein. In solchen Fällen kann die Erhaltung von T_3 gestört sein, die Ladungserhaltung im System ist jedoch notwendig erfüllt. Bei der Untersuchung dieser Prozesse sind Ladungsoperator und $\hat{T}_3$ als unabhängige Größen zu betrachten.

Der vollständige HAMILTON-Operator eines Kerns läßt sich in folgender Form schreiben:

$$H = \hat{K} + W + V_a + V_k. \tag{2.2.3}$$

Dabei bezeichnet $\hat{K}$ den Operator der kinetischen Energie:

$$\hat{K} = -\frac{\hbar^2}{2}\sum_{\alpha=1}^{A}\left\{\frac{\hat{\tau}_p(\alpha)}{M_p} + \frac{\hat{\tau}_n(\alpha)}{M_n}\right\}\nabla_\alpha^2 =$$

$$= -\frac{\hbar^2(M_n + M_p)}{4M_n M_p}\sum_\alpha \nabla_\alpha^2 - \frac{\hbar^2(M_p - M_n)}{2M_p M_n}\sum_\alpha \hat{t}_3(\alpha)\nabla_\alpha^2. \tag{2.2.4}$$

W ist der Ruhenergieoperator der freien Neutronen und Protonen:

$$W \equiv \sum_{\alpha=1}^{A}\{M_p\hat{\tau}_p + M_n\hat{\tau}_n\}c^2 = \frac{A}{2}(M_n + M_p)c^2 - (M_n - M_p)c^2\hat{T}_3, \tag{2.2.5}$$

V_a der Operator der COULOMB-Wechselwirkung zwischen den Protonen:

$$V_a \equiv \frac{e^2}{2}\sum_{\alpha,\beta}{}' \frac{\hat{\tau}_p(\alpha)\,\hat{\tau}_p(\beta)}{r_{\alpha\beta}} = \frac{e^2}{2}\sum_{\alpha,\beta}{}' \frac{\left(\frac{1}{2} + \hat{t}_3(\alpha)\right)\left(\frac{1}{2} + \hat{t}_3(\beta)\right)}{r_{\alpha\beta}} \tag{2.2.6}$$

(der Strich am Summenzeichen bedeutet hier und im weiteren, daß über α und β mit $\alpha \neq \beta$ zu summieren ist) und V_k der Operator der potentiellen Energie für die spezifische Kernwechselwirkung zwischen den Nukleonen. Nach der Hypothese über die *Ladungsunabhängigkeit der Kernkräfte* muß V_k sowohl mit $\hat{T}_3$ als auch mit $\hat{\mathfrak{T}}^2$ kommutieren.

Der vollständige HAMILTON-Operator (2.2.3) kommutiert mit $\hat{T}_3$, aber nicht mit dem Operator $\hat{\mathfrak{T}}^2$. Bei $e = 0$ und $M_p = M_n$ geht jedoch der vollständige HAMILTON-Operator H in den HAMILTON-Operator[1])

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{4}\left(\frac{M_n + M_p}{M_n M_p}\right)\sum_\alpha \nabla_\alpha^2 + V_k + A\,\frac{M_n + M_p}{2}c^2 \tag{2.2.7}$$

über. Dieser kommutiert sowohl mit dem Operator des Isospinquadrats des Kerns $\hat{\mathfrak{T}}^2$ wie auch mit dem Operator der Projektion des Isospins $\hat{T}_3$.

Der vollständige HAMILTON-Operator des Kerns kann also in der Form

$$H = H_0 + H' + H'' \tag{2.2.8}$$

dargestellt werden. Dabei sind

$$H' \equiv -c^2(M_n - M_p)\,\hat{T}_3 \tag{2.2.9}$$

und

$$H'' \equiv \frac{e^2}{2}\sum_{\alpha,\beta}{}' \frac{\left(\frac{1}{2} + \hat{t}_3(\alpha)\right)\left(\frac{1}{2} + \hat{t}_3(\beta)\right)}{r_{\alpha\beta}} + \frac{\hbar^2(M_n - M_p)}{2M_n M_p}\sum_{\alpha=1}^{A}\hat{t}_3(\alpha)\nabla_\alpha^2 \tag{2.2.9a}$$

---

[1]) Nach den gegenwärtigen Vorstellungen der Quantenelektrodynamik ist der Massenunterschied von Neutron und Proton durch ihre Wechselwirkung mit dem elektromagnetischen Feld bedingt. Daher gilt für $e \to 0$ auch $M_n - M_p \to 0$. Das letzte Glied im HAMILTON-Operator (2.2.7) hängt nicht von den Koordinaten ab und kann bei entsprechender Verschiebung des Energienullpunktes fortgelassen werden.

Operatoren, die für $e \to 0$ und $M_n - M_p \to 0$ gegen Null gehen. Der Operator H'' kommutiert nicht mit $\hat{\mathfrak{T}}^2$, deshalb kommutiert im allgemeinen der vollständige HAMILTON-Operator des Kerns (2.2.8) auch nicht mit $\hat{\mathfrak{T}}^2$; das Quadrat des Isospins eines Kerns ist daher im allgemeinen kein Bewegungsintegral. Im Falle leichter Kerne ist jedoch der Operator H'' klein und kann in erster Näherung weggelassen werden. In den höheren Näherungen kann der Effekt von H'' durch die Störungsrechnung berücksichtigt werden.

Im weiteren bezeichnen wir die Näherung, in der der vollständige HAMILTON-Operator (2.2.8) durch H_0 ersetzt wird, als Näherung, in der der HAMILTON-Operator Ladungsunabhängigkeit aufweist. Dann wird der totale Isospin des Kerns $\mathfrak{T}^2$ Bewegungsintegral. Neben den anderen Bewegungsintegralen E, J, T_3 usw. charakterisiert auch T den stationären Zustand eines Kerns.

Bei gegebenem totalem Isospin T eines Kerns sind $2T + 1$ verschiedene Werte von T_3 möglich. Zustände mit gleichem T und verschiedenen T_3 faßt man zu sogenannten *Ladungsmultipletts* zusammen. Bei $T = 0$ tritt ein *Ladungssingulett*, bei $T = {}^1/_2$ ein *Ladungsdublett*, bei $T = 1$ ein *Ladungstriplett* auf usw. In der Näherung, in der der HAMILTON-Operator ladungsunabhängig ist, entsprechen den Komponenten eines Ladungsmultipletts Zustände mit gleicher Energie, gleichem Spin, gleicher Parität usw., da der Operator H_0 den Operator $\hat{T}_3$ nicht enthält. Berücksichtigt man das Glied H' in den nächsten Näherungen, so führt das zu einer Aufspaltung des Multipletts in einzelne Komponenten. Für schwere Kerne ist der Operator H'' keine kleine Größe mehr, $\mathfrak{T}^2$ bleibt nicht erhalten, und der totale Isospin darf nicht mehr zur Charakterisierung der stationären Zustände herangezogen werden.

Im Ladungsraum entsprechen den Operatoren des Isospins $\hat{\mathfrak{T}}$ Drehungen. Daher bleiben die physikalischen Eigenschaften des Systems in der Näherung, in der der HAMILTON-Operator ladungsunabhängig ist, invariant gegenüber Drehungen im Ladungsraum. Bei Drehung im Ladungsraum geht die Wellenfunktion des Neutrons (oder des Protons) in eine Linearkombination aus Protonen- und Neutronenwellenfunktion über. Da in der ladungsunabhängigen Näherung Neutron und Proton physikalisch äquivalent sind, muß auch eine Linearkombination von Neutronen- und Protonenwellenfunktion die gleichen Resultate liefern wie die reine Protonen- oder Neutronenwellenfunktion. Es ist jedoch zu bemerken, daß die Ladungsunabhängigkeit sogar für leichte Kerne nicht exakt erfüllt ist. Effekte, hervorgerufen durch schwache elektromagnetische Wechselwirkungen und durch den Massenunterschied zwischen Neutron und Proton, wirken zwar in entgegengesetzten Richtungen, kompensieren sich jedoch nur in Sonderfällen. Die elektromagnetische Wechselwirkung (sowie der Massenunterschied zwischen Neutron und Proton) zeichnet eine der Richtungen (die Achse 3) im Ladungsraum vor den anderen aus, d. h., macht Neutronen und Protonen unterscheidbar.

Der HAMILTON-Operator H_0 ist in bezug auf Vertauschung aller 5 Koordinaten (x, y, z, t_3, s_z) eines beliebigen Nukleonenpaares invariant. Deshalb kommutiert der Vertauschungsoperator aller 5 Koordinaten $P(\mathfrak{r}, s, t)$ zweier

beliebiger Nukleonen mit H_0, und die Eigenwerte des Operators $P(\mathfrak{r}, s, t)$, nämlich ± 1, sind in der Näherung, in der der HAMILTON-Operator ladungsunabhängig ist, Bewegungsintegrale. Dem Eigenwert -1 entspricht eine in bezug auf die gleichzeitige Vertauschung aller 5 Koordinaten eines Nukleonenpaares antisymmetrische, dem Eigenwert $+1$ eine symmetrische Wellenfunktion. Da Protonen und Neutronen einzeln dem PAULI-Prinzip genügen, führt die gleichzeitige Vertauschung aller Koordinaten zweier Protonen (oder zweier Neutronen) zum Vorzeichenwechsel in der Wellenfunktion, weil in diesem Fall die Vertauschung aller 5 Koordinaten einer Vertauschung der Raum-Spin-Koordinaten gleichkommt. Die Wellenfunktionen eines Systems aus Protonen und Neutronen müssen also in bezug auf Vertauschung aller 5 Koordinaten eines Nukleonenpaares der gleichen Sorte antisymmetrisch sein. Da sich in der Näherung mit ladungsunabhängigem HAMILTON-Operator die Vertauschung eines Neutronen- oder Protonenpaares nicht von der Vertauschung aller 5 Koordinaten des Protons mit denen eines Neutrons unterscheiden darf, muß auch die Wellenfunktion antisymmetrisch in bezug auf die gleichzeitige Vertauschung aller Koordinaten eines beliebigen Nukleonenpaares sein. Werden die Zustände eines Nukleonensystems von Wellenfunktionen beschrieben, die antisymmetrisch in bezug auf Vertauschung der 5 Koordinaten eines beliebigen Nukleonenpaares sind, so sagt man, daß das Nukleonensystem dem *verallgemeinerten* PAULI-*Prinzip* genügt.

2.3. Mögliche Zustände eines Systems aus zwei Nukleonen

Das Zweinukleonensystem besitzt folgenden Isospinoperator:

$$\hat{\mathfrak{T}} = \frac{1}{2}[\vec{\tau}(1) + \vec{\tau}(2)]. \tag{2.3.1}$$

Bei der Addition von Isospins sind die üblichen Regeln der Drehimpulsaddition gültig. Daher kann sich das Zweinukleonensystem entweder im Singulett- ($T = 0$) oder im Triplett- ($T = 1$) Ladungszustand befinden.

Wir bezeichnen die Funktion der Ladungsvariablen eines Zweinukleonensystems mit φ. Dann gilt

$$\hat{\mathfrak{T}}^2 \varphi_{T T_3} = T(T+1)\, \varphi_{T T_3}, \tag{2.3.2}$$

wobei

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{00} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\{\pi(1)\,\nu(2) - \nu(1)\,\pi(2)\}, \\ \varphi_{10} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\{\pi(1)\,\nu(2) + \nu(1)\,\pi(2)\}, \\ \varphi_{11} &= \pi(1)\,\pi(2), \\ \varphi_{1,-1} &= \nu(1)\,\nu(2) \end{aligned}\right\} \tag{2.3.3}$$

sind.

Führt man den Vertauschungsoperator (Austauschoperator) für die Ladungsvariablen $P_{12}(\tau)$ ein, so gilt

$$P_{12}(\tau)\,\varphi_{00} = -\varphi_{00}, \qquad P_{12}(\tau)\,\varphi_{1\,T_3} = \varphi_{1\,T_3},$$

da die Funktion $\varphi_{1\,T_3}$ symmetrisch und die Funktion φ_{00} antisymmetrisch in bezug auf Vertauschung der Ladungsvariablen der Nukleonen 1 und 2 ist. Unter Berücksichtigung der Eigenschaften (2.3.3) der Funktionen φ läßt sich der Vertauschungsoperator $P_{12}(\tau)$ durch den Operator $\hat{\mathfrak{T}}^2$ mit Hilfe einer einfachen Beziehung ausdrücken:

$$P_{12}(\tau) = \hat{\mathfrak{T}}^2 - 1. \tag{2.3.4}$$

Wegen (2.3.1) gilt

$$\hat{\mathfrak{T}}^2 = \frac{1}{4}\left[\hat{\vec{\tau}}^2(1) + \hat{\vec{\tau}}^2(2) + 2\hat{\vec{\tau}}(1)\,\hat{\vec{\tau}}(2)\right] = \frac{3}{2} + \frac{\hat{\vec{\tau}}(1)\,\hat{\vec{\tau}}(2)}{2}.$$

Daher kann man den Vertauschungsoperator für die Ladungsvariablen durch die Operatoren $\hat{\vec{\tau}}$ ausdrücken:

$$P_{12}(\tau) = \frac{1}{2}\left[1 + \hat{\vec{\tau}}(1)\,\hat{\vec{\tau}}(2)\right]. \tag{2.3.5}$$

Vergleicht man (2.3.4) mit (2.3.5), so findet man

$$\hat{\vec{\tau}}(1)\,\hat{\vec{\tau}}(2) = 2\hat{\mathfrak{T}}^2 - 3. \tag{2.3.6}$$

Meist sind die Zustände mit $T = 0$ energetisch günstiger als Zustände mit größeren Werten des Isospins.

Das Zweinukleonensystem kann sich also entsprechend dem Wert des Isospins in zwei verschiedenen Ladungszuständen befinden: im Singulettladungszustand $T = T_3 = 0$, wobei sich eines der Nukleonen im Neutronenzustand, das andere im Protonenzustand befindet, oder im Triplettladungszustand $T = 1$, in dem in Abhängigkeit von T_3 das System entweder aus 2 Protonen ($T_3 = 1$), aus 2 Neutronen ($T_3 = -1$) oder aus Proton und Neutron ($T_3 = 0$) besteht.

Nach der Hypothese über die Ladungsunabhängigkeit der Kernkräfte müßten alle 3 Zustände, die zum Ladungstriplett $T = 1$ gehören, bei Abwesenheit der Coulomb-Wechselwirkung und bei Massengleichheit von Neutron und Proton die gleiche Energie besitzen. Wegen der Coulomb-Wechselwirkung muß die Energie des p-p-Zustandes ($T_3 = 1$) höher liegen als die Energie des p-n-Zustandes ($T_3 = 0$). Der Massenunterschied zwischen Neutron und Proton wirkt in der umgekehrten Richtung. In der Tab. 5 ist die Symmetrie der Wellenfunktionen bezüglich Vertauschung der räumlichen Koordinaten, der Spinkoordinaten und der Ladungsspinkoordinaten für die möglichen Zustände des Zweinukleonensystems unter Berücksichtigung des verallgemeinerten Pauli-Prinzips angegeben.

Tabelle 5

Symmetrieeigenschaften der Wellenfunktionen zweier Nukleonen

Funktion	$T = 0$		$T = 1$	
Ortskoordinaten	symmetrisch	antisymmetrisch	antisymmetrisch	symmetrisch
Spinkoordinaten	symmetrisch	antisymmetrisch	symmetrisch	antisymmetrisch
Ladungsvariable	antisymmetrisch		symmetrisch	

Zur Charakterisierung der Spinzustände eines Nukleonensystems benutzt man meist die in der Spektroskopie übliche Terminologie. Ist der Gesamtspin des Systems gleich S, so wird die Größe $2S + 1$ als *Multiplizität* des Systems bezeichnet. Der Zustand mit $S = 0$ heißt *Singulettzustand*, der Zustand mit $S = {}^1/_2$ *Dublettzustand*, der Zustand mit $S = 1$ *Triplettzustand*. Das Zweinukleonensystem kann sich nur im Singulett- oder im Triplettspinzustand befinden.

Sind die Wechselwirkungskräfte zwischen 2 Nukleonen Zentralkräfte, dann sind die Zustände des Zweinukleonensystems durch bestimmte Werte des Bahndrehimpulses gekennzeichnet. Daher sind die Zustände des Zweinukleonensystems durch den entsprechenden Wert des Bahndrehimpulses L und des Gesamtdrehimpulses J zu unterscheiden. Der Gesamtdrehimpuls bestimmt sich aus der vektoriellen Summe von Spin und Bahndrehimpuls $\mathfrak{J} = \mathfrak{L} + \mathfrak{S}$. Ein Zustand mit dem Gesamtdrehimpuls J, dem Bahndrehimpuls L und dem Spin S wird folgendermaßen bezeichnet:

$$^{(2S+1)}L_J. \tag{2.3.7}$$

An Stelle des Zahlenwertes L schreibt man in (2.3.7) gewöhnlich lateinische Buchstaben. Den Werten $L = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ sind die Buchstaben S, P, D, F, G (weiter in alphabetischer Reihenfolge) zugeordnet. Zum Beispiel können die Singulettspinzustände des Zweinukleonensystems in der Form $^1S_0$, $^1P_1$, $^1D_2, \ldots$ und die Triplettspinzustände desselben Systems in der Form $^3S_1$, $^3P_0$, $^3P_1$, $^3P_2$, $^3D_1$, $^3D_2$, $^3D_3, \ldots$ geschrieben werden.

Die Invarianz der SCHRÖDINGER-Gleichung eines Systems aus A Nukleonen bei Vorzeichenumkehr aller Ortskoordinaten (Inversion) führt auf die Erhaltung der Parität für den Koordinatenanteil der Wellenfunktion. Da die zweifache Anwendung der Inversion gleichbedeutend mit der identischen Transformation ist, lassen sich alle Zustände des Systems in bezug auf die Inversion in Zustände mit gerader und ungerader Parität aufteilen. Ein Zustand besitzt gerade Parität, wenn sich die Wellenfunktion des Systems bei Inversion nicht ändert, ein Zustand besitzt ungerade Parität, wenn die Wellenfunktion bei Inversion das Vorzeichen ändert.

Für Systeme, die nur aus 2 Nukleonen bestehen, erweist sich die Parität der Wellenfunktion gleich $(-1)^L$. Daher wird die Parität in diesem Fall dadurch bestimmt, ob L eine gerade oder eine ungerade Zahl ist. Zustände

mit gerader Parität werden also die Zustände S, D, G, ... sein, Zustände mit ungerader Parität die Zustände P, F, ...[1])

Die Zustände des Zweinukleonensystems kann man durch den Gesamtdrehimpuls J, den Gesamtspin S und die Parität klassifizieren. In der Tab. 6 sind die möglichen Zustände des Zweinukleonensystems für $J = 0$, 1, 2 aufgeführt. In Klammern sind die möglichen Werte des totalen Isospins angegeben.

Tabelle 6

Mögliche Zustände des Zweinukleonensystems

	Singulettspinzustand		Triplettspinzustand	
	gerade	ungerade	gerade	ungerade
$J = 0$	${}^1S_0(T = 1)$	—	—	${}^3P_0(T = 1)$
$J = 1$	—	${}^1P_1(T = 0)$	${}^3S_1$, ${}^3D_1(T = 0)$	${}^3P_1(T = 1)$
$J = 2$	${}^1D_2(T = 1)$	—	${}^3D_2(T = 0)$	${}^3P_2$, ${}^3F_2(T = 1)$

Zu beachten ist jedoch, daß jeder der Zustände in Tab. 6 mit $J \neq 0$ in bezug auf die Projektion J_z des Drehimpulses $(2J + 1)$-fach entartet ist. Entsprechend besteht auch eine $(2T + 1)$-fache Entartung bezüglich T_3.

Die Winkelabhängigkeit der angeführten Zustände des Zweinukleonensystems wird durch Linearkombinationen der Kugelfunktionen Y_{Lm} und der Spineigenfunktionen $\chi_{Sm'}$ gegeben, die Eigenfunktionen von J^2 und der Projektion $J_z = M$ sind. Solche Kombinationen lassen sich einfach durch die Vektoradditionskoeffizienten (s. Anhang 1.3., S. 522) ausdrücken:

$$\Phi^M_{JLS} = \sum_{m'} (L\, S\, m\, m' | J M)\, Y_{Lm} \chi_{Sm'}.$$

Dabei gilt $M = m + m'$. Die Funktionen Φ^M_{JLS} werden als Kugelfunktionen mit Spin bezeichnet. Sie hängen vom Spin und den Winkelveränderlichen ab.

---

[1]) Bei Untersuchungen der Wellenfunktionen eines Teilchensystems in bezug auf ihre Parität ist noch die sogenannte innere Parität der Teilchen zu berücksichtigen. Diese kann die Werte ± 1 annehmen; sie bestimmt die Eigenschaften der Wellenfunktion eines ruhenden Teilchens bei Inversion. So können z. B. Teilchen mit dem Spin Null gerade innere Parität (Skalar) oder ungerade innere Parität (Pseudoskalar) besitzen. Bei Nukleonen (und anderen Teilchen mit halbzahligem Spin) kann man von einer relativen inneren Parität sprechen. Es zeigt sich, daß das Neutron und das Proton die gleiche relative innere Parität besitzen. Daher ändert sich die oben besprochene Parität des Zweinukleonensystems auch bei Berücksichtigung der relativen inneren Parität der Nukleonen nicht. Genauere Angaben über die Symmetrieeigenschaften der Wellenfunktionen von Elementarteilchen findet man bei SCHAPIRO [2,1].

KAPITEL 3

ENERGIEZUSTÄNDE LEICHTER KERNE

3.1. Elementare Theorie des Deuterons

Den Kern des schweren Wasserstoffs bezeichnet man als *Deuteron* (d). Das Deuteron besteht aus einem Neutron und einem Proton. Aus dem Experiment ist bekannt, daß die Bindungsenergie des Deuterons 2,23 MeV beträgt. Sein Spin ist gleich 1, das magnetische Moment beträgt $\mu \approx 0{,}86\mu_0$, das Quadrupolmoment hat den Wert $Q_0 = 2{,}74 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{cm}^2$.

Für den Aufbau einer elementaren Theorie des Deuterons nehmen wir an, daß die Kernkräfte, die zwischen Protonen und Neutronen wirksam sind, durch ein Potential $V(r)$ beschrieben werden können. Wie wir im weiteren sehen werden, hängen Größe und Reichweite der Kernkräfte von der gegenseitigen Orientierung des Spins der Nukleonen ab. Experimentell zeigte sich, daß die Kernkräfte zwischen 2 Nukleonen in kleinen Entfernungen sehr groß und in Entfernungen, die ihre Reichweite d überschreiten, praktisch gleich Null sind.

Infolge der kleinen Reichweite der Kernkräfte und ihrer außerordentlichen Größe hängen die Resultate bei der Berechnung des Grundzustandes im Deuteron, dem eine kleine Bindungsenergie entspricht, nur wenig von der Form des Potentials $V(r)$ ab. Daher kann man im einfachsten Fall die Abhängigkeit von r durch einen rechteckigen Potentialtopf vorgeben:

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & \text{für} \quad r < d, \\ 0 & \text{für} \quad r > d. \end{cases}$$

Die Energiezustände des Zweinukleonensystems können im Schwerpunktsystem aus folgender SCHRÖDINGER-Gleichung erhalten werden:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta + V(r) - E\right)\psi(\mathfrak{r}) = 0.$$

Dabei bedeutet $\mu = M/2$ die reduzierte Masse. Wir suchen die Lösung in der Form

$$\psi(\mathfrak{r}) = \sum_{l,m} \frac{u_l(\mathfrak{r})}{r} Y_{lm}(\vartheta, \varphi).$$

Dann erhalten wir für die Funktionen u_l die Gleichung

$$\frac{d^2 u_l}{d r^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2}\left\{E - V(r) - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2}\right\} u_l = 0 \tag{3.1.1}$$

mit der Randbedingung

$$u_l(0) = 0. \tag{3.1.2}$$

Gebundene Zustände sind möglich für $E < 0$. Dem niedrigsten Energiezustand entspricht dabei $l = 0$, da bei $l \neq 0$ eine zusätzliche positive Energie $\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2}$ auftritt. Diese entspricht einer Abstoßung der Nukleonen durch die Fliehkraft.

Der Koordinatenwellenfunktion im Grundzustand des Deuterons ($l = 0$) entspricht der S-Zustand (die Funktion ist symmetrisch in bezug auf Vertauschung der Ortskoordinaten). Die Spinwellenfunktion muß dem Triplettspinzustand $S = 1$ entsprechen, da der Gesamtdrehimpuls des Deuterons $J = 1$ ist. Aus diesem Grund muß die Isospinfunktion antisymmetrisch in bezug auf Vertauschung der Ladungsveränderlichen sein, d. h. zu einem Ladungssingulett gehören ($T = 0$).

Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

$$\varepsilon = -E, \quad \frac{2\mu}{\hbar^2}[V_0 - \varepsilon] = \alpha^2, \quad \frac{2\mu\,\varepsilon}{\hbar^2} = \beta^2. \tag{3.1.3}$$

Dann nimmt Gl. (3.1.1) für $l = 0$ und $r < d$ folgende Form an:

$$\frac{d^2 u}{d r^2} + \alpha^2 u = 0.$$

Die Lösung lautet

$$u = A \sin \alpha r + B \cos \alpha r.$$

Aus der Randbedingung (3.1.2) folgt $B = 0$, so daß für $r < d$

$$u = A \sin \alpha r \tag{3.1.4}$$

wird.

Im Gebiet $r > d$ erhalten wir aus (3.1.1) die Gleichung

$$\frac{d^2 u}{d r^2} - \beta^2 u = 0$$

mit der Lösung

$$u = c\, e^{-\beta r} + c'\, e^{\beta r}.$$

Aus der Bedingung, daß $u(r)$ für $r \to \infty$ gegen Null strebt, folgt $c' = 0$. Daher gilt für $r > d$

$$u = c \exp(-\beta r). \tag{3.1.5}$$

Die Größe $\beta^{-1} = \hbar (M\varepsilon)^{-1/2}$ bestimmt sich allein aus der Bindungsenergie des Deuterons; für $\varepsilon = 2{,}23$ MeV wird $\beta^{-1} \approx 4{,}31 \cdot 10^{-13}$ cm. Aus (3.1.5) folgt, daß β^{-1} als *effektiver Deuteronenradius* angesehen werden kann.

Setzt man die logarithmischen Ableitungen der Lösungen von (3.1.4) und (3.1.5) an der Grenze beider Gebiete gleich, so erhält man für $r = d$ die Beziehung

$$\alpha \cot \alpha\, d = -\beta \quad \text{oder} \quad \alpha\, d \cot \alpha\, d = -\beta\, d.$$

Bezeichnen wir $\alpha\, d$ mit ξ und $\beta\, d$ mit η, so wird

$$-\xi \cot \xi = \eta \tag{3.1.6}$$

mit

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{2\mu\, V_0\, d^2}{\hbar^2}. \tag{3.1.6a}$$

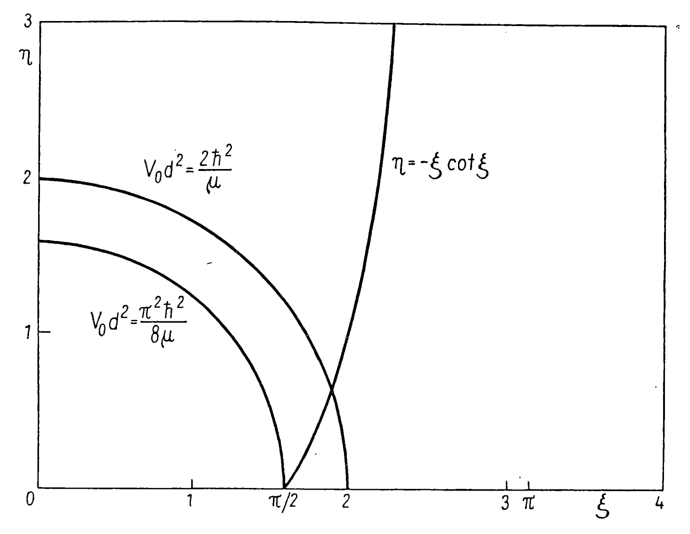


Abb. 2. Graphische Lösung der transzendenten Gleichung $\eta = -\,\xi \cot \xi$

Die Gl. (3.1.6) läßt sich graphisch lösen (Abb. 2). Aus der Abbildung ist ersichtlich, daß sie für $\pi^2/4 \leqq \xi^2 + \eta^2 \leqq 9\pi^2/4$ eine Lösung besitzen wird. Berücksichtigt man (3.1.6a), so erhält man

$$\frac{\pi^2\, \hbar^2}{8\mu} \leqq V_0\, d^2 \leqq \frac{9\pi^2\, \hbar^2}{8\mu}. \tag{3.1.7}$$

Aus der Ungleichung (3.1.7) ist ersichtlich, daß bei gegebener Reichweite der Kernkräfte nur bei einer Potentialtopftiefe größer als $V_{\text{kr}} = \frac{\pi^2\, \hbar^2}{4M\, d^2}$ ein erster gebundener Zustand erscheint. Wählt man für d den Wert $d = 2 \cdot 10^{-13}$ cm, so ergibt sich $V_{\text{kr}} = 25$ MeV. Aus der Kenntnis der Bindungsenergie des Deuterons läßt sich also nur das Produkt $V_0\, d^2$, nicht aber V_0 und d einzeln bestimmen.

Bei einer Reichweite 0 der Kernkräfte würde die Wellenfunktion des Deuterons im Grundzustand folgende Form besitzen:

$$\psi(\mathfrak{r}) = \frac{u(r)}{r} Y_{00} = \sqrt{\frac{\beta}{2\pi}} \frac{\exp(-\beta r)}{r}.^{1)} \tag{3.1.8}$$

Der effektive Deuteronenradius β^{-1} ist größer als die Reichweite der Kernkräfte, d. h., das Deuteron ist ein relativ „*lockeres*“ Gebilde. Infolge der kleinen Reichweite der Kernkräfte ist die Bindungsenergie wesentlich kleiner als die Wechselwirkungsenergie V_0.

Man kann leicht zeigen, daß unter der Annahme zentraler Kernkräfte im Deuteron kein Zustand mit $l \neq 0$ existieren kann. Dies zeigt bereits eine grobe Abschätzung für die Lage eines Niveaus mit einem Bahndrehimpuls $l \neq 0$. Wir berechnen den Wert der Abstoßungsenergie $\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2}$, die auf Grund von Fliehkrafteffekten auftritt. Bei $r = \beta^{-1}$ erhält man z. B. für $l = 1$: $\left\{\frac{\hbar^2}{\mu r^2}\right\}_{r=\beta^{-1}} = \frac{\hbar^2 \beta^2}{\mu} = 2\varepsilon$. Sind also die Wechselwirkungskräfte zwischen Proton und Neutron Zentralkräfte, so muß schon der P-Zustand im Gebiet des kontinuierlichen Spektrums liegen.

Wie das Experiment zeigt, wird ein gebundener Zustand im Deuteron nur für den Fall beobachtet, daß der Gesamtspin des Deuterons gleich Eins ist (Triplettspinzustand). Im Singulettspinzustand existieren keine Zustände mit negativer Energie. Das deutet auf einen Unterschied (für $l = 0$) der Kernwechselwirkungskräfte im Singulett- und Triplettspinzustand hin. Aus der Ungleichung (3.1.7), die die Bedingung für die Bildung eines gebundenen Zustandes angibt, folgt

$$(V_0 d^2)_t > \frac{\pi^2 \hbar^2}{4M} \quad \text{für den Triplettspinzustand,}$$

$$(V_0 d^2)_s < \frac{\pi^2 \hbar^2}{4M} \quad \text{für den Singulettspinzustand.}$$

---

[1]) Die Funktion (3.1.8) ist auf 1 normiert. Infolge des exponentiellen Abfalls dieser Funktion besitzt im Integral $\int_0^\infty |\psi|^2 r^2 \, dr$ das Integrationsgebiet $r \approx 0$ die größte Bedeutung. Gerade in diesem Gebiet unterscheidet sich die Funktion (3.1.8) aber sehr stark von der wirklichen Wellenfunktion. Daher ist es besser, die Deuteronenwellenfunktion nicht auf 1 zu normieren, sondern die Normierung so vorzunehmen, daß die angenäherte Funktion mit der genauen Wellenfunktion für große Abstände übereinstimmt. Um dieser Bedingung zu genügen, muß man, wie SMORODINSKI [3,1] zeigte, folgende Beziehung fordern:

$$4\pi \int_0^\infty |\psi r|^2 \, dr = \{1{,}23 \sqrt{2\beta}\}^{-2}.$$

Daher ist der Grundzustand des Deuterons für die Näherung mit Nullreichweite durch die Wellenfunktion

$$\psi = \frac{u(r)}{r\sqrt{4\pi}}$$

mit

$$u(r) = 1{,}23 \sqrt{2\beta} \exp(-\beta r) \approx \sqrt{3\beta} \exp(-\beta r)$$

zu beschreiben.

Der allgemeinste Ausdruck für das zentrale Wechselwirkungspotential zwischen 2 Nukleonen mit einer Abhängigkeit von den Koordinaten und von den Spins der Nukleonen wird durch folgende Größe gegeben:

$$V(r_1, \vec{\sigma}_1; r_2, \vec{\sigma}_2) = \alpha(r_{12}) + \beta(r_{12}) \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2. \tag{3.1.9}$$

Drückt man den Gesamtspin des Systems durch $\vec{\sigma}_1$ und $\vec{\sigma}_2$ mit Hilfe der Gleichung $\mathfrak{S} = {}^1/_2(\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2)$ aus, so findet man

$$\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 = \begin{cases} -3 & \text{im Singulettspinzustand,} \\ 1 & \text{im Triplettspinzustand.} \end{cases}$$

Das Wechselwirkungspotential zwischen 2 Nukleonen im Singulett- und im Triplettspinzustand drückt sich durch die Funktionen $\alpha(r_{12})$ und $\beta(r_{12})$ über eine einfache Beziehung aus:

$$V_s = \alpha(r_{12}) - 3\beta(r_{12}),$$
$$V_t = \alpha(r_{12}) + \beta(r_{12}).$$

Beschränkt man sich auf die einfachste Form der Abhängigkeit des Potentials vom Radius (rechteckiger Potentialtopf mit konstantem Radius), so kann man aus der Bindungsenergie im Deuteron nur das Produkt aus dem Quadrat des Radius und der Tiefe des Potentialtopfes für die Wechselwirkung im Triplettspinzustand bestimmen.

Genauere Angaben über das Wechselwirkungspotential zwischen 2 Nukleonen lassen sich aus Untersuchungen der Nukleonenstreuung erhalten (s. Kap. 7).

3.2. Der nichtzentrale Charakter von Kernkräften

Die Existenz eines Quadrupolmoments $Q = 2{,}74 \cdot 10^{-27}\,\text{cm}^2$ im Grundzustand des Deuterons deutet darauf hin, daß dieser Zustand kein reiner S-Zustand sein kann, sondern auch Zustände mit einem Bahndrehimpuls nicht kleiner als $l = 2$ enthalten muß. Der Unterschied zwischen dem magnetischen Moment des Deuterons ($\mu_\text{d} = 0{,}86\mu_0$) und der Summe der magnetischen Momente von Proton und Neutron ($\mu_\text{p} + \mu_\text{n} = 0{,}88\mu_0$) weist ebenfalls darauf hin, daß die Bahnbewegung der Nukleonen einen kleinen Beitrag zum magnetischen Moment des Deuterons liefert. Das wäre in einem reinen S-Zustand nicht möglich.

Um das Quadrupolmoment des Deuterons erklären zu können, muß man annehmen, daß die Kernkräfte zwischen 2 Nukleonen keine reinen Zentralkräfte sind, d. h. nicht nur vom Abstand zwischen den Nukleonen, sondern auch von der Orientierung der Nukleonenspins in bezug auf die Verbindungslinie der Nukleonen abhängen. In einem System mit nichtzentralen Kräften stellt der Drehimpuls kein Bewegungsintegral mehr dar. Daher lassen sich die Zustände eines solchen Systems auch nicht nach den Werten des Drehimpulses (S, P, D, ...) klassifizieren.

Der nichtzentrale Anteil der Wechselwirkung zwischen Nukleonen wird als *Tensorpotential* bezeichnet. Gewöhnlich definiert man das Tensorpotential

$$\gamma(r_{12})\, S_{12} \tag{3.2.1}$$

so, daß es bei Mittelung über alle Richtungen im Raum Null wird. Aus den Vektoren $\mathfrak{r}_{12}$, $\vec{\sigma}_1$ und $\vec{\sigma}_2$ kann man nur eine skalare Größe S_{12}, die den oben angeführten Bedingungen genügt, ableiten:

$$S_{12} = \frac{3(\vec{\sigma}_1\, \mathfrak{r}_{12})(\vec{\sigma}_2\, \mathfrak{r}_{12})}{r_{12}^2} - \vec{\sigma}_1\, \vec{\sigma}_2. \tag{3.2.1a}$$

Da das Tensorpotential (3.2.1) ein Skalar ist, bleiben Gesamtdrehimpuls und Parität des Systems auch bei Anwesenheit von Tensorkräften Bewegungsintegrale. Im allgemeinen Fall sind aber Bahndrehimpuls und Spin keine Bewegungsintegrale. Man kann zeigen, daß im Zweikörpersystem das Quadrat des Gesamtspins noch Bewegungsintegral ist. Drückt man nämlich das Skalarprodukt $\vec{\sigma}_1\, \vec{\sigma}_2$ durch den Vektor des Gesamtspins $\mathfrak{S} = {}^1/_2(\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2)$ aus, so läßt sich (3.2.1a) in der Form

$$S_{12} = 6\,\frac{(\mathfrak{S}\, \mathfrak{r}_{12})^2}{r_{12}^2} - 2\mathfrak{S}^2 \tag{3.2.2}$$

schreiben. Daraus folgt, daß S_{12} mit $\mathfrak{S}^2$ kommutiert. Außerdem kommutiert auch $\vec{\sigma}_1\, \vec{\sigma}_2$ und damit das Wechselwirkungspotential zwischen 2 Nukleonen

$$V = \alpha(r_{12}) + \beta(r_{12})\, \vec{\sigma}_1\, \vec{\sigma}_2 + \gamma(r_{12})\, S_{12} \tag{3.2.3}$$

mit $\mathfrak{S}^2$, d. h., das Quadrat des Gesamtspins ist auch bei Anwesenheit von Tensorkräften Bewegungsintegral. Aus (3.2.2) folgt noch, daß $S_{12} = 0$ für den Singulettzustand ($S = 0$) ist, die Tensorkräfte in diesem Fall also überhaupt nicht vorhanden sind. Im Zweinukleonensystem mit dem Wechselwirkungspotential (3.2.3) existieren also folgende Bewegungsintegrale: a) der Gesamtdrehimpuls des Systems J und seine Projektion auf die z-Achse, b) die Parität der Wellenfunktionen und c) der Gesamtspin des Systems. Der Bahndrehimpuls L ist im allgemeinen kein Bewegungsintegral.

Der Grundzustand des Deuterons entspricht dem Triplettspinzustand $S = 1$, besitzt den Gesamtdrehimpuls $J = 1$ und hat außerdem gerade Parität, da in der Näherung durch Zentralkräfte die Parität der Wellenfunktion gerade ist und die Anwesenheit der Tensorkräfte die Parität nicht ändert. Aus diesem Grund können von allen möglichen in der Tab. 6, S. 22, angeführten Zuständen des Zweinukleonensystems im Grundzustand des Deuterons nur die Zustände $^3S_1$ und $^3D_1$ realisiert sein. Die Anwesenheit des $^3D_1$-Zustandes im Deuteron bedingt die Abweichung der Ladungsverteilung von der kugelsymmetrischen Form. Um die richtige Größe des Quadrupolmoments und die Abweichung des magnetischen Moments des Deuterons von der einfachen Summe der magnetischen Momente von Proton und Neutron zu erhalten, muß man annehmen, daß der Anteil des $^3D_1$-Zustandes im Deuteron ungefähr 4 % beträgt.

Das kleine Quadrupolmoment des Deuterons gibt noch keinen Hinweis auf die Kleinheit der Tensorkräfte. An Hand der bekannten experimentellen Werte kann man keine eindeutige Wahl für die Größe der Tensorkräfte bei gegebener Form des Potentials treffen; z. B. gilt das für den rechteckigen Potentialtopf. Man kann den Anteil der Tensorkräfte vergrößern, wenn man diese Vergrößerung durch eine entsprechende Verkleinerung der Zentralkräfte kompensiert. Größe und Reichweite der Tensorkräfte unterscheiden sich im allgemeinen nicht sehr stark von den entsprechenden Werten für die Zentralkräfte. Möglicherweise besitzt das Tensorpotential eine etwas größere Reichweite und ist auch nicht ganz so tief wie das Potential der Zentralkräfte.

3.3. Absättigung der Kernkräfte

Bei der Untersuchung von Kernen mit einer Nukleonenzahl >2 taucht zunächst die Frage auf, ob sich nicht die Wechselwirkungskräfte zwischen 2 Nukleonen verändern, wenn sich in der Nachbarschaft dieser beiden Nukleonen noch andere befinden. Mit anderen Worten: Kann man die Wechselwirkung zwischen N Nukleonen als Summe der Wechselwirkungen zwischen allen Nukleonenpaaren darstellen:

$$V = \sum_{i<j}^{A} V_{ij}. \tag{3.3.1}$$

Zur Zeit gibt es noch keine genügend beweiskräftige und eindeutige Antwort auf diese Frage. Von großem Interesse sind die Versuche, die beobachteten Eigenschaften der Kerne durch spezielle Wahl von V_{ij} unter Annahme der Richtigkeit von (3.3.1) zu erklären.

Wir wollen zeigen, daß man die im Experiment beobachtete annähernd konstante Kerndichte und die Bindungsenergie je Nukleon im Kern nicht erklären kann, wenn man das Wechselwirkungspotential V_{ij} zwischen den Nukleonen i und j in (3.3.1) in der Form von Anziehungskräften darstellt. Nimmt man an, daß die Kernkräfte zwischen den Nukleonen nicht vom Ladungszustand der Nukleonen abhängig sind, so muß nach (3.3.1) die potentielle Wechselwirkungsenergie bei Vergrößerung der Nukleonenzahl proportional zur Zahl der wechselwirkenden Paare wachsen. Es gilt also

$$\overline{V} = \frac{A(A-1)}{2}\,\overline{V}_{12}.$$

Dabei bedeutet $\overline{V}_{12}$ die mittlere Wechselwirkungsenergie zweier Nukleonen.

Nehmen wir weiterhin an, daß die potentielle Wechselwirkungsenergie zwischen 2 Nukleonen als Potentialtopf mit der Breite d und der Tiefe V_0 dargestellt werden kann, so gilt $\overline{V}_{12} = -V_0\,W(d)$, wobei $W(d)$ die Wahrscheinlichkeit dafür ist, daß der gegenseitige Abstand zwischen den Nukleonen kleiner als d ist. Nimmt man außerdem an, daß sich die Nukleonen unabhängig voneinander im Kern mit dem Radius R bewegen, so ist bei einem Kernradius kleiner als d die Wahrscheinlichkeit $W(d) = 1$. Ist jedoch

$R \gg d$, so wird $W(d) = (d/R)^3$, d. h. gleich dem Verhältnis des Volumens der Wechselwirkungskugel zum Kernvolumen. Bei gegebener Zusammensetzung des Kerns hat also die potentielle Energie als Funktion des Kernradius R die Form der Kurve $\overline{V}$, die in der Abb. 3 dargestellt ist. Bei Verkleinerung der linearen Abmessungen des Systems um den Faktor a vergrößert sich der Impuls um den Faktor a, und die kinetische Energie wächst um den Faktor a^2. Die kinetische Energie kann also als Funktion des Kernradius (bei konstantem A) durch die Kurve $\overline{K}$ (Abb. 3) dargestellt werden. Die Gesamtenergie $E = \overline{K} + \overline{V}$ besitzt, wie die Rechnung zeigt, ein Minimum bei $R \approx d/2$. Wäre also die obige Annahme richtig, so würden die Radien aller Kerne gleich sein und besäßen eine Größe ungefähr gleich der halben Reichweite der Kernkräfte zwischen einem Nukleonenpaar, also $\approx 2 \cdot 10^{-13}$ cm.

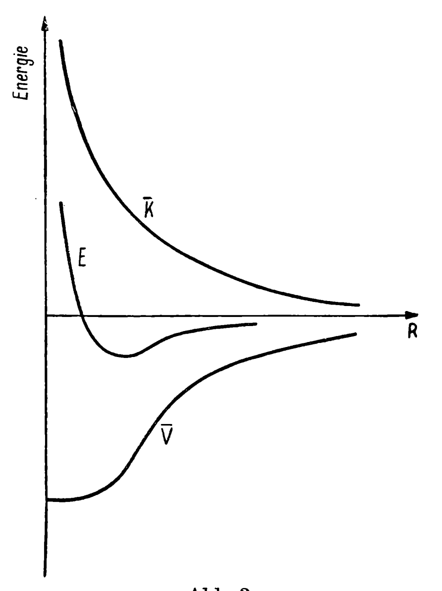


Abb. 3
Qualitative Abhängigkeit der mittleren kinetischen und potentiellen Energie der Nukleonen im Kern vom Kernradius

Wählt man als Potential der Paarwechselwirkung ein Potential mit einer Singularität im Nullpunkt, z. B. das YUKAWA-Potential [vgl. Gl. (3.3.18)], so würde der minimalen Energie ein Kernradius ≈ 0 entsprechen. Dann würden Dichte und Energie des Kerns gegen ∞ streben. Dies widerspricht jedoch der gut bekannten Tatsache einer fast konstanten Kerndichte.

Um die experimentellen Werte zu erklären, muß man annehmen, daß die Kernkräfte Sättigungseigenschaften besitzen, d. h., sie können Anziehungskräfte nur zwischen einer relativ kleinen Anzahl von Nukleonen sein und müssen bezüglich der übrigen Nukleonen abstoßend wirken.

Bekanntlich besitzen die chemischen Bindungskräfte ebenfalls Sättigungscharakter. Die Wechselwirkung zwischen Atomen ist bei Verkleinerung des Abstandes entweder anziehend oder abstoßend. Ob die Kräfte anziehend oder abstoßend sind, wird durch die Symmetrieeigenschaften der Wellenfunktionen bezüglich Vertauschung (Austausch) der Koordinaten eines Elektronenpaares bestimmt. Die entsprechenden Kräfte bezeichnet man als Austauschkräfte.

Um die Sättigungseigenschaften der Kernkräfte zu erklären, wurden in der Kerntheorie verschiedene Typen von Austauschkräften eingeführt, d. h., man nahm an, daß die Wechselwirkungskräfte von den Symmetrieeigenschaften der Wellenfunktionen in bezug auf Vertauschung der verschiedenen

Koordinaten eines Nukleonenpaares abhängig sind. So wurde z. B. die Wechselwirkung zwischen 2 Nukleonen durch das Potential

$$V_M = (-1)^l M(r_{12}) \tag{3.3.2}$$

beschrieben, das anziehenden Charakter ($M < 0$) für Zustände mit gerader Parität und abstoßenden Charakter für Zustände mit ungerader Parität besitzt.

Das Potential (3.3.2) wird als *Potential der* MAJORANA-*Kräfte* bezeichnet. Da die Parität eines Zustandes für ein Zweinukleonensystem durch die Symmetrieeigenschaften der Wellenfunktion bezüglich Vertauschung der Ortskoordinaten beider Teilchen bestimmt wird, läßt sich das Potential der MAJORANA-Kräfte durch den Austauschoperator der räumlichen Koordinaten des Nukleonenpaares ausdrücken:

$$V_M = M(r_{12})\, P_{12}(r). \tag{3.3.3}$$

Man kann Kräfte einführen, die ihr Vorzeichen in Abhängigkeit von der Symmetrie der Gesamtspinwellenfunktion des Systems ändern. Solche Kräfte bezeichnet man als BARTLETT-*Kräfte*. Sie lassen sich durch den Austauschoperator für die Spinveränderlichen

$$P_{12}(\sigma) = \frac{1}{2}(1 + \vec{\sigma}_1\, \vec{\sigma}_2), \tag{3.3.4}$$

und zwar durch die Beziehung

$$V_B = B(r_{12})\, P_{12}(\sigma) = B(r_{12})\, (-1)^{S+1}, \tag{3.3.5}$$

ausdrücken. Berücksichtigt man (3.3.5), so läßt sich das oben betrachtete Potential der zentralen Wechselwirkung zwischen 2 Nukleonen, das vom Spin abhängig ist, durch das Potential der BARTLETT-Kräfte und durch das Potential der gewöhnlichen Kräfte (WIGNER-*Kräfte*) ausdrücken:

$$V = \alpha(r_{12}) + \beta(r_{12})\,\vec{\sigma}_1\, \vec{\sigma}_2 = W(r_{12}) + B(r_{12})\, P_{12}(\sigma). \tag{3.3.6}$$

Dabei bedeuten $W(r_{12}) = \alpha(r_{12}) - \beta(r_{12})$ das Potential der WIGNER-Kräfte und $B(r_{12}) = 2\beta(r_{12})$.

Die Gl. (3.3.6) zeigt, daß die Einführung der BARTLETT-Kräfte nichts anderes als die Berücksichtigung der Ungleichheit zwischen den Kernkräften im Singulett- und Triplettspinzustand bedeutet.

Schließlich kann man Kräfte einführen, die durch den Operator der gleichzeitigen Vertauschung von Orts- und Spinkoordinaten zweier Nukleonen definiert sind. Solche Kräfte bezeichnet man als HEISENBERG-*Kräfte*. Das Potential der HEISENBERG-Kräfte besitzt die Form

$$V_H = H(r_{12})\, P_{12}(r)\, P_{12}(\sigma) = (-1)^{l+S+1}\, H(r_{12}). \tag{3.3.7}$$

Aus den Gln. (3.3.3), (3.3.5) und (3.3.7) folgt, daß sich für $l = 0$ (S-Zustand) die MAJORANA-Kräfte von den WIGNER-Kräften nicht unterscheiden und auch die BARTLETT-Kräfte nicht von den HEISENBERG-Kräften unterschieden sind.

Wegen des verallgemeinerten PAULI-Prinzips können die Zustände eines Nukleonensystems nur durch Funktionen beschrieben werden, die anti-

symmetrisch in bezug auf Vertauschung aller 5 Koordinaten eines beliebigen Nukleonenpaares sind, d. h.

$$P_{12}(\tau)\, P_{12}(r)\, P_{12}(\sigma)\, \Psi = -\Psi. \tag{3.3.8}$$

Im weiteren benutzen wir nur solche Funktionen, die dieser Bedingung genügen. Daher läßt sich die Wirkung der Operatoren $P_{12}(r)\, P_{12}(\sigma)$ durch die Wirkung des Operators $P_{12}(\tau)$ über die Beziehung

$$P_{12}(r)\, P_{12}(\sigma)\, \Psi = -P_{12}(\tau)\, \Psi \tag{3.3.9}$$

ausdrücken. Man kann also schreiben

$$V_{\mathrm{H}} = -H(r_{12})\, P_{12}(\tau). \tag{3.3.10}$$

Der Operator $P_{12}(\tau)$ ist der Austauschoperator der Ladungsvariablen und besitzt folgende Form (vgl. Abschn. 2.3.):

$$P_{12}(\tau) = \frac{1}{2}\{1 + \vec{\tau}(1)\, \vec{\tau}(2)\}.$$

Die Einführung der HEISENBERG-Kräfte bedeutet also die Berücksichtigung der Ungleichheit der Kernkräfte im Singulett- und Triplettladungszustand.

Mit Hilfe von (3.3.8) läßt sich zeigen, daß

$$P_{12}(r)\, \Psi = -P_{12}(\tau)\, P_{12}(\sigma)\, \Psi \tag{3.3.11}$$

gilt. Diese Beziehung gestattet, die Wirkung des Austauschoperators für die Ortskoordinaten (Operator der MAJORANA-Kräfte) durch die Wirkung der Austauschoperatoren für Spin und Ladungsveränderliche zu ersetzen, d. h.

$$P_{12}(r) = -\frac{1}{4}(1 + \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2)\{1 + \vec{\tau}(1)\, \vec{\tau}(2)\}. \tag{3.3.12}$$

Tensorkräfte können ebenfalls Austauschkräfte sein. Da der Tensoroperator S_{12} mit dem Austauschoperator für die BARTLETT-Kräfte kommutativ ist, sind nur 2 Typen von Tensorkräften möglich: normale Tensorkräfte und Tensorkräfte mit Austauschcharakter vom MAJORANA-Typ. Der Mittelwert der Tensorkräfte ist für kugelsymmetrische Kerne gleich Null und für nichtsphärische Kerne ungleich Null.

Demzufolge läßt sich das allgemeinste Wechselwirkungspotential zwischen 2 Nukleonen in der Form

$$\begin{aligned} V(r) &= W(r) + B(r)\, P_{12}(\sigma) + M(r)\, P_{12}(r) + H(r)\, P_{12}(\tau) + T(r)\, S_{12} + \\ &\quad + T_{\mathrm{M}}(r)\, P_{12}(r)\, S_{12} = \alpha(r) + \beta(r)\, \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 + \delta(r)\, \vec{\tau}(1)\, \vec{\tau}(2) + \\ &\quad + h(r)\, (\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2)\, (\vec{\tau}(1)\, \vec{\tau}(2)) + S_{12}[\gamma(r) + g(r)\, \vec{\tau}(1)\, \vec{\tau}(2)] \end{aligned}$$

mit

$$\alpha(r) = W(r) + \frac{1}{2}B(r) - \frac{1}{2}H(r) - \frac{1}{4}M(r), \qquad h(r) = -\frac{1}{4}M(r),$$

$$\beta(r) = \frac{1}{2}B(r) - \frac{1}{4}M(r), \qquad \gamma(r) = T(r) - \frac{1}{2}T_{\mathrm{M}}(r),$$

$$\delta(r) = -\frac{1}{2}B(r) - \frac{1}{4}M(r), \qquad g(r) = -\frac{1}{2}T_{\mathrm{M}}(r)$$

darstellen.

Nach der z. Z. üblichen Terminologie werden nur solche Kräfte als Austauschkräfte bezeichnet, in deren Potential entweder der Austausch der Ladungsveränderlichen oder der Austausch der räumlichen Koordinaten enthalten ist. Zu den Austauschkräften gehören also die MAJORANA- und HEISENBERG-Kräfte.

Die Anwesenheit von Austauschkräften zwischen Protonen und Neutronen wurde experimentell bei Untersuchungen der Streuung von Neutronen großer Energie (40 · · · 90 MeV) an Protonen festgestellt [3,2]. Wenn zwischen Protonen und Neutronen nur gewöhnliche Kräfte wirksam werden, dann müßten die Neutronen hauptsächlich in Vorwärtsrichtung gestreut werden, die Rückstoßprotonen jedoch in Rückwärtsrichtung. Besitzen die Kräfte aber Austauschcharakter, so würde im Verlauf der Wechselwirkung eine Umladung vor sich gehen, und nach vorn flögen nicht Neutronen, sondern Protonen. Das Experiment zeigt, daß die Winkelverteilung im Schwerpunktsystem fast symmetrisch in bezug auf den Winkel 90° ist.

Um die experimentelle Winkelverteilung der gestreuten Neutronen zu erklären, muß man annehmen, daß die Kräfte etwa zur Hälfte aus Austauschkräften und etwa zur Hälfte aus gewöhnlichen Kräften bestehen. Solche Kräfte wurden von SERBER eingeführt. Das Potential dieser Kräfte läßt sich mit Hilfe des Austauschoperators der MAJORANA-Kräfte $P_{12}(r)$ durch die Beziehung

$$V_S(r_{12}) = U(r_{12})\,\frac{1 + P_{12}(r)}{2} \tag{3.3.13}$$

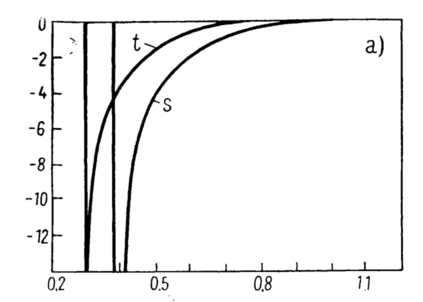
ausdrücken. Das SERBER-Potential $V_S(r_{12})$ ist Null für alle Zustände von Nukleonenpaaren mit ungerader Parität und gleich $U(r_{12})$ für alle Zustände mit gerader Parität.

Die SERBER-Kraft (3.3.13) kann jedoch im allgemeinen Fall die Absättigung der Kernkräfte nicht erklären. Eine Absättigung ist nur dann möglich, wenn entweder die Rolle der Austauschkräfte wesentlich größer als in (3.3.13) ist oder wenn man die zusätzliche Annahme macht, daß die SERBER-Kraft nur für den S-Zustand von Null verschieden ist [3,3; 3,4]. In diesem Fall kann ein Nukleon in der Kernmaterie nur mit den Nukleonen wechselwirken, die sich in der Wechselwirkungskugel (Radius d) der Kernkräfte des vorliegenden Nukleons befinden und gleichzeitig bezüglich des vorliegenden Nukleons im S-Zustand sind. Daher ist die Anzahl der wechselwirkenden Nukleonenpaare je Nukleon der Zahl der möglichen S-Zustände in einer Kugel vom Radius d proportional. Diese Zahl ist proportional $k_F\,d$, wobei k_F die Wellenzahl des Nukleons mit der maximal möglichen Energie im vorliegenden Kern ist. Die Anziehungsenergie je Nukleon wird folglich $U = -A\,k_F\,d$. Da die kinetische Energie je Nukleon $K = B\,k_F^2$ ist, wird die Gesamtenergie je Nukleon $E = B\,k_F^2 - A\,k_F\,d$ ein Minimum bei einem bestimmten Wert $k_{F_0} = A\,d/2B$, d. h. bei einem bestimmten Wert der Dichte besitzen, da ja $k_F \sim 1/r_0$ ist (r_0 bedeutet den mittleren Abstand zwischen den Nukleonen im Kern).

Im Fall gewöhnlicher Kräfte oder auch von SERBER-Kräften, die für Zustände mit gerader Parität verschieden von Null sind, wird die potentielle

Anziehungsenergie proportional k_F^3, und die Gesamtenergie des Nukleons bei Verkleinerung des mittleren Abstandes (r_0) zwischen den Nukleonen nimmt unbeschränkt ab (keine Absättigung).

Es ist möglich, daß für die Absättigung der Kernkräfte die sogenannten Vielteilchenkräfte verantwortlich sind. Diese lassen sich, wie bekannt, nicht auf Paarkräfte zurückführen. Um die Absättigung der Kernkräfte zu erklären, muß man annehmen, daß die Vielteilchenkräfte zu einer gegenseitigen Abstoßung der Nukleonen führen. Effekte mit Vielteilchenkräften, die abstoßenden Charakter tragen, wurden von DREEL und HUANG [3,5] betrachtet. Sie zeigten, daß bei einer gewissen phänomenologischen Wahl des Potentials für die Vielteilchenkräfte eine befriedigende Erklärung der beobachteten Sättigungseigenschaften der Kernkräfte gegeben werden kann. Diese Resultate wurden jedoch mit Hilfe der Störungstheorie für ein Problem mit starker Wechselwirkung erhalten, so daß ihre Richtigkeit nicht ohne weiteres übernommen werden kann. In letzter Zeit wurden Versuche unternommen [3,6],



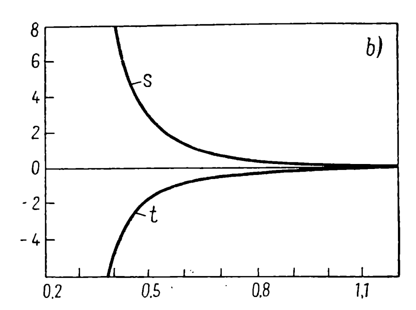


Abb. 4. Wechselwirkungspotential zweier Nukleonen im geraden (a) und ungeraden (b) Singulett- (s) und Triplettzustand (t) [3,6]

Die Energie ist in Einheiten 140 MeV, der Abstand in Einheiten $\mu c/\hbar = 9 \cdot 10^{-13}$ cm abgetragen

die Absättigung durch Einführung eines singulären nichtmonotonen Wechselwirkungspotentials zwischen einem Nukleonenpaar zu erklären. Ein solches Potential wurde von LEVY [3,7] auf der Grundlage der Mesonentheorie von Kernkräften vorgeschlagen. Abb. 4 zeigt den qualitativen Charakter der Abhängigkeit zwischen der potentiellen Wechselwirkungsenergie zweier Nukleonen und dem Abstand zwischen den Nukleonen für Zustände mit gerader und ungerader Parität für 2 Spinzustände des Systems.

Die Frage der theoretischen Erklärung der Kernkräfte ist bis heute noch nicht beantwortet, obwohl es gelungen ist, die Natur der Kernkräfte schon weitgehend aufzuklären. Es steht heute außer Zweifel, daß die Kernkraftwechselwirkung durch ein Mesonenfeld, insbesondere durch das π-Mesonenfeld, hervorgerufen wird.

Im Gegensatz zur elektrischen Wechselwirkung, die durch Photonen verursacht wird (Teilchen mit der Ruhemasse Null), sind die Kernkräfte durch Teilchen bedingt, deren Ruhemasse ungleich Null ist. Diese Tatsache, daß

nämlich die Kernwechselwirkung durch Teilchen mit einer Ruhemasse verschieden von Null hervorgerufen wird, sichert die kleine Reichweite der Kernkräfte. Schon in den ersten Arbeiten über die Theorie der Kernkräfte von YUKAWA [3,8] wurde gezeigt, daß für die Erklärung der experimentell beobachteten Reichweite der Kernkräfte notwendigerweise eine Wechselwirkung durch Teilchen mit einer Ruhemasse von etwa 200 bis 300 Elektronenmassen angenommen werden muß. Dies kann leicht aus sehr einfachen Überlegungen gefolgert werden. Die statische elektromagnetische Wechselwirkung zwischen zwei punktförmigen elektrischen Ladungen e_1 und e_2, deren Lage durch die Radiusvektoren $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2$ fixiert ist, kann man in folgender Form darstellen:

$$W_{12} = e_1 V(|\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2|). \tag{3.3.14}$$

Das hier eingehende Potential genügt der Gleichung

$$\nabla^2 V = 4\pi e_2 \delta(\mathfrak{r}_2). \tag{3.3.15}$$

Die Lösung von (3.3.15) lautet

$$V(|\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2|) = -\frac{e_2}{|\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2|}. \tag{3.3.16}$$

Daher wird die statische Wechselwirkung zweier Ladungen durch das COULOMBsche Gesetz beschrieben:

$$W_{12} = -\frac{e_1 e_2}{|\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2|}.$$

Wenn die Kernkräfte zwischen den Nukleonen durch Mesonen mit der Ruhemasse μ übertragen werden, so läßt sich die statische Wechselwirkung zwischen 2 Nukleonen durch ein Potential beschreiben, das der Gleichung

$$\Delta^2 V - k^2 V = 4\pi g \delta(\mathfrak{r}_2), \qquad k = \frac{\mu c}{\hbar} \tag{3.3.17}$$

genügt.

Die Konstante g kann als spezifische Mesonenladung des Nukleons bezeichnet werden. Bei $\mu = 0$ geht (3.3.17) in die Gl. (3.3.15) über. Die Lösung der Gl. (3.3.17), die dem COULOMB-Potential analog ist, lautet

$$V(|\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2|) = -g \frac{e^{-k|\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2|}}{|\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2|},$$

und die Wechselwirkungsenergie eines Nukleonenpaares wird dann

$$W_{12} = -g^2 \frac{e^{-k|\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2|}}{|\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2|}. \tag{3.3.18}$$

Um eine hinreichend schnelle Verkleinerung der Wechselwirkungsenergie (3.3.18) mit dem Abstand zu gewährleisten, muß man in (3.3.17) für μ einen Wert annehmen, der die Elektronenmasse 200- bis 300mal übertrifft.

Man könnte hoffen, daß (3.3.18) bei entsprechender Wahl der Konstanten g und μ die Wechselwirkung zwischen den Nukleonen genauso beschreibt wie das COULOMB-Potential die Wechselwirkung zwischen zwei geladenen Teilchen. Eine solche Analogie ist jedoch sehr grob. Für die Erklärung aller

experimentellen Informationen über die Kernkräfte muß die Theorie wesentlich komplizierter aufgebaut werden. Es stellte sich ferner heraus, daß infolge der Größe der Kernwechselwirkung die gewöhnlichen Methoden, die in der Theorie der schwachen elektromagnetischen Wechselwirkungen ausgearbeitet wurden, nicht mehr verwendbar sind.[1])

Gegenwärtig steht fest, daß die Theorie der Kernkräfte sich hauptsächlich auf experimentelle Aussagen über die Wechselwirkung von Nukleonen bei hohen Energien und auf die Wechselwirkung von Nukleonen mit Mesonen stützen muß. Wir werden jedoch auf diese interessanten Fragen der Theorie des Atomkerns und der Kernwechselwirkungen hier nicht näher eingehen.

3.4. Isospin und Energieniveaus leichter Isobare

Die Annahme der Ladungsunabhängigkeit der Kernkräfte gestattet eine Gegenüberstellung der Energieniveaus leichter isobarer Kerne, bei denen ein Einfluß der COULOMB-Wechselwirkung nicht sehr groß ist. Infolge der Ladungsunabhängigkeit der Kernkräfte müssen Kerne, die gleiche Nukleonenzahl besitzen (Isobare) und sich nur durch eine verschiedene Anzahl von Protonen und Neutronen unterscheiden, in Zuständen, die durch das PAULI-Prinzip erlaubt sind, ähnliche Niveaus besitzen, d. h. Niveaus mit gleichem Gesamtdrehimpuls, gleicher Parität, gleichem Isospin usw.

Für den Vergleich der Energieniveaus von Isobaren führt man zweckmäßigerweise den schon in Abschn. 2.2. untersuchten *Isospin* des Kerns

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{A} \tau(i)$$

ein. Eine Reihe von Autoren [3,9] bezeichnet ihn auch als Isobarenspin oder Isotopenspin. Der totale Isospin nimmt für Kerne mit gerader Massenzahl nur ganzzahlige Werte an: $T = 0, 1, 2, \ldots$; für Kerne mit ungerader Massenzahl gilt $T = {}^1/_2, {}^3/_2, {}^5/_2, \ldots$ Dementsprechend sind 2 Gruppen von Kernen zu unterscheiden: Kerne mit geradem und mit ungeradem A.

Ein Beispiel für isobare Kerne mit ungerader Massenzahl sind ^{7}Li und ^{7}Be. Diese beiden Kerne werden als *Spiegelkerne* bezeichnet, da der eine aus dem anderen durch Vertauschung der Protonen mit den Neutronen und umgekehrt erhalten werden kann. Beide Isobare ^{7}Li und ^{7}Be bilden ein Ladungs- (Isospin-) Dublett mit dem Isospin $T = {}^1/_2$. Der Grundzustand der beiden Kerne wird durch einen Gesamtdrehimpuls ${}^3/_2$ charakterisiert, er besitzt ungerade Parität. Die Lage der folgenden ersten angeregten Niveaus ist für beide Kerne fast die gleiche (Abb. 5).

---

[1]) Die Beschreibung der Wechselwirkung zwischen Nukleonen durch ein Potential, das vom Abstand zwischen den Nukleonen und von den Vektoren des gewöhnlichen sowie des Isospins abhängt, ist nur für Abstände möglich, die die COMPTON-Wellenlänge des π-Mesons ($\approx 10^{-13}$ cm) überschreiten. Bei kleineren Abständen wird der Begriff eines Potentials zu einer groben Näherung. Die Wechselwirkung hat für solche Abstände offensichtlich nichtlokalen Charakter.

Die Spiegelkerne ^{5}He und ^{5}Li; ^{11}B und ^{11}C; ^{13}C und ^{13}N; ^{15}N und ^{15}O; ^{17}O und ^{17}F u. a. [3,10] besitzen ein ähnliches System von Energieniveaus mit dem Isospin $T = 1/2$. Zustände mit dem Isospin $T = 1/2$ erweisen sich energetisch günstiger als Zustände mit $T = 3/2$. Daher besitzen stabile Kerne mit $|T_3| = 1/2$ im Grundzustand den Isospin $T = 1/2$.

Als Beispiel für isobare Kerne mit gerader Massenzahl kann das Ladungstriplett ^{10}Be, ^{10}B und ^{10}C dienen. Die Lage der Energieniveaus für diese

Abb. 5. Energieniveauschema der Spiegelkerne $^7_3$Li und $^7_4$Be
Die Energie ist in MeV angegeben

Abb. 6. Energieniveauschema der isobaren Kerne ^{10}Be, ^{10}B und ^{10}C
Die Energie ist in MeV angegeben

Kerne ist in Abb. 6 dargestellt. Der Grundzustand und der erste angeregte Zustand des ^{10}B besitzen den Isospin $T = 0$. Die Grundzustände des ^{10}Be und des ^{10}C sowie der zweite angeregte Zustand des ^{10}B bilden ein Ladungstriplett mit dem totalen Isospin $T = 1$. Der Gesamtdrehimpuls dieser Kerne ist in diesen Fällen gleich Null, die Zustände besitzen gerade Parität. Für die Spiegelkerne ^{10}Be ($T_3 = -1$) und ^{10}C ($T_3 = 1$) können keine Zustände mit $T = 0$ existieren, da $|T_3| \leqq T$ ist. Die Anordnung der Energieniveaus, die in der Abb. 6 gezeigt wird, ist charakteristisch für Kerne mit gerader Massenzahl. Dabei haben Kerne mit gleicher Protonen- und Neutronenzahl ($T_3 = 0$) die größte Zahl von Energieniveaus. Weniger vielfältig sind die Energieniveaus der Kerne mit $T_3 = \pm 1$, und eine noch kleinere Vielfältigkeit finden wir bei $T_3 = \pm 2$ usw. Spiegelkerne, d. h. Kerne mit dem gleichen Absolutwert T_3, besitzen ähnliche Energieniveaus.

Eine charakteristische Eigenschaft der Kerne mit geradem A besteht in der Möglichkeit, sie in Dreiergruppen zusammenzufassen (Ladungstripletts). Beispiele für solche Kerne sind ^{6}Li, ^{6}He, ^{6}Be (der Kern ^{6}Be ist instabil); ^{8}B, ^{8}Li, ^{8}Be; ^{12}B, ^{12}C, ^{12}N; ^{14}C, ^{14}N, ^{14}O u. a. Die kleine Abweichung zwischen den Energieniveaus der Kerne eines Ladungsmultipletts erklärt sich aus der Coulomb-Wechselwirkung und dem Massenunterschied zwischen Proton und Neutron. Der Massenunterschied zwischen Proton und Neutron beträgt $\approx 1{,}3$ MeV und verschiebt Niveaus mit kleinerem T_3 (d. h. mit größerer

Neutronenzahl) nach oben. Beide Effekte wirken also in entgegengesetzter Richtung. Der Gesamteffekt bestimmt die Stabilität isobarer Kerne bezüglich $\beta^{\pm}$-Zerfall. Ohne Berücksichtigung der COULOMB-Wechselwirkung und des Massenunterschiedes zwischen Proton und Neutron muß zwischen Kernen mit gerader Massenzahl der isobare Kern mit $T_3 = 0$ (gleiche Neutronen- und Protonenzahl) der stabilste sein. Ist die Massenzahl ungerade, so gilt das gleiche für die isobaren Kerne mit $T_3 = \pm {}^1/_2$. Die Berücksichtigung von COULOMB-Wechselwirkung und Massenunterschied verändert diese Sachlage.

Bei sehr leichten Kernen überwiegt der Effekt, der den Massenunterschied zwischen Neutron und Proton zum Inhalt hat. So ist z. B. der Kern ^{3}He stabil, während ^{3}H instabil ist. Der Kern ^{3}H emittiert ein Elektron und geht in ^{3}He über. In leichten und mittleren Kernen überwiegt die COULOMB-Wechselwirkung. Für Kerne mit $A > 30$ sind Isobare mit negativem T_3 stabiler. Bei weiterer Zunahme der Massenzahl A vergrößert sich der Einfluß der COULOMB-Wechselwirkung immer mehr. Daher sind Kerne mit großem Neutronenüberschuß (negativem T_3) stabiler. Auf Grund dieser Tatsache wird die Verwendung des Isospins für mittelschwere Kerne nicht mehr vorteilhaft. Für leichte Kerne, in denen die COULOMB-Wechselwirkung im wesentlichen durch den Massenunterschied zwischen Neutron und Proton kompensiert wird, kann man mit Hilfe des Isospins die Energieniveaus von isobaren Kernen vergleichen und auf diese Weise sehr gute qualitative Schlüsse über die richtige Systematik der Niveaus ziehen.

KAPITEL 4

DIE MODELLVORSTELLUNGEN VOM KERNBAU

4.1. Schalenmodell des Kerns

Wegen der starken Wechselwirkung zwischen den Nukleonen im Kern kann man nur von den Zuständen des Kerns als Ganzem, nicht aber von den Zuständen eines einzelnen Nukleons sprechen. Eine solche Betrachtung ist jedoch z. Z. noch nicht durchführbar, so daß man bei der Untersuchung der Energiezustände der Kerne zu Näherungsmethoden greifen muß.

Bei der Näherungsbetrachtung der niedrigsten Energiezustände der Kerne geht man gewöhnlich von der Vorstellung aus, daß die Nukleonen in „Schalen" angeordnet sind, die ihre Gestalt und ihre Größe verändern können.

Der Schalenbegriff ist der Atomtheorie entliehen worden. Bekanntlich kann man eine ganze Reihe von Eigenschaften der Atome beschreiben, wenn man annimmt, daß sich jedes Elektron in einem mittleren Feld bewegt, das vom Atomkern und von den restlichen Elektronen erzeugt wird („self-consistent field" nach HARTREE-FOCK). Im Grundzustand des Atoms nehmen die Elektronen die niedrigsten der möglichen Energiezustände in diesem Feld ein. Zustände mit einem oder mehreren Werten des Drehimpulses l, die sich durch die m_l-Werte unterscheiden und angenähert die gleiche Energie besitzen, bilden eine „Elektronenschale". Die Atome, bei denen die Elektronen eine oder mehrere Schalen vollständig besetzen, sind am stabilsten. Es sind dies die Atome der Edelgase, die 2, 10, 18, 36, 54 bzw. 86 Elektronen besitzen. Mit zunehmender Kernladungszahl Z, d. h. wachsender Zahl der Elektronen im Atom, werden nach und nach die einzelnen Schalen aufgefüllt. In Tab. 7 sind die verschiedenen Schalen angegeben.

Tabelle 7

Die Elektronenschalen der Atome

Bezeichnung des Niveaus	Zahl der Elektronen in der Schale	Gesamtzahl der Elektronen im Atom	Element, das der vollbesetzten Schale entspricht
$1s$	2	2	Helium
$2s, 2p$	8	10	Neon
$3s, 3p$	8	18	Argon
$4s, 3d, 4p$	18	36	Krypton
$5s, 4d, 5p$	18	54	Xenon
$6s, 4f, 5d, 6p$.	32	86	Radon
$7s, 6d, 5f$			

In den letzten Jahren wurde festgestellt, daß auch Kerne mit bestimmten Neutronen- und Protonenzahlen besonders stabil sind. So z. B. die Kerne ${}^{4}_{2}He$, ${}^{16}_{8}O$, ${}^{40}_{20}Ca$ und ${}^{208}_{82}Pb$.

Die Protonen- und Neutronenzahlen 2, 8, 20, 50, 82 und 126, die den stabilsten Kernen entsprechen, werden als *magische Zahlen* bezeichnet. Die oben angeführten Kerne besitzen sowohl eine magische Neutronenzahl wie auch eine magische Protonenzahl. Man nennt sie deshalb *doppeltmagisch.* Nach dem Schalenbild des Kerns zeigen die magischen Zahlen, bei welcher Nukleonenzahl die Kernschalen besetzt sind.

Zur Erklärung der Schalenstruktur des Kerns muß man annehmen, daß sich die einzelnen Nukleonen des Kerns im „mittleren" Feld der umgebenden Nukleonen bewegen. Dieses gemittelte Feld ist so beschaffen, daß die auf ein Nukleon wirkende resultierende Kraft vorwiegend an der Kernoberfläche verschieden von Null ist.

Da das mittlere Feld durch viele Nukleonen hervorgerufen wird, sind seine Veränderungen mit den kollektiven Bewegungen der Nukleonen verknüpft. Im Falle des Atoms spielt die Anziehungskraft des Kerns die Hauptrolle bei der Bildung des mittleren Feldes. Wegen der großen Kernmasse (im Vergleich zur Elektronenmasse) kann man hierbei die Lage des Kerns als fixiert und das mittlere Feld als relativ stabil ansehen. In den Kernen gibt es kein solches stabilisierendes Zentrum. Deshalb sind die mit der kollektiven Bewegung der Nukleonen verbundenen Veränderungen des Feldes wesentlicher.

Wegen der geringen Kompressibilität der Kernmaterie kann man ihre Dichte als konstant annehmen. In dieser Näherung hat man unter kollektiven Bewegungen nur Deformationen des Kerns ohne Änderung des Volumens zu verstehen. So entstand die Vorstellung, daß man den Kern als deformierbares System [4,1] und seine Gestalt sowie seine Orientierung im Raum als dynamische Variable betrachten kann.

Bei der Untersuchung der Energiezustände von Kernen benutzt man meist eine adiabatische Näherung, d. h., man nimmt an, daß die Bewegung der einzelnen Nukleonen bedeutend schneller erfolgt als die mit den Formänderungen des Kerns verknüpfte. Um die Energiezustände bestimmen zu können, betrachtet man die Gestalt des Kerns in erster Näherung als fixiert. Die Gesamtenergie des Kerns setzt sich aus der Energie der einzelnen Nukleonen, die sich im mittleren Kernfeld bewegen, zusammen und hängt von der Kerngestalt wie von einem Parameter ab. Man kann sie als potentielle Energie betrachten, welche die Gesetze der Gestaltsänderung des Kerns bestimmt. Dem Minimalwert der Energie entspricht die Gleichgewichtsform des Grundzustandes des Kerns.

In gewissem Sinn ist die Dynamik des Kerns analog der Dynamik der Moleküle, bei denen eine Wechselwirkung zwischen der Elektronenbewegung und den Schwingungen und Rotationen des Moleküls als Ganzem vor sich geht.

In erster Näherung kann man das mittlere Kernfeld als zeitlich konstant ansehen und die Bewegung der Nukleonen in diesem Feld untersuchen. Diese Näherung wird *Schalenmodell des Kerns* oder *Einzelteilchenmodell*

genannt. Für Kerne mit Kugelgestalt ist das mittlere Kernfeld kugelsymmetrisch.

Um auf der Grundlage der Schalenstrukturhypothese die Kerneigenschaften theoretisch zu interpretieren, untersucht man die Bewegung eines einzelnen Teilchens in einem Potentialfeld mit verschiedener Abhängigkeit vom Radius. Für die leichten Kerne wird das Potential meist durch eine Parabel (Oszillatorpotential) approximiert, für die schweren Kerne durch einen rechteckigen Potentialtopf.

Da das mittlere Feld Kugelsymmetrie besitzt, kann man die Zustände eines einzelnen Nukleons im Kern durch den Bahndrehimpuls charakterisieren. Zur Bezeichnung der Zustände mit unterschiedlichen l-Werten ($l = 0, 1, 2, \ldots$) werden die kleinen lateinischen Buchstaben s, p, d, f, g, ... verwendet. Die Nukleonen besitzen den Spin $^1/_2$. Nukleonen in Zuständen mit dem Bahndrehimpuls l besitzen deshalb den Gesamtdrehimpuls $j = l \pm {}^1/_2$. Der Wert des Gesamtdrehimpulses j wird durch einen Index an dem lateinischen Buchstaben angezeigt, der den l-Wert angibt. Im Kern sind also Nukleonenzustände folgender Art möglich: $s_{1/2}$, $p_{1/2}$, $p_{3/2}$, $d_{3/2}$, $d_{5/2}$ usw.

Wie das Experiment zeigt, spielen im Kern die Spin-Bahn-Wechselwirkungen eine große Rolle. Sie liefern etwa 10% der gesamten Wechselwirkungsenergie. Da sich die Nukleonen in einem mittleren Feld bewegen, das kugelsymmetrisch ist, ergeben die in Abschn. 3.2. betrachteten Tensorkräfte keinen Beitrag zur Wechselwirkungsenergie.

Wie im Anhang 3.4. gezeigt ist, wird die Energie der Spin-Bahn-Wechselwirkung der Nukleonen im Kern bis auf einen konstanten Faktor durch die nichtrelativistische Näherung der Dirac-Gleichung bestimmt. Wir geben hier eine elementare Ableitung für die Energie der Spin-Bahn-Wechselwirkung, die wir dem Buch von Heisenberg [4,2] entnommen haben.

Wir betrachten die Wechselwirkung eines Teilchens, das sich mit dem Impuls $\mathfrak{p}$ bewegt und das magnetische Moment $\vec{\mu} = \vec{\sigma}\, e\, \hbar/2Mc$ besitzt, mit dem elektrostatischen Feld $\varphi = V_{\mathrm{Coul}}/e$. In dem Koordinatensystem, das mit dem bewegten Teilchen verbunden ist, entsteht ein Magnetfeld $\mathfrak{H}$, das durch das elektrische Feld $\mathfrak{E} = -\frac{1}{e}\,\mathrm{grad}\, V_{\mathrm{Coul}}$ hervorgerufen wird:

$$\mathfrak{H} = -\frac{1}{Mc}[\mathfrak{p}\,\mathfrak{E}] = +\frac{1}{eMc}[\mathfrak{p}\,\mathrm{grad}\, V_{\mathrm{Coul}}].$$

Die Energie der Wechselwirkung zwischen dem magnetischen Moment $\vec{\mu}$ und dem elektrostatischen Feld wird deshalb durch den Operator

$$\hat{W}_{\mathrm{em}} = -\vec{\mu}\,\mathfrak{H} = -\frac{\hbar}{2M^2c^2}\vec{\sigma}\,[\hat{\mathfrak{p}}\,\mathrm{grad}\, V_{\mathrm{Coul}}] \tag{4.1.1}$$

bestimmt. In Analogie zu (4.1.1) wird der Operator der Spin-Bahn-Wechselwirkung des Nukleons im Feld der Kernkräfte in der Form

$$\hat{W}_{\mathrm{k}} = a\,\vec{\sigma}\,[\mathfrak{p}\,\mathrm{grad}\, V] \tag{4.1.2}$$

gewählt, wobei die Konstante a aus dem Experiment bestimmt werden muß. Man kann sich leicht davon überzeugen, daß (4.1.2) den einzigen skala-

ren Ausdruck darstellt, den man aus dem axialen Vektor $\vec{\sigma}$, dem Impuls $\mathfrak{p}$ und der potentiellen Energie V erhalten kann. Da es im homogenen Feld keine bevorzugten Richtungen gibt, ist klar, daß in (4.1.2) der Gradient der potentiellen Energie eingehen muß.

Für ein Potential mit Kugelsymmetrie gilt

$$\operatorname{grad} V = \frac{\mathfrak{r}}{r} \frac{\partial V}{\partial r}.$$

Wird weiterhin berücksichtigt, daß $[\mathfrak{r}, \hat{\mathfrak{p}}] = \hbar \hat{\mathfrak{l}}$ ist, so kann man den Operator der Spin-Bahn-Wechselwirkung in der Form

$$\hat{W}(r) = -a \, \mathfrak{l} \vec{\sigma} \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} \tag{4.1.3}$$

schreiben, wobei a, wie bereits erwähnt, eine Konstante ist, die man aus dem Experiment bestimmen muß. Gewöhnlich setzt man

$$a = \gamma \frac{\hbar^2}{4M^2 c^2} \approx \gamma \cdot 0{,}11 \cdot 10^{-27} \ [\mathrm{cm}^2], \tag{4.1.3a}$$

wobei γ ungefähr den Wert 30 besitzt. So hat z. B. LEVINTOV [4,3] auf Grund einer Analyse experimenteller Daten über die Nukleonenpolarisation bei der Streuung an Kernen und der Daten über die Einteilchenniveaus der Kerne mit einem Nukleon über den abgeschlossenen Schalen ^{5}He, ^{5}Li, ^{17}O, ^{17}F, ^{209}Pb gezeigt, daß alle diese Effekte relativ gut beschrieben werden können, wenn man für die Konstante der Spin-Bahn-Kopplung den Wert $a = 3{,}5 \cdot 10^{-27}$ cm^2 annimmt.

Außer der Spin-Bahn-Wechselwirkung, die durch das Kernpotential hervorgerufen wird, tritt auch noch die gewöhnliche THOMSONsche Wechselwirkung des magnetischen Moments des Nukleons mit dem elektrostatischen Potential des Kerns auf. Diese Wechselwirkung kann ebenso wie (4.1.1) berechnet werden, wenn man berücksichtigt, daß der Operator des magnetischen Moments des Nukleons die Form

$$\vec{\mu} = \frac{e\hbar}{2Mc} \mu_{\mathrm{Nuk}} \vec{\sigma}$$

besitzt, wobei μ_{Nuk} das magnetische Moment des Nukleons in Einheiten des Kernmagnetons ist. Der Operator für die Wechselwirkung des magnetischen Moments des Nukleons mit dem elektrostatischen Feld des Kerns nimmt dann folgende Form an:

$$\hat{W}_{\mathrm{Coul}} = \mu_{\mathrm{Nuk}} \frac{\hbar^2}{2M^2 c^2} \vec{\sigma} \, \hat{\mathfrak{l}} \frac{1}{r} \frac{\partial V_{\mathrm{Coul}}}{\partial r}.$$

Der Operator der Spin-Bahn-Wechselwirkung zwischen Nukleon und Kern besitzt demnach im allgemeinen Fall die Form

$$\hat{W} = -\frac{\hbar^2}{2M^2 c^2} \left(\gamma \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} - \mu_{\mathrm{Nuk}} \frac{1}{r} \frac{\partial V_{\mathrm{Coul}}}{\partial r} \right) \vec{\sigma} \, \hat{\mathfrak{l}}. \tag{4.1.4}$$

Da die Kernwechselwirkung mit r wächst (dem absoluten Betrag nach abnimmt) und die COULOMB-Wechselwirkung abnimmt, besitzen für Protonen

($\mu_{\mathrm{Nuk}} > 0$) die Summanden in der Klammer von (4.1.4) gleiches und für Neutronen ($\mu_{\mathrm{Nuk}} < 0$) entgegengesetztes Vorzeichen. Innerhalb des Kerns gilt

$$\left|\frac{dV}{dr}\right| \gg \left|\frac{dV_{\mathrm{Coul}}}{\partial r}\right|,$$

so daß man die von der Wechselwirkung des magnetischen Moments des Nukleons mit dem elektrostatischen Feld des Kerns herrührende Spin-Bahn-Kopplung vernachlässigen kann.

Unter Berücksichtigung der Beziehungen $2\hat{\mathfrak{l}}\,\hat{\mathfrak{s}} = \hat{\mathfrak{j}}^2 - \hat{\mathfrak{l}}^2 - \hat{\mathfrak{s}}^2$, $\hat{\mathfrak{s}} = {}^1/_2\vec{\sigma}$ bestimmen wir aus (4.1.3) die Mittelwerte der Energie der Spin-Bahn-Kopplung für Zustände, die durch den Wert $j = l \pm {}^1/_2$ des Gesamtdrehimpulses des Nukleons charakterisiert werden. Es ergibt sich

$$\langle \hat{W} \rangle_j = \begin{cases} -a\,l \left\langle \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} \right\rangle_j & \text{für } j = l + {}^1/_2, \\ a(l+1)\left\langle \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} \right\rangle_j & \text{für } j = l - {}^1/_2. \end{cases} \tag{4.1.5}$$

Hierbei ist $\left\langle \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} \right\rangle_j$ der Mittelwert des Operators $\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}$ in Zuständen mit der radialen Wellenfunktion $u_j(r)$. In dem einfachen Fall, daß das Potential V durch einen rechteckigen Potentialtopf der Tiefe $-D$ und der Reichweite R approximiert wird, kann man setzen

$$\frac{\partial V}{\partial r} = D\,\delta(r - R).$$

Dann wird

$$\left\langle \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} \right\rangle_j = R\,D u_j^2(R),$$

wobei $u_j(R)$ den Wert der radialen Wellenfunktion auf der Kernoberfläche bedeutet.

Die Berücksichtigung einer Spin-Bahn-Kopplung vom Typ (4.1.5) gibt die empirische Reihenfolge der Energieniveaus und die Werte der magischen Zahlen richtig wieder, wenn für a der in (4.1.3a) angeführte Wert benutzt wird.

Da das Potential $V(r)$ negativ ist und dem absoluten Betrag nach mit wachsendem r abnimmt, ist $\langle W \rangle_j$ für $j = l + {}^1/_2$ negativ und für $j = l - {}^1/_2$ positiv. Von den Zustandspaaren $p_{1/2}$ und $p_{3/2}$, $d_{3/2}$ und $d_{5/2}$ usw. besitzen also die Zustände mit dem größeren Wert des Gesamtdrehimpulses die kleinere Energie, d. h., $p_{3/2}$ liegt niedriger als $p_{1/2}$, $d_{5/2}$ liegt niedriger als $d_{3/2}$ usw. Die Abstände zwischen den Niveaus, die zu einem bestimmten l-Wert gehören, wachsen in dem Maße, in dem l größer wird.

Zum Unterschied von den Atomen spielt in den Kernen die Spin-Bahn-Wechselwirkung eine beträchtliche Rolle. Eine besonders große Spin-Bahn-Wechselwirkung wird bei den schweren Kernen beobachtet, wo sie dazu führt, daß sich der Spin und der Bahndrehimpuls jedes Teilchens zu einem Gesamtdrehimpuls j addieren und daß diese Gesamtdrehimpulse den Gesamtspin des Kerns bilden: $\mathfrak{J} = \sum_i \mathfrak{j}_i$. Man bezeichnet diese Art der Kopplung als *j j-Kopplung*.

Außer der jj-Kopplung gibt es noch die sogenannte RUSSELL-SAUNDERS- oder *LS-Kopplung.* Sie tritt besonders bei den leichten Atomen auf. Bei der RUSSELL-SAUNDERS-Kopplung addieren sich die Bahndrehimpulse aller Teilchen zum Gesamtbahndrehimpuls des Atoms $\mathfrak{L} = \sum_i \mathfrak{l}_i$ und die Spins zum Gesamtspin des Atoms $\mathfrak{S} = \sum_i \mathfrak{s}_i$. Den Gesamtdrehimpuls des Atoms erhält man durch Vektoraddition des Gesamtbahndrehimpulses und des Gesamtspins: $\mathfrak{J} = \mathfrak{L} + \mathfrak{S}$. Die RUSSELL-SAUNDERS-Kopplung der Drehimpulse ist dann möglich, wenn die Wechselwirkung zwischen den Bahndrehimpulsen und den Spins der einzelnen Teilchen groß, die Wechselwirkung zwischen den Gesamtdrehimpulsen $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{S}$ dagegen schwächer ist. Bei den schweren Atomen wird auch eine intermediäre Kopplung beobachtet.

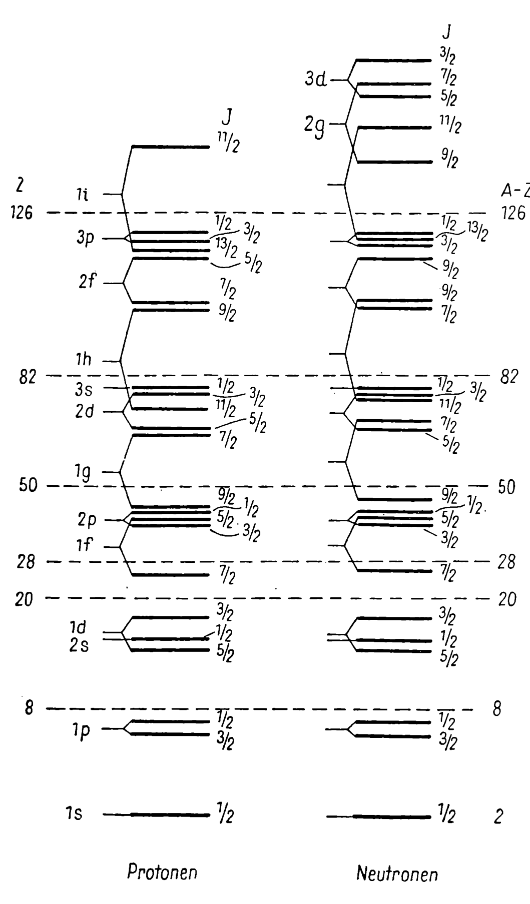


Abb. 7. Niveauschema der Neutronen und Protonen nach dem Schalenmodell [4,5]

In den sehr leichten Kernen herrscht anscheinend die LS-Kopplung vor. In der Mehrzahl der Fälle tritt jedoch eine intermediäre Kopplung auf, die mit wachsendem A mehr und mehr in die jj-Kopplung übergeht. Die intermediäre Kopplung erschwert die Interpretation der Nukleonenzustände in den Kernen beträchtlich, da man Superpositionen von Zuständen in die Betrachtung einführen muß, die gleiche Parität und wenig verschiedene Energiewerte besitzen. So zeigten z. B. ELLIOT und FLOWERS [4,4], daß man zur Erklärung der Eigenschaften der Kerne mit $A \approx 18 \cdots 19$ eine Konfigurationsmischung der beiden Schalen $2s$ und $1d$, die angenähert gleiche Energie besitzen, annehmen muß.

Der Zustand eines einzelnen Nukleons im Kern wird neben dem Gesamtdrehimpuls j und der Parität noch durch die Energie charakterisiert: Niveaus vom gleichen Typ werden mit wachsender Energie numeriert. So gibt es z. B. die Niveaus $1s$, $2s$, $3s$, ..., die Niveaus $1p_{1/2}$, $2p_{1/2}$ usw. Zum

Unterschied von der Klassifizierung der Energieniveaus der Atome, wo die vor der Termbezeichnung stehende Zahl n die Hauptquantenzahl darstellt und die Energie des Terms bestimmt, weist bei den Kernen die vor der Zustandsbezeichnung stehende Zahl nur auf die Reihenfolge in der Lage der Niveaus hin und besitzt keine andere Bedeutung. Bei den Atomen beginnt deshalb die Numerierung der s-Zustände bei 1, der p-Zustände bei 2, der d-Zustände bei 3 usw. In den Kernen werden dagegen alle Zustände von 1 an numeriert.

Der Zustand eines einzelnen Nukleons im Kern wird also nach dem Schalenmodell durch die Quantenzahlen n, l, j und m charakterisiert. Die Energie des Nukleons hängt nur von den Quantenzahlen n, l und j ab. Dieses Energieniveau ist $(2j + 1)$-fach entartet. Die Energieniveaus im Kern werden in Übereinstimmung mit dem PAULI-Prinzip durch Protonen und Neutronen aufgefüllt.

In Abb. 7 ist ein Niveauschema angeführt (nach KLINKENBERG [4,5]), aus dem deutlich zu sehen ist, wie die Schalenvorstellung entsteht.

Bei der quantitativen Beschreibung der Zustände eines Kerns mit der Massenzahl A wird im Schalenmodell eine Wellenfunktion Ψ benutzt, die aus Linearkombinationen von Produkten der Einzelteilchenwellenfunktionen gebildet wird. Die Funktionen der einzelnen Teilchen hängen dabei von den Ortskoordinaten sowie von den Spin- und Ladungskoordinaten ab. Die Raumkoordinaten $\mathfrak{r}_i$ werden vom Schwerpunkt des Kerns aus gemessen, d. h., es gilt

$$\mathfrak{r}_i = \vec{\varrho}_i - \frac{1}{A} \sum_{l=1}^{A} \vec{\varrho}_l, \tag{4.1.6}$$

wobei die $\vec{\varrho}_i$ die Koordinaten im ruhenden System sind. Aus (4.1.6) folgt

$$\sum_{i=1}^{A} \mathfrak{r}_i = 0. \tag{4.1.7}$$

Von den $3A$ Ortskoordinaten (4.1.6) sind somit nur $3A - 3$ unabhängig.

Der innere Zustand des Kerns wird nur durch diese unabhängigen Koordinaten beschrieben. Beim Schalenmodell wird jedoch die SCHRÖDINGER-Gleichung der Koordinatenfunktion $\Phi(\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_N)$ in der Form

$$\left\{\sum_{i=1}^{A} \left[-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2_{r_i} + V(\mathfrak{r}_i)\right] - E\right\} \Phi = 0 \tag{4.1.8}$$

geschrieben, wobei $V(\mathfrak{r}_i)$ das effektive Potential bedeutet, das auf das i-te Nukleon wirkt. Die Rechnung wird so geführt, als wären alle $\mathfrak{r}_i$ unabhängig.

Wenn man die Kräfte der Paarwechselwirkung durch ein Oszillatorpotential darstellen kann, d. h., wenn

$$V = \frac{\alpha}{2} \sum_{i,j} (\vec{\varrho}_i - \vec{\varrho}_j)^2$$

gilt, so läßt sich zeigen, daß man die Wellenfunktionen und Energien der inneren Bewegung durch Lösen der Gleichung

$$\left\{\sum_{i=1}^{A} \left[-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2_{r_i} + A\,\alpha\,\mathfrak{r}_i^2\right] - E\right\} \Phi = 0 \tag{4.1.9}$$

finden kann, wobei die Wellenfunktion der zusätzlichen Bedingung

$$\sum_{i=1}^{A} \nabla_{r_i} \Phi = 0 \tag{4.1.10}$$

genügen muß. Die $\mathfrak{r}_i$ sind durch (4.1.6) definiert. Mit den Bedingungen (4.1.10) und (4.1.7) erhalten wir

$$\sum_{i=1}^{A} \nabla_{\varrho_i}^2 \Phi = \sum_{i=1}^{A} \nabla_{r_i}^2 \Phi, \quad \frac{1}{2} \sum_{i,j}^{A} (\vec{\varrho}_i - \vec{\varrho}_j)^2 = A \sum_{i=1}^{A} \mathfrak{r}_i^2.$$

Man kann hoffen, daß auch im allgemeinen Fall, wenn die Wechselwirkung zwischen den Nukleonen angenähert als Summe der Wechselwirkungen jedes der Nukleonen mit einem effektiven Potential $V(r_i)$ dargestellt werden kann, die Bewegung des Schwerpunkts durch die Zusatzbedingung (4.1.10) ausgeschlossen wird. Mit der Bedingung (4.1.10), die Lösungen ausschließt, die einer Bewegung des Kerns als Ganzem entsprechen, verlieren wir jedoch die Möglichkeit, die Funktion Φ als Produkt der Wellenfunktionen von einzelnen Nukleonen darzustellen, was besonders im Schalenmodell sehr verlockend ist. Deshalb wird gewöhnlich die Bedingung (4.1.7) bzw. die äquivalente Bedingung (4.1.10) nicht berücksichtigt. Eine solche Vereinfachung kann natürlich zu falschen Zuständen führen, die keiner inneren Bewegung der Nukleonen entsprechen (siehe z. B. [4,6]).

Wir untersuchen nun die Klassifizierung der Zustände von Nukleonensystemen im Schalenmodell, wobei wir die Bedingung (4.1.7) nicht berücksichtigen wollen. Viele Kerneigenschaften (Spin, magnetisches Moment, Wahrscheinlichkeiten von Einzelteilchenübergängen u. a.) hängen im wesentlichen vom Bewegungszustand der Nukleonen ab, die sich in unaufgefüllten Schalen befinden. Betrachtet man nur die Bewegung dieser Nukleonen, die untereinander und mit dem mittleren effektiven Feld der Nukleonen der besetzten Schalen in Wechselwirkung stehen, so steht die Frage einer Abtrennung der Schwerpunktbewegung nicht mehr so stark im Vordergrund, ebenso wie in der Atomtheorie, wo die Bewegung der Elektronen bei Anwesenheit des Atomkerns untersucht wird.

Wir nehmen an, daß der Gesamtisospin des Kerns (T) eine gute Quantenzahl[1]) ist und daß die Klassifizierung der Zustände der einzelnen Nukleonen nach dem Schema der jj-Kopplung erfolgt. Unsere Überlegungen beziehen sich also nicht auf die schweren Kerne (bei denen T keine gute Quantenzahl mehr ist) und auch nicht auf die sehr leichten Kerne (bei denen die jj-Kopplung nicht erfüllt ist).

Der Zustand eines einzelnen Nukleons im Kern möge durch die Wellenfunktion

$$\varphi_{nljm}(x_i)\, \omega_\mu(\tau_i) \tag{4.1.11}$$

beschrieben werden, wobei x_i die Raum- und Spinkoordinaten des i-ten Nukleons, τ_i die Ladungsvariable und l, j, m, μ die Quantenzahlen des Bahn-

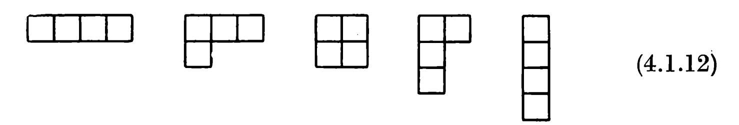
[1]) Eine Quantenzahl wird als „gut" bezeichnet, wenn sie physikalische Größen charakterisiert, die nur in bestimmter Näherung als Bewegungsintegrale aufgefaßt werden können.

drehimpulses, des Gesamtdrehimpulses, der Projektion des Gesamtdrehimpulses auf die z-Achse bzw. der Projektion des Isospins auf die dritte Achse des Ladungsraums sind. Nukleonen, die sich in Zuständen mit den gleichen Quantenzahlen n, l und j befinden, nennt man *äquivalente Nukleonen.*

Der Zustand von N äquivalenten Nukleonen wird durch Wellenfunktionen beschrieben, die antisymmetrisch gegen Vertauschung zweier beliebiger Teilchen sein müssen. Diese Wellenfunktionen sind Linearkombinationen von Produkten aus N Wellenfunktionen der Art (4.1.11).

Zur Aufstellung der Wellenfunktion Ψ ist es vorteilhaft, die YOUNGschen Schemata zu benutzen (s. [4,7], § 61). Dazu stellen wir Ψ als Produkt der Funktionen Φ und Ω dar, wobei Φ eine Linearkombination von Produkten der N Funktionen $\varphi_{m_i}(x_i)$ ist, die einem bestimmten YOUNGschen Schema, d. h. einem bestimmten Symmetrietyp bezüglich der Vertauschung der Orts- und Spinkoordinaten der N Teilchen, entspricht. Ω bezeichnet eine Funktion, die analog aus den Funktionen $\omega_{\mu_i}(\tau_i)$ aufgebaut wird.

Die YOUNGschen Schemata für eine Wellenfunktion von N Variablen werden durch die Aufspaltung der Zahl N in alle möglichen Kombinationen von Summanden N_1, N_2, ... ($N = N_1 + N_2 + \ldots$) bestimmt. Eine solche Aufspaltung wird anschaulich durch Zeilen dargestellt [s. (4.1.12)], in denen die Zahl der Kästchen jeweils gleich den Zahlen N_1, N_2, ... ist. Die Wellenfunktionen, die einem bestimmten YOUNGschen Schema entsprechen, erhält man durch Symmetrisierung nach den Variablen jeder Zeile und durch Antisymmetrisierung nach den Variablen jeder Kolonne. Für $N = 4$ besitzen die YOUNGschen Schemata z. B. die Form



(4.1.12)

Als Kurzbezeichnung der YOUNGschen Schemata werden eckige Klammern benutzt, in denen nacheinander die Zahlen der Kästchen jeder Zeile des YOUNGschen Schemas angegeben sind. In unserem Beispiel mit $N = 4$ hat man also

$$[4],\ [3,1],\ [2,2],\ [2,1,1],\ [1,1,1,1]. \tag{4.1.12a}$$

Da die Isospinvariable nur die beiden Werte $\pm {}^1/_2$ annehmen kann, ist die Funktion Ω in nicht mehr als 2 Variablen antisymmetrisch. Die Funktionen Ω können deshalb nur eine oder zwei Zeilen enthalten. Hat man z. B. 4 Nukleonen, so können diese Funktionen nur den Schemata

$$\Omega_a \triangleq [4], \qquad \Omega_b \triangleq [3,1], \qquad \Omega_c \triangleq [2,2]$$

entsprechen. Da die Gesamtwellenfunktion Ψ antisymmetrisch gegen Vertauschung von zwei beliebigen Teilchen sein muß, hat man die YOUNGschen Schemata der Funktionen Φ aus denen der entsprechenden Funktionen Ω durch Transposition, d. h. durch Vertauschung von Spalten und Zeilen, her-

zustellen. Die YOUNGschen Schemata der Funktionen Φ können deshalb höchstens aus 2 Kolonnen bestehen. Bei 4 Nukleonen sind das die Funktionen

$$\Phi_a \triangleq [1,1,1,1], \qquad \Phi_b \triangleq [2,1,1], \qquad \Phi_c \triangleq [2,2]. \qquad (4.1.13)$$

Man kann zeigen, daß jedes der YOUNGschen Schemata der Isospinwellenfunktion einem bestimmten Isospinwert des Nukleonensystems entspricht. Die Funktionen (4.1.13) stellen z. B. Zustände mit den Isospins 2, 1 und 0 dar. Die Klassifizierung von Zuständen entsprechend den YOUNGschen Schemata ist somit äquivalent der Klassifizierung von Zuständen nach dem Isospin des Kerns.

Wenn die Wellenfunktionen φ Zustände von Nukleonen mit dem Drehimpuls j beschreiben, so dürfen die entsprechenden YOUNGschen Schemata für die Funktionen Φ nicht mehr als $2j + 1$ Zeilen enthalten. So wird z. B. ein System aus 4 Nukleonen, die sich im $s_{1/2}$- und $p_{1/2}$-Zustand befinden, durch die Funktionen

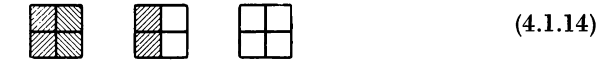
$$\Phi_c\, \Omega_c \triangleq [2,2]\,[2,2]$$

beschrieben. Sie entsprechen den Werten $J = 0$ und $T = 0$. Für 2 Nukleonen im Zustand $j = 1/2$ besitzen die Wellenfunktionen die Form

$$\Phi_a\, \Omega_a \triangleq [1,1]\,[2] \quad \text{und} \quad \Phi_b\, \Omega_b \triangleq [2]\,[1,1].$$

Dies entspricht Zuständen mit $J = 0$, $T = 1$ bzw. $J = 1$, $T = 0$.

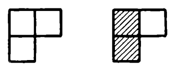
Wenn $j \geqq 3/2$ ist und die Zahl der äquivalenten Nukleonen den Wert 3 überschreitet, so entsprechen im allgemeinen Fall gleichen Werten von J, M_J, T, M_T mehrere verschiedene Zustände. Zu ihrer Unterscheidung führt man zwei zusätzliche Quantenzahlen ein: die *„Seniorität"* (s) und den *„reduzierten Isospin"* (t). Diese Zahlen bestimmen das Verhalten der Wellenfunktionen von N Teilchen gegen symplektische Transformationen. Bei den symplektischen Transformationen bleiben die Wellenfunktionen von Nukleonenpaaren mit dem Gesamtspin Null unverändert. Die Wellenfunktion eines solchen Paares kann nur einem Kästchenpaar mit den Werten $\pm m_i$ aus einer Kolonne der YOUNGschen Schemata entsprechen. Die Seniorität (s) und der reduzierte Isospin (t) unterscheiden die Wellenfunktionen Φ, die zu einem bestimmten YOUNGschen Schema $[i, k, \ldots]$ gehören, nach der Zahl der Kästchenpaare mit Projektionen m_i und $-m_i$. So kann man z. B. die Wellenfunktionen, die durch das YOUNGsche Schema [2,2] dargestellt werden, dadurch unterteilen, daß man das Schema [2,2] nach allen möglichen Kombinationen von Kästchenpaaren [in (4.1.14) sind sie verschieden schraffiert dargestellt] aufteilt, wobei jedem Kästchenpaar Teilchen mit den Projektionen m und $-m$ entsprechen:



(4.1.14)

Diese Kombinationen werden vollständig durch die Angabe der Seniorität (s) und des reduzierten Isospins (t) charakterisiert. Der Ausdruck $1/2\, s \pm t$ gibt bei Kenntnis der beiden Quantenzahlen die Anzahl der nichtschraffierten

Kästchen in den beiden möglichen Kolonnen des YOUNGschen Schemas der Funktion Φ. Den Wert der Seniorität und des reduzierten Isospins bezeichnet man gewöhnlich mit runden Klammern: (s, t). So hat man z. B. für die YOUNGschen Schemata (4.1.14) die Bezeichnung (0,0), (2,1) und (4,0). Die Werte s und t für die YOUNGschen Schemata



sind $(3,{}^1/_2)$, $(1,{}^1/_2)$.

Dem YOUNGschen Schema [2,2] mit vier äquivalenten Nukleonen ($j = {}^3/_2$) entsprechen die vier verschiedenen Zustände $(j^4_{3/2};\ 0,0,0,0)$, $(j^4_{3/2};\ 0,2,2,1)$, $(j^4_{3/2};\ 0,2,4,0)$, $(j^4_{3/2};\ 0,4,4,0)$. Zur Darstellung dieser Zustände benutzten wir die Kurzbezeichnung $(j^4_{3/2};\ T,\ J,\ s,\ t)$.

Bei vorgegebenem Wert von T und J besitzt das Niveau mit der kleinsten Senioritätszahl die niedrigste Energie. Der niedrigste Energiezustand $(j^4_{3/2};\ 0,2,2,1)$ liegt folglich unter den möglichen Zuständen $(j^4_{3/2};\ 0,2,4,0)$.

Näheres über die Klassifizierung der Zustände von äquivalenten Nukleonen im Schalenmodell mit $j\,j$-Kopplung findet man in den Arbeiten von FLOWERS, EDMONDS [4,8] und NEUDATSCHIN [4,9].

4.2. Magnetische Momente und „Konfiguration“ der leichten Kerne nach dem Schalenmodell

Das Schalenmodell des Kerns gestattet, vom Zustand jedes einzelnen Nukleons im Kern zu sprechen. Wenn die Zustände aller Nukleonen des Kerns bekannt sind, so wollen wir sagen, daß uns die „Konfiguration“ des Atomkerns aus den Zuständen der einzelnen Nukleonen bekannt ist. Die „Konfiguration“ vieler leichter Kerne, d. h. die Gesamtheit der Quantenzahlen der einzelnen Nukleonen, ergibt sich fast eindeutig aus den experimentellen Daten über die magnetischen Momente und die elektrischen Quadrupolmomente der Kerne.[1]

Da eine Berechnung der möglichen Nukleonenzustände im Kern gegenwärtig praktisch nicht ausführbar ist, muß man zu einer phänomenologischen Beschreibung greifen, die auf den experimentellen Daten beruht. Bei Kernen mit einer magischen Protonen- und Neutronenzahl sind die Schalen voll besetzt. Spin, magnetisches Dipolmoment und elektrisches Quadrupolmoment solcher Kerne sind Null. Fügt man zu einem derartigen Kern ein Nukleon hinzu, so ist sein Gesamtdrehimpuls (angenähert) gleich dem Drehimpuls dieses Nukleons: $J = j$. Fehlt ein Nukleon in der Schale, so wird der Spin des Kerns ebenfalls durch den Spin dieses fehlenden Nukleons, d. h. durch den Drehimpuls des „Loches“ in der gefüllten Schale, bestimmt.

---

[1]) Die Struktur der leichten Kerne wird auch aus der Winkelverteilung der Nukleonen beim Strippingprozeß (vgl. Abschn. 14.3.), aus der direkten Wechselwirkung der Nukleonen mit Kernen (Abschn. 14.1.), aus der Wechselwirkung von γ-Quanten mit Kernen (Kap. 11) und anderen Experimenten bestimmt.

Befinden sich außerhalb der geschlossenen Schale 2 Nukleonen, so hängt die Energie des Kerns von der gegenseitigen Orientierung der Drehimpulse dieser beiden Nukleonen ab. Diese Abhängigkeit kann dadurch berücksichtigt werden, daß man eine phänomenologische Wechselwirkung $W = c\, \mathfrak{j}_1\, \mathfrak{j}_2$ einführt. Betrag und Vorzeichen der Konstanten c hängen dabei vom Typ der in Wechselwirkung stehenden Nukleonen ab. Das Experiment zeigt, daß alle Kerne mit gerader Protonenzahl und ungerader Neutronenzahl den Gesamtdrehimpuls und das magnetische Moment Null besitzen. Deshalb entspricht das Minimum von W antiparallelen Drehimpulsen der Nukleonen, d. h., man muß annehmen, daß c_{nn} und c_{pp} größer als 0 sind. Der Zusammenhang zwischen den Drehimpulsen eines Neutrons und eines Protons (c_{np}) begünstigt anscheinend eine parallele Orientierung, da bei allen bekannten stabilen uu-Kernen der Spin verschieden von Null ist. So besitzen z. B. die Kerne $^2_1$H, $^6_3$Li und $^{14}_7$N den Spin 1, der Kern $^{10}_5$B den Spin 3.

Da alle gg-Kerne den Spin 0 haben, sind in grober Näherung die Zustände der gu- und der ug-Kerne[1]) mit dem Zustand des letzten ungeraden Nukleons, das sich im Zentralfeld des gg-Kerns bewegt, identisch. Ein solches Modell wird zur Berechnung der elektrischen Quadrupolmomente und der magnetischen Dipolmomente der Kerne benutzt. Umgekehrt kann man aus den Angaben über Spin, magnetisches Moment und elektrisches Quadrupolmoment Rückschlüsse auf die Struktur des Kerns ziehen. In diesem Modell wird die Wellenfunktion des Kerns in der Form

$$\Psi_{jm} = \Phi_0\, \Psi_{nljm} \tag{4.2.1}$$

geschrieben, wobei Ψ_{nljm} die Wellenfunktion des letzten unpaaren Nukleons und Φ_0 die Wellenfunktion aller übrigen Nukleonen darstellt. Die Wellenfunktion des einzelnen Nukleons kann man in der Form

$$\Psi_{nljm} = \sum_{\sigma=-1/2}^{1/2} (l\, {}^1/_2,\, m-\sigma,\, \sigma \mid j\, m)\, \chi_\sigma\, f_{nl}(r)\, Y_{l,\, m-\sigma}$$

schreiben, wobei die $(l\, {}^1/_2,\, m-\sigma,\, \sigma \mid j\, m)$ die Vektoradditionskoeffizienten sind (s. Anhang 1.2.). Weiter bedeuten χ_σ die Spinwellenfunktion, $f_{nl}\,(r)$ die radiale Wellenfunktion, deren Wert durch die Wahl des Potentials bestimmt wird, und Y_{lm} Kugelfunktionen. Jedem Wert von j (außer $j = {}^1/_2$) entsprechen 2 Werte des Bahndrehimpulses $l = j \pm {}^1/_2$. Einer der Zustände besitzt positive, der andere negative Parität.

Das magnetische Moment des Nukleons setzt sich aus dem Moment der Bahnbewegung $\vec{\mu}_l$ und dem magnetischen Eigenmoment des Nukleons $\vec{\mu}_s$ zusammen. Diese beiden magnetischen Momente (ausgedrückt in Einheiten des Kernmagnetons $\mu_0 = e\hbar/2Mc = 5{,}043 \cdot 10^{-24}$ erg/G) sind mit den entsprechenden mechanischen Drehimpulsen durch die Beziehungen

$$\vec{\mu}_l = g_l\, \mathfrak{l}, \qquad \vec{\mu}_s = g_s\, \mathfrak{s} \tag{4.2.2}$$

[1]) Gerade-ungerade-Kerne (gu-Kerne) heißen die Kerne mit gerader Protonen- und ungerader Neutronenzahl. Kerne mit ungerader Protonenzahl und gerader Neutronenzahl werden entsprechend als Ungerade-gerade-Kerne (ug-Kerne) bezeichnet.

verknüpft. Die gyromagnetischen Verhältnisse (g) der freien Nukleonen sind in Tab. 8 angeführt.

Tabelle 8

Die gyromagnetischen Verhältnisse der freien Nukleonen

Nukleon	g_l	g_s
Proton	1	5,586
Neutron	0	−3,826

Als magnetisches Moment des Kerns bezeichnet man den Mittelwert des Operators des magnetischen Moments im Zustand mit den Wellenfunktionen (4.2.1) bei $m = j$, d. h. den über alle Bewegungen im Kern gemittelten Wert, deren Periode von der Größenordnung 10^{-24} s ist. Dieses mittlere magnetische Moment ist (im quantenmechanischen Sinn) immer in Richtung des Gesamtdrehimpulses (Spins) des Kerns orientiert, da dies die einzige ausgezeichnete Richtung im Kern ist. Das gesamte magnetische Moment des Kerns, das in unserer Näherung durch das magnetische Moment eines Nukleons bestimmt wird, ist somit

$$\vec{\mu}_j = g_j \mathfrak{j}, \tag{4.2.3}$$

wobei g_j das totale gyromagnetische Verhältnis des Nukleons ist. Bei der elementaren Ableitung von g_j muß berücksichtigt werden, daß $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{s}$ um $\mathfrak{j}$ präzedieren. Nach der Definition ist also das magnetische Moment des Kerns

$$\vec{\mu}_j = \left\langle \frac{g_l(\mathfrak{l}\,\mathfrak{j}) + g_s(\mathfrak{s}\,\mathfrak{j})}{\mathfrak{j}^2} \right\rangle \mathfrak{j}$$

und demzufolge

$$g_j = \left\langle \frac{g_l(\mathfrak{l}\,\mathfrak{j}) + g_s(\mathfrak{s}\,\mathfrak{j})}{\mathfrak{j}^2} \right\rangle. \tag{4.2.4}$$

Da die Beziehungen $\mathfrak{j} - \mathfrak{l} = \mathfrak{s}$ und $\mathfrak{j} - \mathfrak{s} = \mathfrak{l}$ gelten, haben wir

$$2(\mathfrak{j}\,\mathfrak{l}) = \mathfrak{j}^2 + \mathfrak{l}^2 - \mathfrak{s}^2 \quad \text{und} \quad 2(\mathfrak{j}\,\mathfrak{s}) = \mathfrak{j}^2 + \mathfrak{s}^2 - \mathfrak{l}^2.$$

Setzt man dies in (4.2.4) ein, so erhält man

$$g_j = \frac{1}{2}(g_l + g_s) + \frac{1}{2}(g_l - g_s)\left\langle \frac{\mathfrak{l}^2 - \mathfrak{s}^2}{\mathfrak{j}^2} \right\rangle$$

und mit den Eigenwerten der Operatoren $\hat{\mathfrak{l}}^2$, $\hat{\mathfrak{s}}^2$ und $\hat{\mathfrak{j}}^2$ schließlich

$$g_j = \frac{1}{2}(g_l + g_s) + \frac{1}{2}(g_l - g_s)\frac{l(l+1) - s(s+1)}{j(j+1)}.$$

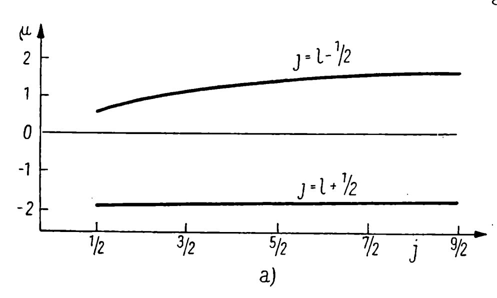
Für $s = {}^1/_2$ und $j = l \pm {}^1/_2$ liefert das

$$g_j = \begin{cases} \left(l\,g_l + \frac{1}{2}g_s\right)\left(l + \frac{1}{2}\right)^{-1} & \text{für} \quad j = l + \frac{1}{2}, \\ \left[(l+1)\,g_l - \frac{1}{2}\,g_s\right]\left(l + \frac{1}{2}\right)^{-1} & \text{für} \quad j = l - \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{4.2.5}$$

Wird (4.2.5) in (4.2.3) eingesetzt, so erhalten wir das magnetische Moment des Kerns

$$\mu_j = \begin{cases} l\, g_l + \frac{1}{2} g_s & \text{für} \quad j = l + \frac{1}{2}, \\ \left[(l+1)\, g_l - \frac{1}{2} g_s\right] \frac{2l-1}{2l+1} & \text{für} \quad j = l - \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{4.2.6}$$

Die nach Formel (4.2.6) berechneten Werte der magnetischen Momente von Proton und Neutron sind in Tab. 9 angeführt. Abb. 8 gibt die Abhängigkeit der magnetischen Momente des Protons und Neutrons von j wieder (SCHMIDTsche Linien).



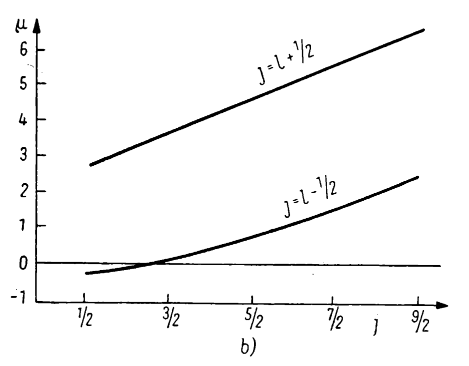


Abb. 8. SCHMIDTsche Linien für die magnetischen Momente von Kernen mit ungerader Neutronenzahl (a) und ungerader Protonenzahl (b)

Die experimentellen Werte der magnetischen Momente von Kernen mit ungerader Nukleonenzahl liegen in der Mehrzahl der Fälle nicht auf den SCHMIDTschen Linien, sondern für alle Kerne außer ^{3}H, ^{3}He, ^{15}N und ^{13}C zwischen ihnen.

Betrachten wir nun, welche Rückschlüsse man über die „Konfiguration" der Nukleonen in leichten Kernen auf Grund der experimentellen Daten für die Spins und die magnetischen Momente ziehen kann.

Obwohl bei einigen Kernen die Abweichung von den SCHMIDTschen Linien 0,5 ··· 1,5 Kernmagnetonen beträgt, kann man doch für viele Kerne verhältnismäßig eindeutig angeben, zu welcher der SCHMIDTschen Linien das magnetische Moment gehört. Man bestimmt damit die Parität des Zustandes, wenn der Gesamtdrehimpuls bekannt ist. Meistens liegen die magnetischen Momente von Kernen, die ein Nukleon über die gefüllten Schalen hinaus besitzen, relativ nahe bei den SCHMIDTschen Linien. Eine Ausnahme stellt der ^{209}Bi-Kern dar, der sich zwar nur durch ein Proton vom doppeltmagischen Kern ^{208}Pb unterscheidet, aber ein magnetisches Moment besitzt, das um 1,4 Einheiten vom entsprechenden Wert der SCHMIDTschen Linien abweicht.

Die Abweichung der magnetischen Momente von den nach der oben angegebenen Methode berechneten Werten kann man qualitativ erklären.

Tabelle 9

Die SCHMIDTschen Werte der magnetischen Momente von Kernen mit ungerader Massenzahl

Kerne mit ungerader Protonenzahl				Kerne mit ungerader Neutronenzahl			
$j = l + 1/2$		$j = l - 1/2$		$j = l + 1/2$		$j = l - 1/2$	
$s_{1/2}$	2,793			$s_{1/2}$	−1,913		
$p_{3/2}$	3,793	$p_{1/2}$	−0,264	$p_{3/2}$	−1,913	$p_{1/2}$	0,638
$d_{5/2}$	4,793	$d_{3/2}$	0,124	$d_{5/2}$	−1,913	$d_{3/2}$	1,148
$f_{7/2}$	5,793	$f_{5/2}$	0,862	$f_{7/2}$	−1,913	$f_{5/2}$	1,366
$g_{9/2}$	6,793	$g_{7/2}$	1,713	$g_{9/2}$	−1,913	$g_{7/2}$	1,488
$h_{11/2}$	7,793	$h_{9/2}$	2,624	$h_{11/2}$	−1,913	$h_{9/2}$	1,565

Erstens trägt die Wellenfunktion (4.2.1), die zur Bestimmung des Kernzustandes benutzt wurde, nur Näherungscharakter, und zweitens ist es möglich, daß sich die magnetischen Momente der im Kern gebundenen Nukleonen von den magnetischen Momenten freier Nukleonen unterscheiden.

In einigen Arbeiten [4,10; 4,11] wurde angenommen, daß die magnetischen Momente der Nukleonen im Kern zwischen dem Wert für die freien Nukleonen und dem Wert liegen, der sich aus der DIRACschen Theorie ohne Berücksichtigung der Wechselwirkung mit dem Mesonenfeld ergibt, d. h., daß

$$2{,}79 \geqq \mu_{\mathrm{p}} \geqq 1\,,$$
$$0 \geqq \mu_{\mathrm{n}} \geqq -1{,}91$$

gilt. Die anomalen magnetischen Momente der freien Nukleonen werden nach der modernen Theorie qualitativ durch die virtuelle Emission und Absorption von Mesonen erklärt. In [4,11] wurde darauf hingewiesen, daß dieser Prozeß für Nukleonen im Kern teilweise dadurch erschwert wird, daß im Kern wegen des PAULI-Prinzips diejenigen Emissionen von Mesonen verboten sind, bei denen das Rückstoßnukleon in Zustände gelangen würde, die schon durch andere Nukleonen besetzt sind. Die moderne Mesonentheorie ist jedoch noch nicht in der Lage, die Bedeutung dieses Effektes für die beobachtete Abweichung der magnetischen Momente quantitativ abzuschätzen. Es sind auch noch eine Reihe anderer Ursachen bekannt, die unzweifelhaft eine solche Abweichung hervorrufen müssen.

Wir wollen 3 Erscheinungen anführen, die für die Abweichung der magnetischen Momente von den SCHMIDTschen Linien verantwortlich sein können:

1. Wie schon oben erwähnt, wird die $L\,S$- und $j\,j$-Kopplung in den Kernen nur angenähert verwirklicht. Bereits kleine Abweichungen von der $j\,j$-Kopplung (oder $L\,S$-Kopplung) können sich wesentlich auf die Größe des magnetischen Moments auswirken [4,12].

2. Wenn sich außerhalb der besetzten Schalen mehrere Nukleonen befinden, so kann ihre Wechselwirkung wesentlichen Einfluß auf die Abweichungen des Spins und des magnetischen Moments von den Werten besitzen, die

das Schalenmodell liefert. So besitzt z. B. der ^{23}Na-Kern 12 Neutronen und 11 Protonen, von denen sich die drei äußeren Nukleonen in der Schale $1d_{5/2}$ befinden. Nach dem Schalenmodell muß der Spin dieses Kerns gleich dem Spin des letzten, ungeraden Nukleons, d. h. gleich $^5/_2$, sein. Experimentell ergibt sich jedoch für den ^{23}Na-Kern der Spin $^3/_2$. Dies kann man durch die Wechselwirkung der Nukleonen in der $d_{5/2}$-Schicht erklären, die zu einem Gesamtspin $^3/_2$ führt.

3. In einer Reihe von Fällen besitzen auch die Nukleonen der besetzten Schalen einen wesentlichen Einfluß auf die äußeren Nukleonen. Hierauf werden wir in Abschn. 4.8. näher eingehen.

Ungeachtet der Unvollkommenheiten des Schalenmodells bei der Erklärung der magnetischen Momente der Kerne konnte es doch erfolgreich zur angenäherten Beschreibung benutzt werden. Es gestattete in einer Reihe von Fällen, verhältnismäßig eindeutig die „Konfiguration" von leichten Kernen aus den experimentellen Werten der Spins und der magnetischen Momente festzustellen. Betrachten wir einige Beispiele.

Der ^{4}He-Kern. Der ^{4}He-Kern besitzt den Drehimpuls 0, sein magnetisches Moment ist ebenfalls 0. Die Bindungsenergie je Nukleon ist groß. Man muß deshalb annehmen, daß sich im ^{4}He-Kern alle 4 Nukleonen im Zustand $1s$ befinden, was man kurz folgendermaßen schreiben kann: $(1s)^4$. Der $1s$-Zustand wird folglich bei ^{4}He vollständig besetzt.

Der ^{3}He-Kern. In diesem Kern fehlt ein Neutron an der abgeschlossenen Schale. Die Nukleonenkonfiguration ist folglich $(1s)^3$. Der experimentelle Wert für den Spin des ^{3}He ist $^1/_2$, sein magnetisches Moment beträgt $\mu = -2{,}13\,\mu_0$. Da an der gefüllten Schale ein Neutron fehlt, müßten Spin und magnetisches Moment des Kerns gleich dem Spin und dem magnetischen Moment dieses fehlenden Neutrons sein, d. h., es müßte $J = {}^1/_2$ und $\mu_{\text{theor}} = -1{,}91$ sein. Der experimentelle Wert des magnetischen Moments unterscheidet sich also um $0{,}22\,\mu_0$ vom theoretischen. Berücksichtigt man die Beimischung des $^3D_1$-Zustandes, die durch den Einfluß der Tensorkräfte hervorgerufen wird, so erhält man bessere Übereinstimmung.

Der ^{3}H-Kern. Die experimentellen Werte sind $J = {}^1/_2$ und $\mu = 2{,}98\,\mu_0$. An der vollbesetzten Schale fehlt ein Proton; es liegt eine $(1s)^3$-Konfiguration vor. Das magnetische Moment müßte gleich dem magnetischen Moment des Protons, d. h. gleich $2{,}79\,\mu_0$, sein. Der theoretische Wert ist um $0{,}19\,\mu_0$ kleiner als der experimentelle.

Der ^{6}Li-Kern. Die experimentellen Werte sind $J = 1$ und $\mu = 0{,}82\,\mu_0$. Über die gefüllte $(1s)^4$-Schale hinaus sind ein Proton und ein Neutron vorhanden. Da das Quadrupolmoment des ^{6}Li Null ist, müssen sich die beiden äußeren Nukleonen im s-Zustand befinden. Die Konfiguration des Grundzustandes des ^{6}Li kann deshalb $(1\,s)^4\,(2\,s)^2$ sein. Um den Spin 1 zu erhalten, ist es notwendig, daß die Spins der äußeren Nukleonen parallel gerichtet sind. Das magnetische Moment müßte dann gleich $0{,}88\,\mu_0$ sein, was um $0{,}06\,\mu_0$ größer als der experimentelle Wert ist.

Die Konfiguration $(1s)^4\,(2s)^2$, die dem sogenannten *Alpha-Deuteron-Modell* entspricht, steht jedoch im Widerspruch zur üblichen Reihenfolge der Energie-

niveaus im Schalenmodell des Kerns (s. Abb. 7, S. 44), nach dem das Niveau $2s$ bedeutend höher liegt als die Niveaus $1p_{3/2}$ und $1p_{1/2}$. Im Zusammenhang damit wurden viele Versuche unternommen, die beobachteten Werte des Spins und des magnetischen Moments von ^{6}Li aus der Konfiguration $(1s)^4 (1p_{3/2})^2$ zu erklären. Nimmt man reine jj-Kopplung an, so können die beiden Nukleonen im Zustand $1p_{3/2}$ Zustände mit dem Gesamtspin 3, 2, 1 und 0 bilden. Auf Grund von Symmetriebetrachtungen kam FEENBERG [4,13] zu dem Schluß, daß der niedrigste dieser Zustände der mit dem Spin $J = 3$ sein muß, was dem Experiment widerspricht. Zur Erklärung der experimentell beobachteten Werte des Spins und magnetischen Moments mußte man annehmen, daß im ^{6}Li-Kern eine intermediäre Kopplung wirksam ist (wobei der Anteil der LS-Kopplung stark überwiegt). Die Theorie der intermediären Kopplung für die $1p$-Zustände ist in einer Reihe von Arbeiten in den Jahren 1952 bis 1957 entwickelt worden [4,14].

Der ^{10}B-Kern. Die experimentellen Werte sind $J = 3^+$ und $\mu = 1{,}80\,\mu_0$. Die 6 Nukleonen, die über die gefüllte $(1s)^4$-Schale hinaus vorhanden sind, besetzen anscheinend die $(1p_{3/2})^6$-Schale. Insgesamt sind in der $1p_{3/2}$-Schale 8 Plätze vorhanden. Deshalb fehlen bis zur vollständigen Auffüllung der Schale 1 Neutron und 1 Proton. Nimmt man an, daß der Gesamtdrehimpuls jedes Nukleons $j = 3/2$ ist und daß beide Drehimpulse parallel gerichtet sind, so erhält man $J = 3$ und für das magnetische Moment nach den SCHMIDTschen Linien den Wert $\mu = 1{,}88\,\mu_0$.

Der ^{11}B-Kern. Die experimentellen Werte sind $J = 3/2$ und $\mu = 2{,}69\,\mu_0$. Die Konfiguration ist anscheinend $(1s)^4\ (1p_{3/2})^5\ (2s)^2$, da die Konfiguration $(1s)^4\ (1p_{3/2})^7$ den Wert $\mu = 3{,}79\,\mu_0$ liefert, was von dem beobachteten Wert des magnetischen Moments zu stark abweicht.

Der ^{12}C-Kern. Die experimentellen Werte sind $J = 0$ und $\mu = 0$, was auf einen Abschluß der beiden Kernschalen hindeutet: $(1s)^4\ (1p_{3/2})^8$.

Der ^{13}C-Kern. Die experimentellen Werte sind $J = 1/2$ und $\mu = 0{,}70\,\mu_0$. Das eine Neutron, das über die abgeschlossenen Schalen $(1s)^4$ und $(1p_{3/2})^8$ vorhanden ist, befindet sich wahrscheinlich im $1p_{1/2}$-Zustand. Dann erhält man nach den SCHMIDTschen Linien den Wert $\mu = 0{,}64\,\mu_0$.

Der ^{14}N-Kern. Die experimentellen Werte sind $J = 1$ und $\mu = 0{,}40\,\mu_0$. Das Proton und das Neutron, die über die besetzten Schalen hinaus vorhanden sind, müssen parallele Spins besitzen und sich im Zustand $1p_{1/2}$ befinden. Die Konfiguration ist also von der Gestalt $(1s)^4\ (1p_{3/2})^8\ (1p_{1/2})^2$. Das magnetische Moment muß dann gleich $0{,}37\,\mu_0$ sein.

Der ^{16}O- und ^{20}Ne-Kern. Die experimentellen Werte sind $J = 0$, $\mu = 0$. Die Nukleonenkonfiguration entspricht abgeschlossenen Schalen $(1s)^4\ (1p_{3/2})^8\ (1p_{1/2})^4$ für den Sauerstoff und $(1s)^4\ (1p_{3/2})^8\ (1p_{1/2})^4\ (2s)^4$ für das Neon.

Der ^{17}O-Kern. Dieser Kern besitzt anscheinend die Konfiguration $(1s)^4\ (1p_{3/2})^8\ (1p_{1/2})^4\ (1s_{5/2})^1$, was den experimentellen Werten $J = 5/2$ und $\mu = -1{,}89\,\mu_0$ entspricht.

Der ^{19}F-Kern. Dieser Kern besitzt die Konfiguration $(1s)^4\ (1p_{3/2})^8\ (1p_{1/2})^4\ (2s)^3$, da die experimentellen Werte $J = 1/2$ und $\mu = 2{,}63\,\mu_0$ den entsprechenden Werten für das eine fehlende Proton in der $2s$-Schale nahekommen.

Die angeführten Beispiele zeigen, daß bei den leichten Kernen die Schalen in folgender Reihenfolge aufgefüllt werden (vgl. Abb. 7, S. 44): $1s$, $1p_{3/2}$, $1p_{1/2}$, $2s$. In einigen Fällen treten jedoch auch Abweichungen von dieser Reihenfolge auf. Solche „Irregularitäten" in der Auffüllung sind nicht verwunderlich, wenn man bedenkt, daß sich die Zustände der Nukleonen nicht auf ein von außen vorgegebenes Feld, sondern auf einen „Potentialtopf" beziehen, der selbst vom gegebenen Zustand des Kerns abhängt. Das „self-consistent field" ist deshalb für die verschiedenen Kerne unterschiedlich. Man muß weiterhin bedenken, daß bei den leichten Kernen oft eine intermediäre Kopplung auftritt.

4.3. Struktur der mittelschweren und schweren Kerne nach dem Schalenmodell

Zur Erklärung der beobachteten Spinwerte, magnetischen Momente und Quadrupolmomente wurden verschiedene Schemata für die Energieniveaus der Kerne vorgeschlagen [4,15; 4,16]. Das verbreitetste Niveauschema ist in Abb. 7 wiedergegeben.

Im vorangehenden Abschnitt wurde bereits darauf hingewiesen, daß man zur Erklärung der Drehimpulse und der magnetischen Momente der leichten Kerne oft zu Abweichungen von der „regulären" Reihenfolge bei der Schalenauffüllung gezwungen wird. Bei den schweren und auch schon den mittleren Kernen werden solche Abweichungen relativ häufig. Die Schalenstruktur ist nur bei den Kernen gut ausgeprägt, die in der Nähe von magischen Kernen liegen.

Als magische Kerne bezeichnet man Kerne mit der Neutronen- bzw. Protonenzahl 20, 50, 82 und 126. Bei diesen Zahlen sind die Schalen aufgefüllt, von denen die nächsten Schalen energetisch relativ weit entfernt liegen (vgl. Abb. 7). Solche Konfigurationen sind deshalb recht stabil. Man kann von Kernen mit magischer Neutronenzahl und von Kernen mit magischer Protonenzahl sprechen. Wie schon weiter oben gesagt wurde, bezeichnet man Kerne mit magischer Neutronenzahl und magischer Protonenzahl als doppeltmagisch. Ein Beispiel dafür ist das ^{208}Pb, das 82 Protonen und 126 Neutronen besitzt. Deshalb zeichnet sich der ^{208}Pb-Kern durch eine besonders große Stabilität und auch durch andere Eigenschaften aus, die bei der Wechselwirkung mit Protonen, Neutronen und anderen Teilchen auftreten.

Das Schalenmodell gibt auch Hinweise auf die elektrischen Quadrupolmomente der Kerne [4,17]. Nimmt man an, daß alle paarigen Nukleonen einen kugelförmigen Kernrumpf bilden, so kann man das Quadrupolmoment auf die asymmetrische Bewegung des letzten unpaaren Protons zurückführen. Deshalb müssen nach dem Schalenmodell die Quadrupolmomente von Kernen mit ungerader Protonenzahl von der Größenordnung des Quadrupolmoments eines Protons im Zustand mit dem Gesamtdrehimpuls j sein. Ein Proton in diesem Zustand liefert das Quadrupolmoment (s. Anhang 2.2.)

$$Q_j = \langle r^2(3\cos^2\vartheta - 1)\rangle_{j,\,m=j} = -\frac{2j-1}{2j+2}\langle r^2\rangle. \qquad (4.3.1)$$

Hierbei ist $\langle r^2 \rangle$ der Mittelwert vom Quadrat des Radiusvektors des Protons im betrachteten Zustand. Dieser ist von der Größenordnung des Kernradius: $\langle r^2 \rangle \approx {}^3/_5\, R^2$. Ein Loch in einer besetzten Protonenschale ruft ebenfalls ein Quadrupolmoment vom Betrag (4.3.1) hervor, es besitzt lediglich das umgekehrte Vorzeichen.

Wenn sich außerhalb einer abgeschlossenen Schale n Protonen mit dem Gesamtdrehimpuls j befinden, so ist bei ungeradem n der Spin des Kerns gleich dem Drehimpuls j des ungeraden Protons. In diesem Fall erhält man für das Quadrupolmoment des Kerns [4,18] (für $1 \leqq n \leqq 2j$)

$$Q_j = -\langle r^2 \rangle \frac{2j-1}{2j+2} \left\{ 1 - \frac{2(n-1)}{2j-1} \right\}. \tag{4.3.1 a}$$

Das Quadrupolmoment ist somit negativ, wenn sich außerhalb der gefüllten Schale weniger als $\frac{2j+1}{2}$ Protonen befinden, es ist positiv für $n > \frac{2j+1}{2}$.

Die beiden Schwefelisotope, die 1 bzw. 3 Neutronen in der Schale $j = {}^3/_2$ besitzen, haben Quadrupolmomente mit entgegengesetztem Vorzeichen und fast gleicher Größe. Dies stimmt qualitativ mit den Voraussagen der Theorie überein, da im zweiten Fall von den 3 Neutronen drei von vier möglichen Zuständen besetzt werden. Dabei wird vorausgesetzt, daß die Neutronenbewegung ebenfalls einen Beitrag zum Quadrupolmoment des Kerns liefert.

Die Verschiebung r eines Neutrons aus dem Schwerpunkt des Kerns mit der Massenzahl A ist mit einer Verschiebung des Schwerpunkts des Restkerns um $-r(A-1)^{-1}$ verbunden. Da dieser Restkern die Ladung eZ besitzt, hat folglich der Operator des elektrischen Quadrupolmoments des Kerns, das von einem Neutron erzeugt wird, die Gestalt

$$\hat{Q}_{\text{n}} = -\frac{Z}{(A-1)^2} r^2 (3\cos^2\vartheta - 1).$$

Das elektrische Quadrupolmoment, das von einem Neutron außerhalb einer abgeschlossenen Schale erzeugt wird, ist also $Z(A-1)^{-2}$mal kleiner als das Quadrupolmoment, das von einem Proton erzeugt würde. Außerdem unterscheiden sich die beiden Momente durch ihr Vorzeichen.

Diese quantitativen Ableitungen des Schalenmodells werden von den experimentellen Daten bei weitem nicht vollständig bestätigt. Die Quadrupolmomente der Kerne sind besonders klein, wenn die Protonenzahl nahe bei 2, 8, 20, 50, 82 liegt. Protonen, die eine neue Schale beginnen, liefern ein negatives Quadrupolmoment. Mit wachsender Protonenzahl wird Q positiv und erreicht sein Maximum, wenn die Schale zu etwa ${}^2/_3$ aufgefüllt ist. Danach nimmt das Quadrupolmoment wieder bis auf Null ab, und zwar in dem Maße, wie die Schale weiterhin mit Protonen aufgefüllt wird. Die Größe des Quadrupolmoments entspricht der Gl. (4.3.1) angenähert nur für Kerne mit Protonenzahlen, die sich wenig von den magischen Zahlen unterscheiden. Wenn sich die Protonenzahl jedoch stark von den magischen Zahlen unterscheidet, so sind die Quadrupolmomente der Kerne um etwa den Faktor 10 größer als die Werte, die von (4.3.1) geliefert werden. Nach dem Schalenmodell müßte die Zahl der Kerne mit positiven Quadrupolmomenten ungefähr

gleich der Zahl der Kerne mit negativen Quadrupolmomenten sein. Das Experiment zeigt jedoch, daß bei den schweren Kernen die großen Quadrupolmomente alle positiv sind.

Die Quadrupolmomente von Kernen, die eine mittlere Massenzahl besitzen und weit entfernt von den magischen Kernen liegen, zeigen bei ungeraden Neutronenzahlen Werte des Quadrupolmoments, die viele Male größer als die vom Schalenmodell vorausgesagten Werte sind. Für einige Kerne mit ungeraden Neutronenzahlen im Gebiet zwischen ^{113}In und ^{201}Hg besitzt dabei das Quadrupolmoment den gleichen Wert wie für Kerne mit ungerader Protonenzahl. All dies deutet darauf hin, daß bei Kernen mit großen Quadrupolmomenten die Quadrupolmomente hauptsächlich durch eine Deformation des Kernrumpfes hervorgerufen werden und daß das Quadrupolmoment des ungeraden Protons oder Neutrons nur eine geringe Rolle spielt (s. auch Abschn. 4.7.).

Die großen elektrischen Quadrupolmomente von mittleren und schweren Kernen, die weit entfernt von magischen Kernen liegen, deuten somit auf beträchtliche Abweichungen der Kerne von der Kugelform hin. Diese Vermutung wird durch die Rotationsenergiezustände dieser Kerne unterstrichen, wie wir im Abschn. 4.6. sehen werden.

Bei den sphäroidalen Kernen besitzt auch das mittlere Kernfeld keine Kugelsymmetrie. Im Zusammenhang damit entstehen natürlich Zweifel, ob die oben eingeführte Klassifikation der Einteilchenzustände nach Bewegungsintegralen des zentralsymmetrischen Feldes Gültigkeit besitzt.

Die sphäroidalen Kerne besitzen axiale Symmetrie.[1]) Der innere Zustand des Nukleons wird dabei durch die Projektion des Drehimpulses des Nukleons auf die Symmetrieachse und die Parität charakterisiert.

Wir bezeichnen die Projektion des Bahndrehimpulses des Nukleons auf die Symmetrieachse des Kerns mit λ. Die Projektion des Gesamtdrehimpulses auf die Symmetrieachse ist dann $\Omega = \lambda \pm 1/2$ bei $\lambda \neq 0$ und $\Omega = 1/2$ bei $\lambda = 0$. Der Entartungsgrad eines beliebigen Niveaus von Kernen mit Axialsymmetrie ist gleich den beiden Werten der Projektion des Drehimpulses ($\pm\Omega$), zum Unterschied von dem Entartungsgrad von Niveaus mit dem Gesamtdrehimpuls j in kugelsymmetrischen Kernen $(2j + 1)$. Deshalb können in den nichtsphärischen Kernen jeweils 2 Neutronen und 2 Protonen eine „Schale“ bilden. Da jede solche Schale nur 2 Zustände besitzt, müssen alle geraden Nukleonen Schalen abschließen. Die Spins und die magnetischen Momente von Kernen mit ungerader Massenzahl werden deshalb nur durch den Zustand des ungeraden (unpaaren) Nukleons bestimmt.

Den Werten von $\lambda = 0, 1, 2, \ldots$ ordnen wir Buchstaben des griechischen Alphabets zu: $\sigma, \pi, \Delta, \ldots$ Der Spin des Kerns ist im normalen Zustand die Summe der Projektionen der Gesamtdrehimpulse der einzelnen Nukleonen auf die Symmetrieachse des Kerns: $K = \sum_{i=1}^{A} \Omega_i$. Da alle paarigen Nukleonen

---

[1]) In der letzten Zeit wurde darauf hingewiesen, daß einige Kerne auch nicht axialsymmetrisch sind. Siehe die Anmerkung auf Seite 78.

abgeschlossene Schalen bilden und keine stabilen schweren uu-Kerne existieren, wird der Kernspin durch den Ω-Wert des letzten, unpaaren Nukleons bestimmt: $K = \Omega$. Ein und demselben Wert des Kernspins kann einer der beiden Werte des Betrags der Projektion des Bahndrehimpulses $\lambda = \Omega \pm 1/2$ entsprechen.

Von NILSON [4,19] wurde das Schema der Einteilchenniveaus für ein axialsymmetrisches Oszillatorpotential mit Spin-Bahn-Kopplung berechnet. In Abb. 9 ist der Teil des Niveauschemas dargestellt, der die Abhängigkeit der ersten 10 Kernniveaus vom Parameter a widerspiegelt; a bestimmt dabei die Abweichung des Kerns von der Kugelform $R(\vartheta) = R_0(1 + a\, Y_{20})$. Aus Abb. 9 ist zu ersehen, daß mit wachsendem a die Aufspaltung der Niveaus, die im kugelförmigen Kern entartet sind, immer mehr zunimmt.

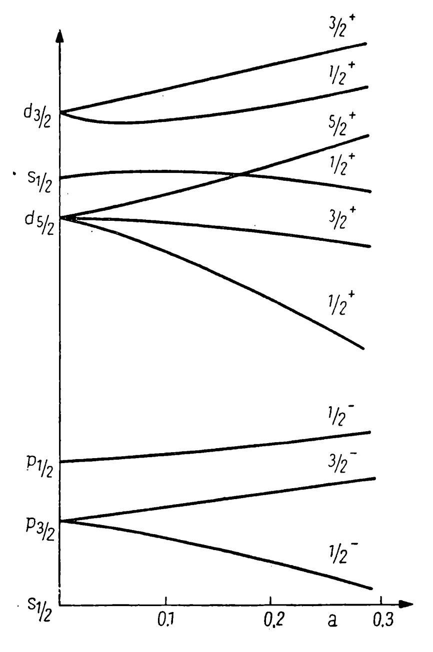


Abb. 9. Energieniveaus der Nukleonen in Abhängigkeit vom Parameter a für Kerne von der Gestalt eines gestreckten Rotationsellipsoids

Die Zahlen an den Energiekurven bedeuten Drehimpuls und Parität des betreffenden Zustandes

4.4. Tröpfchen- oder hydrodynamisches Modell des Atomkerns

Im Schalenmodell oder Einzelteilchenmodell des Atomkerns geht man von der Annahme aus, daß sich die Nukleonen in einem mittleren effektiven Kernfeld bewegen, welches den mittleren Effekt der Wechselwirkungen zwischen den Nukleonen berücksichtigt. Beim Tröpfchenmodell des Kerns geht man von der entgegengesetzten Näherung aus. Der Kern wird als Tröpfchen einer fast inkompressiblen Flüssigkeit sehr hoher Dichte ($\approx 10^{14}$ g/cm^3) betrachtet. Diese Vorstellung beruht auf der experimentellen Tatsache, daß die Volumina der Kerne praktisch proportional der Anzahl der Nukleonen im Kern sind und daß auch die Bindungsenergie des Kerns angenähert proportional seiner Nukleonenzahl ist. Da ein Nukleon, das sich an der Kernoberfläche befindet, mit weniger Nukleonen in Wechselwirkung steht als ein Nukleon im Kern, vermindert sich die Bindungsenergie des Kerns um eine zur Kernoberfläche proportionale Größe. Man kann somit von einer Oberflächenenergie der Kerne sprechen.

Die Bindungsenergie je Nukleon wird nach dem Tröpfchenmodell durch die WEIZSÄCKER-Formel [4,20] für die Grundzustände der Kerne bestimmt:

$$f = -\varepsilon_1 + b\,\varepsilon_1 \left(\frac{A - 2Z}{A}\right)^2 + 4\pi r_0^2 A^{-1/3} \sigma + \frac{3}{5}\,\frac{e^2 Z^2}{r_0 A^{4/3}}. \qquad (4.4.1)$$

Hierbei ist

$$\varepsilon_1 = 14{,}66\,\text{MeV}, \quad b = 1{,}40, \quad 4\pi r_0^2 \sigma = 15{,}4\,\text{MeV}, \quad r_0 = 1{,}42 \cdot 10^{-13}\,\text{cm}. \tag{4.4.1a}$$

Das dritte Glied in (4.4.1) beschreibt die Oberflächenspannung, das vierte die elektrostatische Abstoßung. Die Formel (4.4.1) gibt den experimentellen Verlauf der Bindungsenergie je Nukleon in Abhängigkeit von der Massenzahl A befriedigend wieder.[1])

Das Tröpfchenmodell des Kerns wurde zuerst von N. Bohr [4,22] eingeführt und wurde erfolgreich zur Erklärung einiger Eigenschaften von nichtangeregten Kernen und von Kernreaktionen angewendet.

Auf Grund der Vorstellung, daß der Kern ein Flüssigkeitströpfchen darstellt, kann man kollektive Bewegungen von Nukleonen betrachten, die zu Oberflächen- und Volumenschwingungen führen. Meist wird die Dichte des Kerns als konstant angenommen und die „kollektive" Bewegung der Nukleonen als Deformation der Kernoberfläche ohne Veränderung des Volumens betrachtet.

Bei kleinen Deformationen des Tröpfchens kann man die Abweichung der Kernoberfläche von einer Kugelfläche mit dem Radius R_0 nach Kugelfunktionen entwickeln:

$$\Delta R = R(\vartheta, \varphi) - R_0 = R_0 \sum_{\lambda, \mu} \alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}(\vartheta, \varphi). \tag{4.4.2}$$

Die $\alpha_{\lambda\mu}$ sind komplexe Koordinaten. Damit (4.4.2) reell wird, müssen notwendig die zusätzlichen Bedingungen $\alpha_{\lambda\mu} = (-1)^\mu \alpha^*_{\lambda, -\mu}$ erfüllt sein. Da dem Wert $\lambda = 1$ eine Verschiebung des Kerns als Ganzem entspricht, muß in (4.4.2) $\lambda \geqq 2$ genommen werden. Da weiterhin die Teilchenzahl im Kern endlich ist, müssen wir auch die λ-Werte von oben her begrenzen ($\lambda < A^{1/3}$), damit die Kontinuumsnäherung benutzt werden kann. Die Forderung, daß das Kernvolumen konstant bleiben soll, führt schließlich zu

$$\frac{1}{3} \int R^3(\vartheta, \varphi)\, d\Omega = \frac{4\pi}{3} R_0^3,$$

was sich in erster Näherung auf die Bedingung

$$\int \Delta R(\vartheta, \varphi)\, d\Omega = 0$$

---

[1]) Die neuesten experimentellen Daten über die Verteilung der Ladung im Kern liefern Werte von r_0, die kleiner sind als der in (4.4.1a) angeführte Wert (vgl. Abschn. 1.4.). Im Zusammenhang damit wurde es notwendig, die Konstanten für die halbempirische Formel (4.4.1) neu zu bestimmen. Nach Green [4,21] kann man f durch die Formel

$$f = -a_1 + a_2 A^{-1/3} + a_3 \frac{Z^2}{A^{4/3}} + a_4 \frac{(A-2Z)^2}{4A^2}$$

ausdrücken. Die Konstanten a besitzen in TME (0,9311 MeV) folgende Werte:

$$a_1 = 16{,}9177, \quad a_2 = 19{,}120, \quad a_3 = 101{,}777,$$

$$a_4 = \frac{3e^2}{5r_0} = 0{,}76278, \quad r_0 = 1{,}2162 \cdot 10^{-13}\,\text{cm}.$$

reduziert, aus der $\alpha_{00} = 0$ folgt. Drückt man die potentielle Deformationsenergie des Kerns durch die Quadrate der absoluten Beträge der Verschiebungen (4.4.2) aus, so erhält man [4,23; 4,24]

$$V = \frac{1}{2} \sum_{\lambda, \mu} C_\lambda \, |\alpha_{\lambda\mu}|^2. \tag{4.4.3}$$

Die Koeffizienten C_λ bestimmen die Deformierbarkeit des Kerns. Sie werden durch die Oberflächenspannung σ und die Kernladungszahl (unter Annahme einer homogenen Ladungsverteilung) ausgedrückt:

$$C_\lambda = (\lambda - 1) \left\{ (\lambda + 2) R_0^2 \sigma - \frac{3}{2\pi} \frac{e^2 Z^2}{(2\lambda + 1) R_0} \right\}. \tag{4.4.4}$$

Die Oberflächenspannung σ wird der WEIZSÄCKER-Formel (4.4.1a) entnommen.

Die kinetische Energie der Oberflächenschwingungen wird durch die Geschwindigkeiten $\dot{\alpha}_{\lambda\mu}$ ausgedrückt:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\lambda, \mu} B_\lambda \, |\dot{\alpha}_{\lambda\mu}|^2. \tag{4.4.5}$$

Für inkompressible Kerne der Dichte ϱ besitzen die Koeffizienten B_λ den Wert

$$B_\lambda = \varrho \, R_0^5 \, \lambda^{-1}. \tag{4.4.6}$$

Aus (4.4.3) und (4.4.5) folgt, daß die Kernoberfläche Schwingungen mit der Frequenz

$$\omega_\lambda = \sqrt{\frac{C_\lambda}{B_\lambda}} \tag{4.4.7}$$

ausführen kann.

Betrachtet man C_λ und B_λ als Parameter der Theorie, so stellen (4.4.3) und (4.4.5) die allgemeinsten Ausdrücke für die potentielle und die kinetische Energie kleiner Oberflächenschwingungen dar. Die explizite Abhängigkeit der Koeffizienten (4.4.4) und (4.4.6) von der Oberflächenspannung, Dichte und Ladung der Kernmaterie folgt aus der sogenannten hydrodynamischen Näherung, nach der die Oberflächenschwingungen der Kernmaterie als wirbelfreie Bewegungen einer Flüssigkeit konstanter Dichte betrachtet werden. Im Anhang 4 wird die Ableitung der Koeffizienten (4.4.4) und (4.4.6) kurz angegeben.

Als Stabilitätsbedingung des Kerns erhält man die Ungleichung $C_\lambda > 0$, da nur bei Erfüllung dieser Ungleichheit das Minimum der potentiellen Energie nach (4.4.3) endlichen Werten von $\alpha_{\lambda\mu}$ entspricht. Wegen (4.4.4) kann man die Bedingung $C_\lambda > 0$ durch die Ungleichung

$$(\lambda + 2) R_0^2 \sigma > \frac{3}{2\pi} \frac{e^2 Z^2}{R_0(2\lambda + 1)} \tag{4.4.8}$$

ersetzen. Setzt man hier $\lambda = 2$ und benutzt die Zahlenwerte der Parameter aus (4.4.1a), so erhält man die Stabilitätsbedingung der Kerne:

$$Z^2/A < 49. \tag{4.4.9}$$

Diese Bedingung wurde zuerst von FRENKEL [4,25] abgeleitet.[1]) Kerne, die der Forderung (4.4.9) nicht genügen, müssen sich deformieren und in Teile zerfallen. Dies ist einer der Gründe dafür, daß es keine Kerne mit großen Ladungen gibt.

Für die Elemente am Ende des Periodensystems nimmt das Verhältnis Z^2/A folgende Werte an: 35,5 für ^{238}U, 36,5 für ^{241}Am, 39,3 für ^{244}Cf und 40,3 für ^{248}Fm.

Die Kerne, bei denen Z^2/A nur wenig vom kritischen Wert ≈ 49 verschieden ist, müssen nach dem Tröpfchenmodell nur wenig von Null verschiedene Frequenzen der Oberflächenschwingungen besitzen.

Die größte Bedeutung besitzen anscheinend die Deformationen 2. Ordnung ($\lambda = 2$). Es sind dies die ellipsoidalen Deformationen mit beliebiger Orientierung der Ellipsoidachse. Die Gesamtdeformation dieses Typs wird durch die Größe

$$\beta^2 = \sum_\mu |\alpha_{2\mu}|^2$$

charakterisiert. Die potentielle Energie der Kerndeformation nimmt dabei den Wert

$$V = \frac{1}{2} C_2 \beta^2 \tag{4.4.3a}$$

an. Für die mittleren und schweren stabilen Kerne ist der Koeffizient $C_2 \approx 60$ MeV. Die Energie des ersten angeregten Niveaus wird deshalb nach dem hydrodynamischen Modell durch die Formel

$$E_2 = \hbar \sqrt{\frac{C_2}{B_2}} \approx \left(\frac{100}{A^{5/6}}\right) \text{[MeV]} \tag{4.4.10}$$

beschrieben. Das Experiment zeigt jedoch, daß diese Beziehung nicht richtig ist. Die Energie des ersten angeregten Niveaus ist keine monotone Funktion der Massenzahl, sondern hängt stark von der Kernstruktur ab. In Abb. 10 sind die Energien des ersten angeregten Niveaus von gg-Kernen in Abhängigkeit von der Neutronenzahl dargestellt. Die Protonenzahlen sind an den Meßpunkten angegeben.

Zur Erklärung der experimentell beobachteten Abhängigkeit der Anregungsenergie des ersten Niveaus muß man annehmen, daß die Oberflächenspannung sehr stark von der Kernstruktur abhängt [4,26]. Besonders groß ist die Oberflächenspannung bei den magischen Kernen.

Das Tröpfchenmodell des Kerns kann somit die Abhängigkeit der Bindungsenergie von der Massenzahl und die Instabilität der schweren Kerne gegen Spaltung erklären. Es liefert jedoch nicht die richtigen Werte der angeregten Zustände der Kerne und kann auch die magnetischen Momente und die elektrischen Quadrupolmomente der Kerne nicht quantitativ erklären.

Die hydrodynamische Beschreibung der kollektiven Eigenschaften der Nukleonen im Kern wird sehr stark vom kombinierten Kernmodell ver-

---

[1]) FRENKEL benutzte andere Parameterwerte. Deshalb erhielt er für die kritische Größe Z^2/A einen etwas kleineren Wert.

wendet, das wir im folgenden Abschnitt betrachten werden. Deshalb untersuchen wir hier noch etwas eingehender die Energie der Oberflächenschwingungen des Kerns. Wir benutzen dabei die hydrodynamische Näherung (inkompressible, wirbelfreie Flüssigkeit).

Bei ellipsoidalen Deformationen, die durch Kugelfunktionen mit $\lambda = 2$ beschrieben werden, wird die klassische Energie der Oberflächenschwingun-

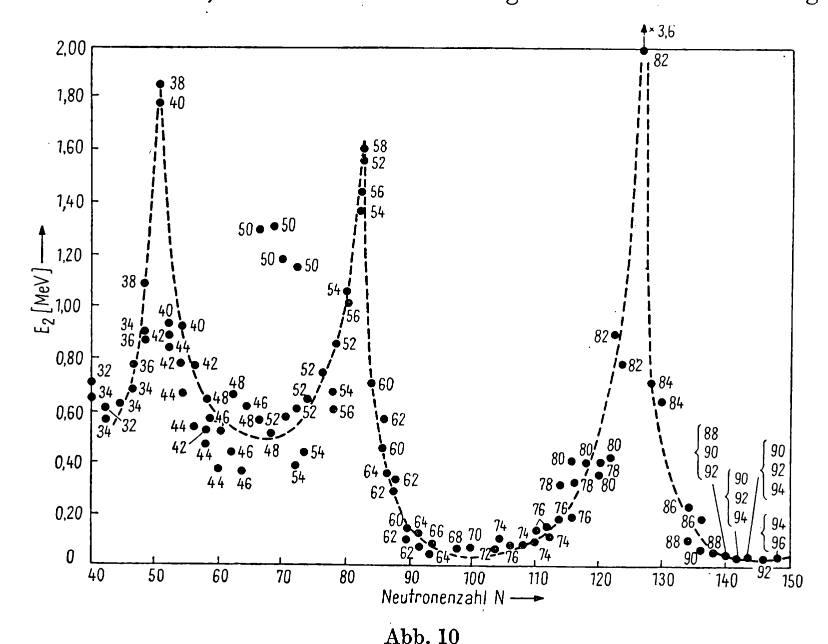


Abb. 10

Energie des ersten angeregten Niveaus von gg-Kernen als Funktion der Neutronenzahl

gen des Kerns durch die Werte von $\alpha_{2\mu} \equiv \alpha_\mu$ und ihre zeitlichen Ableitungen über die Formel

$$E = \frac{1}{2} \sum_{\mu=-2}^{2} \{B|\dot{\alpha}_\mu|^2 + C\,|\alpha_\mu|^2\} \tag{4.4.11}$$

ausgedrückt. Die α_μ werden durch die Abweichungen der Oberfläche $R(\vartheta, \varphi)$ von der Kugelfläche mit dem Radius R_0 bestimmt:

$$R(\vartheta, \varphi) - R_0 = R_0 \sum_{\mu=-2}^{2} \alpha_\mu Y_{2\mu}(\vartheta, \varphi). \tag{4.4.12}$$

Da die linke Seite der Gl. (4.4.12) reell sein muß, muß die Bedingung $\alpha_\mu = (-1)^\mu \alpha^*_{-\mu}$ erfüllt sein.

Wir führen nun die (adiabatische) Näherung ein, daß die Schwingungen der Oberfläche um die Gleichgewichtsform bedeutend schneller vor sich gehen als die Änderungen der Orientierung dieser Gleichgewichtsform im Raum.

Wir haben uns auf die Betrachtung von ellipsoidalen Deformationen beschränkt. Die Gleichgewichtsform des Kerns ist deshalb das Ellipsoid. Wir legen die Koordinatenachsen ξ, η, ζ in Richtung der Hauptachsen dieses Ellipsoids. Dann wird die Orientierung des Kerns im Raum durch die EULERschen Winkel ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 bestimmt.

Die Oberflächenschwingungen des Kerns bezüglich des Koordinatensystems ξ, η, ζ beschreiben wir durch die inneren Koordinaten a_ν, die wir durch die Beziehung

$$R - R_0 = R_0 \sum_{\nu=-2}^{2} a_\nu Y_{2\nu}(\vartheta', \varphi') \tag{4.4.13}$$

definieren. Hierbei sind ϑ', φ' die polaren Winkel im Koordinatensystem ξ, η, ζ.

Da die Achsen ξ, η, ζ in Richtung der Hauptachsen des Ellipsoids gelegt wurden, müssen die Bedingungen

$$a_1 = a_{-1} = 0, \qquad a_2 = a_{-2} \tag{4.4.13a}$$

erfüllt sein. Im speziellen Fall eines Körpers mit axialer Symmetrie gilt noch

$$a_2 = a_{-2} = 0.$$

Um von den Variablen α_μ zu den inneren Variablen a_ν und den EULERschen Winkeln ϑ_i überzugehen, benutzen wir die Transformation der Kugelfunktionen bei Drehungen des Koordinatensystems (s. Anhang 1.6.)

$$Y_{2\mu}(\vartheta, \varphi) = \sum_\nu D^2_{\mu\nu}(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3)\, Y_{2\nu}(\vartheta', \varphi').$$

Setzen wir dies in (4.4.12) ein, so erhalten wir

$$R - R_0 = R_0 \sum_{\mu,\nu} \alpha_\mu D^2_{\mu\nu} Y_{2\nu}(\vartheta', \varphi'). \tag{4.4.14}$$

Aus dem Vergleich von (4.4.14) mit (4.4.13) folgt

$$a_\nu = \sum_\mu \alpha_\mu D^2_{\mu\nu}. \tag{4.4.15}$$

Wegen (4.4.13a) sind von den fünf inneren Koordinaten a_ν nur zwei unabhängig. Wir führen deshalb nach A. BOHR [4,23] die beiden reellen Größen β und γ als Variable ein:

$$a_0 = \beta\cos\gamma, \qquad a_2 = a_{-2} = \beta\frac{\sin\gamma}{\sqrt{2}}. \tag{4.4.16}$$

Die Größe β bestimmt die gesamte Deformation des Kerns, die mit der Veränderung der potentiellen Energie des Kerns bei der Abweichung seiner Gestalt von der Kugelform verknüpft ist; γ charakterisiert die Abweichungen der Form des Kerns von der axialen Symmetrie.

Wir setzen (4.4.16) in (4.4.13) ein und erhalten

$$R - R_0 = R_0\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\,\beta\left\{\cos\gamma\left[\frac{3}{2}\cos\vartheta' - \frac{1}{2}\right] + \sin\gamma\,\frac{\sqrt{3}}{2}\sin^2\vartheta'\cos 2\varphi'\right\}.$$

Werden hier für ϑ', φ' nacheinander die Werte (0,0), ($\pi/2$, 0) und ($\pi/2$, $\pi/2$) angenommen, so ergeben sich die Hauptachsen des Kerns:

$$R_3 \equiv R(0,0) = R_0\left(1 + \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\,\beta\cos\gamma\right),$$

$$R_1 \equiv R\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = R_0\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\,\beta\cos\gamma + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{4\pi}}\,\beta\sin\gamma\right),$$

$$R_2 \equiv R\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = R_0\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\,\beta\cos\gamma - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{4\pi}}\,\beta\sin\gamma\right).$$

Die Veränderungen der 3 Achsen des Ellipsoids werden folglich mit Hilfe von β und γ über die Beziehungen

$$\Delta R_\lambda \equiv R_\lambda - R_0 = R_0\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\,\beta\cos\left(\gamma - \lambda\,\frac{2\pi}{3}\right), \qquad \lambda = 1, 2, 3$$

ausgedrückt. Für $\gamma = 0$ gilt

$$\Delta R_1 = \Delta R_2 = -\frac{1}{2}R_0\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\,\beta < 0, \qquad \Delta R_3 = R_0\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\,\beta > 0,$$

was einem gestreckten Rotationsellipsoid entspricht.

Der Übergang von den Koordinaten α_μ zu den Koordinaten β, γ, ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 mit Hilfe der Beziehungen (4.4.15) und (4.4.16) ist nicht eindeutig, da er von der Bezeichnung der Achsen und von der Wahl der Richtung dieser Achsen abhängt. Von den 5 Variablen β, γ, ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 wird nur $\beta \geqq 0$ eindeutig durch die Gleichung

$$\beta^2 = \sum_\mu |\alpha_\mu|^2$$

bestimmt.

Die Wellenfunktionen, die den Zustand des Systems in den Variablen β, γ, ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 beschreiben, müssen gegenüber den oben angeführten Transformationen der Koordinatenachsen ξ, η, ζ invariant sein. Diese Transformationen können durch die 3 Operatoren $\hat{R}_1$, $\hat{R}_2$ und $\hat{R}_3$ ausgedrückt werden, die auf die Variablen γ, ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 wirken. Der Operator $\hat{R}_1$ bewirkt eine Richtungsänderung der Achsen η und ζ und wird durch die Gleichung

$$\hat{R}_1(\gamma, \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3) = (\gamma, \vartheta_1 + \pi, \pi - \vartheta_2, -\vartheta_3), \quad \hat{R}_1^2 = 1 \qquad \text{(A)}$$

definiert. Es ist somit

$$\hat{R}_1\, D^J_{MK}(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3) = \exp\{i\,\pi(J + K)\}\, D^J_{M,-K}(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3).$$

Der Operator $\hat{R}_2$ entspricht einer Drehung der Achsen ξ und η um die ζ-Achse um 90°. Er wird durch die Gleichung

$$\hat{R}_2(\gamma, \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3) = \left(-\gamma, \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3 + \frac{\pi}{2}\right), \quad \hat{R}_2^4 = 1 \qquad \text{(B)}$$

definiert. Dabei ist

$$\hat{R}_2\, D^J_{MK}(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3) = \exp\left\{i\,\frac{\pi}{2}\,K\right\} D^J_{MK}(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3).$$

Der Operator $\hat{R}_3$ bewirkt eine zyklische Vertauschung der Achsen und wird durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \hat{R}_3(\gamma) &= \left(\gamma - \frac{2\pi}{3}\right), \\ \hat{R}_3 D^J_{MK}(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3) &= \sum_{K'} D^J_{MK'}(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3)\, D^J_{K'M}\left(0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{C}$$

definiert. Alle übrigen Transformationen (bei denen das Rechtssystem ein Rechtssystem bleibt) können durch $\hat{R}_1$, $\hat{R}_2$ und $\hat{R}_3$ ausgedrückt werden:

$$\hat{R} = \hat{R}_1^{n_1}\, \hat{R}_2^{n_2}\, \hat{R}_3^{n_3}; \tag{D}$$

n_1, n_2 und n_3 sind beliebige ganze Zahlen.

Die Forderung, daß die Wellenfunktionen der Kollektivbewegungen in den Variablen β, γ, ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 invariant gegen die Transformationen (D) sein sollen, ist ganz analog den Symmetriebedingungen, denen die Wellenfunktionen für die Schwingungen und Rotation von Molekülen aus gleichen spinlosen Kernen genügen müssen.

Aus der Invarianz der Wellenfunktionen gegenüber den Transformationen (C) folgt, daß die Wellenfunktion eine periodische Funktion von γ mit der Periode $^2/_3\,\pi$ sein muß. Bei der Beschreibung der kollektiven Bewegungen von gg-Kernen hängt die Wellenfunktion nicht von ϑ_3 ab. Dann folgt aus der Invarianz gegen die Transformationen (B) und (C), daß die Wellenfunktionen eindeutige Funktionen von $\cos 3\gamma$ sein müssen. Im allgemeinen Fall kann eine Wellenfunktion, die von den Koordinaten β, γ, ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 abhängt, in der Form

$$\Psi_{JM,\alpha} = \sum_{K'=-J}^{J} G_{J\alpha,K}(\beta, \gamma)\, D^J_{MK}(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3)$$

geschrieben werden. Durch die Symmetrieforderungen (A), (B) und (C) werden der Funktion $G_{J\alpha,K}$ bestimmte Beschränkungen auferlegt, die sich durch folgende Gleichungen ausdrücken lassen:

$$G_{J\alpha,K}(\beta, \gamma) = \exp\{i\pi(J + K)\}\, G_{J\alpha,-K}(\beta, \gamma), \tag{A'}$$

$$G_{J\alpha,K}(\beta, \gamma) = \exp\left\{i\,\frac{\pi}{2}\,K\right\} G_{J\alpha,K}(\beta, -\gamma), \tag{B'}$$

$$G_{J\alpha,K}(\beta, \gamma) = \sum_{K'} D^J_{KK'}\left(0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) G_{K'}\left(\beta, \gamma - \frac{2\pi}{3}\right). \tag{C'}$$

Wird (B′) zweimal angewendet, so zeigt sich, daß $G_{J\alpha,K}$ für ungerade K gleich Null sein muß. Wird berücksichtigt, daß K nur gerade Werte annimmt, so geht (A′) in folgende Beziehung über:

$$G_{J\alpha,K}(\beta, \gamma) = (-1)^J\, G_{J\alpha,-K}(\beta, \gamma).$$

Wir transformieren die Energie der Oberflächenschwingungen (4.4.11) auf die neuen Variablen β, γ, ϑ_i. Da die Matrizen $(D_{\mu\nu})$ unitär sind, haben wir

$$\sum_{\mu} |\alpha_\mu|^2 = \sum_{\nu} a_\nu^2 = \beta^2.$$

Die potentielle Energie nimmt deshalb folgende Form an:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{\mu} C\,|\alpha_\mu|^2 = \frac{1}{2}\, C\,\beta^2. \tag{4.4.17}$$

Zur Transformation der kinetischen Energie differenzieren wir die zu (4.4.15) inverse Gleichung

$$\alpha_\mu = \sum_{\nu} D^*_{\mu\nu}\, a_\nu$$

nach der Zeit und erhalten

$$\dot{\alpha}_\mu = \sum_{\nu} (\dot{D}^*_{\mu\nu}\, a_\nu + D^*_{\mu\nu}\, \dot{a}_\nu).$$

Die kinetische Energie der Oberflächenschwingungen nimmt somit die Form

$$T = \frac{B}{2} \sum_{\mu} |\dot{\alpha}_\mu|^2 = T_v + \frac{B}{2} \sum_{\mu,\nu,\nu'} \{\dot{D}^*_{\mu\nu} D_{\mu\nu'}\, a_\nu\, \dot{a}_{\nu'} + D^*_{\mu\nu} \dot{D}_{\mu\nu'}\, \dot{a}_\nu\, a_{\nu'}\} + T_r \tag{4.4.18}$$

an, wobei

$$T_v = \frac{B}{2} \sum_{\mu,\nu,\nu'} \dot{a}_\nu\, \dot{a}_{\nu'}\, D^*_{\mu\nu}\, D_{\mu\nu'} = \frac{B}{2}\, (\dot{\beta}^2 + \beta^2\,\dot{\gamma}^2), \tag{4.4.19}$$

$$T_r = \frac{B}{2} \sum_{\mu,\nu,\nu'} \dot{D}^*_{\mu\nu}\, \dot{D}_{\mu\nu'}\, a_\nu\, a_{\nu'} \tag{4.4.19a}$$

ist. T_v kann man somit als kinetische Energie der Oberflächenschwingungen des Kerns im Hauptachsensystem bezeichnen. Werden die zeitlichen Ableitungen der verallgemeinerten Kugelfunktionen aus dem Anhang 1.8.

$$\dot{D}_{\mu\nu} = \frac{1}{i} \sum_{\lambda,\mu'} \omega_{\mu\mu'}\, (2, \mu'\, |\hat{J}_\lambda|\, 2, \nu)$$

benutzt, so kann man leicht zeigen, daß

$$\sum_{\mu,\nu,\nu'} \{\dot{D}^*_{\mu\nu}\, D_{\mu\nu'}\, a_\nu\, \dot{a}_{\nu'} + D^*_{\mu\nu}\, \dot{D}_{\mu\nu'}\, \dot{a}_\nu\, a_{\nu'}\} = 0$$

ist. Weiterhin gilt

$$T_r = \frac{B}{2} \sum_{\mu,\nu,\nu'} \dot{D}^*_{\mu\nu}\, \dot{D}_{\mu\nu'}\, a_\nu\, a_{\nu'} = \sum_{\nu,\nu',\lambda,\lambda'} a_\nu\, a_{\nu'}\, \omega_\lambda\, \omega_{\lambda'} (2, \nu'\, |\hat{J}_\lambda\, \hat{J}_{\lambda'}|\, 2, \nu).$$

Da ν nur geradzahlige Werte annimmt [vgl. (4.4.13a)], liefern die Matrixelemente $(2, \nu'\, |\hat{J}_\lambda\, \hat{J}_{\lambda'}|\, 2, \nu)$ nur dann einen Beitrag zu T_r, wenn $\lambda = \lambda'$ ist. Man kann deshalb schreiben

$$T_r = \frac{1}{2} \sum_{\lambda} \omega^2_\lambda\, I_\lambda. \tag{4.4.20}$$

Hierbei ist

$$I_\lambda = B \sum_{M,M'} a_M\, a_{M'} (2, M'\, |\hat{J}^2_\lambda|\, 2, M). \tag{4.4.21}$$

Die Beziehung (4.4.20) entspricht dem klassischen Ausdruck für die Rotationsenergie eines starren Körpers, dessen Trägheitsmomente in Richtung der 3 Hauptachsen durch den Ausdruck (4.4.21) bestimmt werden.

Benutzt man die Formeln (A 1.1.14) bis (A 1.1.16) aus dem Anhang 1.1., so kann man leicht die Matrixelemente der Operatoren des Quadrats der Spinprojektionen bestimmen. Für $\lambda = 3$ erhält man

$$(2, M' \,|\hat{J}_3^2|\, 2, M) = M^2\, \delta_{MM'}.$$

Für die anderen Projektionen sind nur die folgenden Matrixelemente verschieden von Null:

$$(2, M \,|\hat{J}_1^2|\, 2, M) = (2, M \,|\hat{J}_2^2|\, 2, M) = \frac{1}{2}\{2(2+1) - M^2\},$$

$$\begin{aligned}(2, M+2 \,|\hat{J}_1^2|\, 2, M) &= -(2, M+2 \,|\hat{J}_2^2|\, 2, M) = \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{(3+M)(2-M)(4+M)(1-M)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2, M-2 \,|\hat{J}_1^2|\, 2, M) &= -(2, M-2 \,|\hat{J}_2^2|\, 2, M) = \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{(2+M)(3-M)(M+1)(4-M)}.\end{aligned}$$

Werden diese Ausdrücke in (4.4.21) eingesetzt und die Beziehungen (4.4.16) berücksichtigt, erhält man explizite Ausdrücke für die Trägheitsmomente:

$$\begin{aligned}I_3 &= 4B(a_2^2 + a_{-2}^2) = 4B\,\beta^2 \sin^2\gamma,\\ I_2 &= B\left(3a_0^2 - 2a_2^2 + 4\sqrt{\frac{3}{2}}\,a_0\,a_2\right) = 4B\,\beta^2 \sin^2(\gamma + 120^\circ),\\ I_1 &= B\left(3a_0^2 + 2a_2^2 + 4\sqrt{\frac{3}{2}}\,a_0\,a_2\right) = 4B\,\beta^2 \sin^2(\gamma - 120^\circ).\end{aligned}$$

Sie lassen sich in folgender Kurzform schreiben:

$$I_\lambda = 4B\,\beta^2 \sin^2\left(\gamma - \lambda\frac{2\pi}{3}\right), \qquad \lambda = 1, 2, 3. \tag{4.4.22}$$

Die Gesamtenergie der Oberflächenschwingungen des Kerns kann somit als Summe

$$E = E_v + E_r \tag{4.4.23}$$

dargestellt werden, wobei

$$E_v = \frac{C}{2}\beta^2 + \frac{B}{2}(\dot{\beta}^2 + \beta^2\,\dot{\gamma}^2) \tag{4.4.24}$$

die Energie der Oberflächenschwingungen, ausgedrückt durch die inneren Koordinaten β und γ, und

$$E_r = T_r = \frac{1}{2}\sum_\lambda \omega_\lambda^2\, I_\lambda \tag{4.4.20a}$$

die Energie der Rotationsbewegung des Kerns als Ganzem mit den Trägheitsmomenten (4.4.22) ist. In der hydrodynamischen Näherung sind die Trägheitsmomente (4.4.22) proportional dem Quadrat der Deformation β. Unter anderem ist für Kerne mit Kugelform $\beta = 0$ und in diesem Fall folglich $I_\lambda = 0$. Für $\gamma = 0$ erhalten wir aus (4.4.22) $I_1 = I_2 = 3B\,\beta^2$, $I_3 = 0$.

Führt man den Drehimpuls bezüglich der Achse λ über die Beziehung $\mathfrak{R}_\lambda = \omega_\lambda \mathfrak{J}_\lambda$ ein, so kann man die Rotationsenergie des Kerns in der Form

$$E_r = \sum_\lambda \frac{R_\lambda^2}{2 I_\lambda} \tag{4.4.25}$$

schreiben.

In einer folgerichtigen hydrodynamischen Kerntheorie ist die Gleichgewichtsform des Kerns eine Kugel. In diesem Fall ist $I_\lambda = 0$. Die Rotationsbewegung als besonderer Typ des angeregten Zustandes kugelförmiger Kerne darf deshalb nicht auftreten.

4.5. Kombiniertes oder quasimolekulares Kernmodell

a) Qualitative Betrachtung. Im kombinierten oder quasimolekularen Kernmodell (Kollektivmodell), das von A. Bohr vorgeschlagen wurde [4,23; 4,27], werden die nützlichen Eigenschaften des Schalen- und des Tröpfchenmodells vereinigt. Im kombinierten Modell berücksichtigt man, daß die Bewegung von Nukleonen außerhalb abgeschlossener Schalen eine Deformation der Schalenstruktur des „Kernrumpfes" hervorruft. Die Deformationsbewegungen hängen mit den kollektiven Bewegungen der Nukleonen im Kern zusammen und werden mit den Methoden der Hydrodynamik inkompressibler Flüssigkeiten beschrieben. Man muß natürlich beachten, daß sich die kollektiven Eigenschaften des Kerns von den Eigenschaften eines idealisierten Tröpfchens unterscheiden und nur angenähert so beschrieben werden können.

Die Deformation des Kerns wächst sehr schnell bei Vergrößerung der Zahl der Nukleonen außerhalb abgeschlossener Schalen. Sie erreicht ihren Maximalwert für Kerne, bei denen die äußerste Schale zu etwa $^2/_3$ aufgefüllt ist. Nähert man sich dem vollständigen Abschluß, so beginnen einzelne Nukleonen dem deformierenden Einfluß der übrigen entgegenzuwirken. Dadurch verringert sich die Gesamtdeformation des Kerns und verschwindet schließlich vollständig, wenn die betreffende Schale ganz besetzt ist. So kann man qualitativ die Quadrupolmomente der Kerne erklären. Quantitative Berechnungen mit Berücksichtigung des „self-consistent field" konnten jedoch noch nicht durchgeführt werden. Die Abschätzung der Quadrupolmomente wurde auf der Grundlage eines vereinfachten Modells vorgenommen, bei dem man voraussetzt, daß der Kern konstante Dichte besitzt und seine Deformierbarkeit (Oberflächenspannung) eine monotone Funktion der Massenzahl A ist [4,1; 4,28].

Unter dem Einfluß der Nukleonen, die sich außerhalb der abgeschlossenen Schalen befinden, wird der Kern zu einem Rotationsellipsoid mit den Halbachsen c und a deformiert. Ist die Kernladung gleichmäßig über das gesamte Ellipsoid verteilt, so entsteht das innere Quadrupolmoment

$$Q_0 = \frac{2}{5} Z (c^2 - a^2). \tag{4.5.1}$$

Bei kleinen Deformationen gilt

$$Q_0 = \frac{4Z}{5} R_0^2 \frac{\Delta R}{R_0}. \tag{4.5.2}$$

Hierbei wurde folgende Bezeichnung eingeführt:

$$\Delta R = c - a.$$

Besonders große Erfolge wurden mit dem kombinierten Kernmodell bei der Erklärung der ersten angeregten Zustände von gg-Kernen mit mittleren und großen Massenzahlen erzielt. Bei den sphäroidalen gg-Kernen ist die Projektion des Drehimpulses der Nukleonen auf die Symmetrieachse des Kerns gleich Null ($K = 0$). Die ersten angeregten Zustände solcher Kerne werden durch die Gleichung

$$E_J = \frac{\hbar^2}{2I} J(J+1) \tag{4.5.3}$$

gut beschrieben. Sie fällt mit der Formel für die Energiezustände eines rotierenden symmetrischen Kreisels mit dem Trägheitsmoment I zusammen. Diese Rotation unterscheidet sich jedoch wesentlich von der Rotation eines starren Körpers.

Ein Kern von der Form eines Rotationsellipsoids kann nur um eine zur Symmetrieachse des Kerns senkrechte Achse rotieren. Bei der Rotation eines starren Körpers besitzen alle seine Punkte die Winkelgeschwindigkeit

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum_i m_i r_i^2 = \frac{\omega^2 I_0}{2},$$

wobei r_i der Abstand des i-ten Teilchens von der Rotationsachse ist.

Haben wir es nicht mit einem starren Körper zu tun, so besitzen die Teilchen größere Bewegungsfreiheit. Der Körper läßt deshalb viel leichter eine Veränderung seiner Orientierung zu. Die Rotation wird mit einer kleineren Verschiebung der Teilchen verbunden sein, und das effektive Trägheitsmoment wird kleiner als I_0 (vgl. Abschn. 4.6.).

In der hydrodynamischen Näherung kann die Rotationsbewegung des Kerns durch die wirbelfreie kollektive Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit beschrieben werden, die das Volumen des Ellipsoids ausfüllt. Das Trägheitsmoment des Rotationsellipsoids ist (s. [4,29], S. 86)

$$I = \frac{MA}{5} \frac{(c^2 - a^2)^2}{c^2 + a^2}. \tag{4.5.4}$$

Hierbei sind c und a die große und die kleine Halbachse der Ellipse und MA die Kernmasse. Bei kleinen Abweichungen von der Kugelsymmetrie gilt

$$I = \frac{2MA}{5} R_0^2 \left(\frac{\Delta R}{R_0}\right)^2 = I_0 \left(\frac{\Delta R}{R_0}\right)^2. \tag{4.5.5}$$

Hierbei ist $I_0 = {}^2/_5\, MAR_0^2$ das totale Trägheitsmoment eines starren Körpers mit der Masse MA und dem Radius R_0. Das Trägheitsmoment eines Rotationsellipsoids kann man auch durch das Quadrat des Deformationsparameters des Kerns ausdrücken. Bei $\gamma = 0$ gilt nach Abschn. 4.4.

$$I = 3B\beta^2, \tag{4.5.6}$$

wobei $B = \frac{3}{8\pi} MAR_0^2$ ist und R_0 den Radius der Kugel bedeutet, deren Volumen gleich dem Kernvolumen ist. Vergleicht man (4.5.6) mit (4.5.5), so erhält man

$$\beta^2 = \frac{16\pi}{45} \left(\frac{\Delta R}{R_0}\right)^2. \qquad (4.5.7)$$

Der Rotationsenergie von gg-Kernen mit dem Drehimpuls J entspricht die Wellenfunktion $\varphi_{K=0}\, Y_{JM}$, wobei $\varphi_{K=0}$ den inneren Zustand des Kerns bestimmt. Die gg-Kerne besitzen gewöhnlich außer einer Symmetrieachse noch ein Symmetriezentrum. Die Richtung der Symmetrieachse des Kerns ist deshalb bis auf Drehung um 180° bestimmt. Die Wellenfunktion muß invariant gegenüber dieser Drehung sein. Das beschränkt die möglichen Rotationsquantenzustände des Kerns, ähnlich wie die Rotationszustände von zweiatomigen Molekülen mit identischen Kernen eingeschränkt sind. Es sind nur gerade Werte der Quantenzahl J möglich: 0, 2, 4, 6, ... Infolgedessen dürfen die gg-Kerne nur die Rotationsenergien

$$E_0 = 0, \qquad E_2 = \frac{3\hbar^2}{I}, \qquad E_4 = \frac{10\hbar^2}{I}, \qquad E_6 = \frac{21\hbar^2}{I}, \ldots$$

besitzen. Daraus folgt, daß die Energieniveaus von Rotationszuständen der gg-Kerne folgender *Intervallregel* genügen müssen:

$$E_2 : E_4 : E_6 : E_8 : \ldots = 1 : 3{,}33 : 7 : 12 : \ldots \qquad (4.5.8)$$

Die Intervallregel (4.5.8) wird durch das Experiment gut bestätigt.

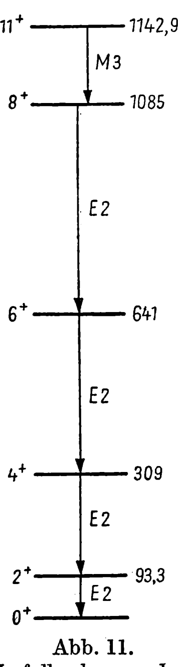


Abb. 11. Zerfallsschema des 5,5-h-Isomers $^{180}_{72}$Hf*

In Abb. 11 ist das Zerfallsschema des 5,5-h-Isomers des ^{180}Hf dargestellt, das beim Einfang von Neutronen durch den Kern ^{179}Hf gebildet wird. Beim Zerfall des isomeren Niveaus entsteht der Kern in einem Zustand mit dem Drehimpuls 8 und positiver Parität. Er geht durch γ-Kaskaden in den Grundzustand über. Es treten dabei Quadrupolstrahlungen auf. Ihre Energien verhalten sich wie 1 : 3,3 : 6,9 : 11,6. Das erfüllt recht gut die Intervallregel (4.5.8). Ähnliche Rotationszustände von gg-Kernen werden bei der Anregung dieser Kerne durch das COULOMB-Feld von vorbeifliegenden Teilchen, bei α-, β- und γ-Übergängen usw. beobachtet.

Kennt man die Energieniveaus der Rotationszustände von gg-Kernen, so kann man nach Gl. (4.5.3) das Trägheitsmoment des Kerns bestimmen und weiterhin aus Gl. (4.5.6) in der hydrodynamischen Näherung den Deformationsparameter β berechnen.

b) Quantitative Betrachtung. Im quasimolekularen oder kombinierten Kernmodell wird angenommen, daß die Nukleonen der vollständig besetzten Schalen (des „Kernrumpfes") nur durch ihre kollektiven Eigenschaften in

Erscheinung treten, die nach dem hydrodynamischen Modell beschrieben werden. Die Nukleonen außerhalb der abgeschlossenen Schalen bezeichnet man als *äußere Nukleonen.* Es wird angenommen, daß man ihre Bewegung in der Einzelteilchennäherung beschreiben kann, d. h., daß ihre Bewegung in einem mittleren Potentialfeld des Kernrumpfes erfolgt.

Die äußeren Nukleonen rufen durch die Wechselwirkung mit dem Kernrumpf Abweichungen seiner Gestalt von der Kugelform hervor (sie erzeugen einen „Druck" auf die Oberfläche des „Rumpfes"). Die Deformation der Rumpfoberfläche ruft ihrerseits eine Rückwirkung auf die Bewegung und die Wechselwirkung der äußeren Nukleonen untereinander hervor.

Von A. Bohr wurde eine Theorie für die Kerne entwickelt, die neben den abgeschlossenen Schalen nur ein äußeres Nukleon besitzen. Die Bohrsche Theorie wurde im weiteren von Ford [4,30] auch auf den Fall mehrerer äußerer Nukleonen verallgemeinert, wobei die unmittelbare Wechselwirkung zwischen diesen äußeren Nukleonen vernachlässigt wurde.

Das Potential der Wechselwirkung des äußeren Nukleons mit dem Rumpf werde durch die Funktion $V(r)$ dargestellt. Wir nehmen weiterhin an, daß bei einer Deformation des Kerns

$$r \to r' = r\,\frac{R(\vartheta, \varphi)}{R_0}$$

das Potential durch die gleiche Funktion, nur jetzt in den neuen Variablen, beschrieben wird, d. h., daß bei der Deformation $V(r)$ in $V(r')$ übergeht. Die Veränderung des Potentials kann man so auffassen, als würde eine zusätzliche Wechselwirkung zwischen dem Nukleon und dem Kernrumpf auftreten. In linearer Näherung erhält man unter Benutzung von (4.4.13)

$$H_W = V(r') - V(r) = r\,\frac{\partial V}{\partial r}\sum_\mu a_\mu Y_{2\mu}. \tag{4.5.9}$$

Liegt ein rechteckiger Potentialtopf der Tiefe V_0 vor, so erhalten wir aus (4.5.9)

$$H_W = -V_0 R_0\, \delta(r - R_0) \sum_\mu a_\mu Y_{2\mu}(\vartheta, \varphi). \tag{4.5.9a}$$

Hierbei sind r, ϑ, φ die Polarkoordinaten des äußeren Nukleons und die a_μ die Koordinaten, mit denen die Deformation der Kernoberfläche in dem mit dem Kern verbundenen Koordinatensystem charakterisiert wird.

Wir wollen annehmen, daß die Geschwindigkeit des Nukleons groß gegen die Bewegungen des Kerns als Ganzem ist. Dann kann man die Bewegung des Nukleons in adiabatischer Näherung betrachten und die Kernoberfläche als fixiert annehmen. Die über die Bewegungszustände des äußeren Nukleons gemittelte Wechselwirkungsenergie zwischen Nukleon und Kernoberfläche hängt von den Koordinaten der Kernoberfläche wie von Parametern ab und spielt folglich die Rolle einer zusätzlichen potentiellen Energie, welche die Schwingungen und die Gleichgewichtsform der Kernoberfläche bestimmt. Diese Betrachtungsweise erinnert an die adiabatische Methode zur Untersuchung der Bewegung der Elektronen und Kerne von Molekülen in der

Molekültheorie. Das kombinierte Kernmodell nennt man deshalb auch manchmal *quasimolekulares Kernmodell.*

Bei der Beschreibung der Bewegung des äußeren Nukleons nehmen wir an, daß die Spin-Bahn-Wechselwirkung so groß ist, daß sie nicht durch die Wechselwirkung des Nukleons mit der Oberfläche gestört wird, und daß j eine gute Quantenzahl ist. Der Mittelwert der Wechselwirkung (4.5.9a) ist für einen Nukleonenzustand, der durch die Quantenzahlen l, n, j, Ω beschrieben wird, gleich[1])

$$\langle H_W \rangle = T_{nl}\, \beta \cos\gamma\, \frac{3\Omega^2 - j(j+1)}{j(j+1)}. \tag{4.5.10}$$

Hierbei ist

$$T_{nl} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\, V_0\, R_0^3\, |u_{nl}(R_0)|^2, \tag{4.5.10a}$$

und $u_{nl}(R_0)$ bedeutet den Wert der Wellenfunktion des Nukleons auf der Kernoberfläche. Mit Ω wird die Projektion des Drehimpulses auf die Symmetrieachse des Kerns bezeichnet. Die Größe $^1/_2\, V_0\, R_0^3\, |u_{nl}(R_0)|^2$ ist gleich der kinetischen Energie des Nukleons, wenn vorausgesetzt wird, daß der Potentialtopf unendlich tief ist. Die Tiefe des Topfes wird gewöhnlich [4,30; 4,31] als konstant betrachtet und gleich 20 MeV gesetzt.

Aus (4.5.10) folgt, daß die mittlere Energie der Wechselwirkung zwischen Nukleon und Kernoberfläche für $j = {}^1/_2$, d. h. in den Zuständen $s_{1/2}$ und $p_{1/2}$, gleich Null ist. Wir betrachten im folgenden nur Kerne mit $j > {}^1/_2$.

Sind mehrere äußere Nukleonen in Zuständen mit n, l, j, Ω_i vorhanden, so wird ihre mittlere Wechselwirkung mit der Kernoberfläche durch die Gleichung

$$\langle H_W \rangle = A\, \beta \cos\gamma \tag{4.5.11}$$

wiedergegeben, wobei

$$A = T_{nl} \sum_i \frac{\{3\Omega_i^2 - j(j+1)\}}{j(j+1)} \tag{4.5.11a}$$

ist. Bei abgeschlossener Schale n, l, j ist die Summe $\sum_i \{3\Omega_i^2 - j(j+1)\}$

[1]) Die Formel (4.5.10) erhält man bei der Mittelung des Operators (4.5.9a) in Zuständen mit den Wellenfunktionen

$$\Psi_{nlj\Omega} = u_{nl}(r)\, \Phi_{j\Omega}(\vartheta, \varphi, \sigma),$$

wobei

$$\Phi_{j\Omega} = \sum_{m_s} (l\, {}^1/_2, \Omega - m_s, m_s \,|\, j\, \Omega)\, Y_{l,\Omega - m_s}(\vartheta, \varphi)\, \chi_{1/2\, m_s}(\sigma)$$

die Kugelfunktionen mit Spin sind. Es gilt

$$\langle H_W \rangle \equiv (n\, l\, j\, \Omega \,|\, H_W \,|\, n\, l\, j\, \Omega) = -V_0\, R_0^3\, |u_{nl}(R_0)|^2 \sum_\mu a_\mu (j\, \Omega \,|\, Y_{2\mu} \,|\, j\, \Omega).$$

Wird der Anhang 1 benutzt, so läßt sich zeigen, daß

$$(j\, \Omega \,|\, Y_{2\mu} \,|\, j\, \Omega) = -\frac{\delta_{\mu 0}}{4}\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\, \frac{3\Omega^2 - j(j+1)}{j(j+1)}$$

gilt. Setzt man dies sowie $a_0 = \beta \cos\gamma$ in die vorhergehende Gleichung ein, so erhält man (4.5.10).

über alle Nukleonen gleich Null. Wenn deshalb in einem Kern ein Nukleon zur Auffüllung der Schale l, n, j fehlt, so unterscheidet sich der Ausdruck für die Wechselwirkung (4.5.11) nur durch das Vorzeichen von (4.5.10).

Die Komponenten des Drehimpulses des Kernrumpfes $\hat{R}_\lambda$ werden durch die Komponenten des Gesamtdrehimpulses $\hbar \hat{J}_\lambda$ und die Drehimpulse der äußeren Nukleonen $\hat{j}_\lambda(i)$ folgendermaßen bestimmt:

$$\hat{R}_\lambda = \hbar [\hat{J}_\lambda - \sum_i \hat{j}_\lambda(i)]. \tag{4.5.12}$$

In der adiabatischen Näherung wirken die Operatoren $\hat{j}_\lambda(i)$ nur auf die „inneren" Variablen, d. h. auf die bezüglich der Achsen ξ, η, ζ „äußeren" Nukleonen, und wirken nicht auf die EULERschen Winkel, welche die Orientierung des Kerns im Raum festlegen. Die Komponenten des Operators $\hat{\mathfrak{j}}$ genügen bezüglich des Koordinatensystems ξ, η, ζ den Vertauschungsrelationen

$$\hat{j}_1 \hat{j}_2 - \hat{j}_2 \hat{j}_1 = i \hat{j}_3, \ldots \tag{4.5.13}$$

Der Operator $\hat{\mathfrak{J}}$ des Gesamtdrehimpulses des Kerns wirkt nur auf die EULERschen Winkel, welche die Orientierung des Kerns im Koordinatensystem x, y, z angeben. Die Komponenten des Operators des Gesamtdrehimpulses genügen bezüglich der Achsen x, y, z den üblichen Vertauschungsrelationen

$$\hat{J}_x \hat{J}_y - \hat{J}_y \hat{J}_x = i \hat{J}_z, \ldots \tag{4.5.14}$$

Wir interessieren uns für die Komponenten des Gesamtdrehimpulses $\hat{\mathfrak{J}}$ bezüglich der beweglichen Achsen ξ, η, ζ. Man kann diese Komponenten durch die Operatoren $\hat{J}_x$,$\hat{J}_y$ und $\hat{J}_z$ sowie durch die Richtungskosinus α_{x1}, α_{y1}, α_{z1} der Achsen des Systems ξ, η, ζ bezüglich des Systems x, y, z ausdrücken:

$$\hat{J}_1 = \alpha_{1x} \hat{J}_x + \alpha_{1y} \hat{J}_y + \alpha_{1z} \hat{J}_z, \ldots \tag{4.5.15}$$

Berücksichtigt man $\alpha_{1x} \hat{J}_y - \hat{J}_y \alpha_{1x} = i \alpha_{1z}, \ldots$, so kann man mit Hilfe von (4.5.15) und (4.5.14) durch unmittelbare Rechnung feststellen, daß sich die Vertauschungsrelationen

$$\hat{J}_1 \hat{J}_2 - \hat{J}_2 \hat{J}_1 = -i \hat{J}_3, \ldots \tag{4.5.16}$$

zwischen den Komponenten $\hat{J}_1$, $\hat{J}_2$, $\hat{J}_3$ von den üblichen Relationen (4.5.13) nur durch das Vorzeichen auf der rechten Seite unterscheiden. In der Theorie der Moleküle wurde auf diesen Umstand zuerst von KLEIN [4,32] hingewiesen.

Da in unserer Näherung die Operatoren $\hat{j}_1, \ldots$ und $\hat{J}_1, \ldots$ auf verschiedene Variable wirken, sind sie kommutativ.[1])

[1]) Diese wichtige Eigenschaft der Operatoren $\hat{\mathfrak{J}}$ und $\hat{\mathfrak{j}}$ gestattet, sie als unabhängige Operatoren zu betrachten (ähnlich den Operatoren des Bahndrehimpulses und des Spins) und ihre Addition nach den Regeln der quantenmechanischen Vektoraddition durchzuführen.

Für gg-Kerne in Zuständen mit definiertem Gesamtdrehimpuls, mit definierten Drehimpulsen der äußeren Nukleonen und definierten Projektionen auf die Symmetrieachse[1])

$$K = \sum_i \Omega_i = 0$$

kann man den Mittelwert des Operators der Rotationsenergie in der Form

$$\left\langle \sum_\lambda \frac{R_\lambda^2}{2I_\lambda} \right\rangle = \frac{\hbar^2}{4}\left(\frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2}\right) J(J+1) + W_r(\gamma, \beta) \tag{4.5.17}$$

schreiben. Hierbei ist

$$W_r(\gamma, \beta) = \hbar^2 \left(\frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2}\right) F(j, \Omega). \tag{4.5.18}$$

Mit $F(j, \Omega)$ wird eine Zahl bezeichnet, die nur vom Zustand der äußeren Nukleonen abhängt. Deshalb ist $W_r(\gamma, \beta)$ eine Funktion von β und γ (von denen die Trägheitsmomente I_1 und I_2 abhängen) und spielt in der adiabatischen Näherung die Rolle einer zusätzlichen potentiellen Energie der Oberflächenschwingungen des Kernrumpfes.

Die Funktion $W_r(\gamma, \beta)$ kann man in die potentielle Energie der Oberflächenschwingungen einbeziehen, die bei Berücksichtigung der Wechselwirkung (4.5.11) die Form

$$W(\gamma, \beta) = \frac{C}{2}\beta^2 + A\,\beta\cos\gamma + W_r(\gamma, \beta) \tag{4.5.19}$$

annimmt. Berücksichtigt man die explizite Abhängigkeit der Trägheitsmomente von γ und β:

$$I_1 = 4B\,\beta^2 \sin^2\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}\right),$$

$$I_2 = 4B\,\beta^2 \sin^2\left(\gamma + \frac{2\pi}{3}\right),$$

so ergibt sich, daß die potentielle Energie (4.5.19) bei vorgegebenem β ihr Minimum bei $\gamma = 0$ oder π annimmt. Diese Werte entsprechen Kernen mit axialer Symmetrie. Die Lage des Minimums hängt nicht vom Wert der Parameter ab, die in (4.5.19) eingehen. Da wir (4.5.19) durch Mittelung von (4.5.17) über Wellenfunktionen erhalten haben, die einer axialen Symmetrie des Kerns entsprechen, sind die Gleichgewichtswerte $\gamma = 0, \pi$ „self-consistent". Eine zweite Besonderheit der potentiellen Energie (4.5.19) ist, daß sie bei $\gamma = \pm\frac{\pi}{3}, \pm\frac{2\pi}{3}$ gegen ∞ geht.

Die Abhängigkeit der potentiellen Energie (4.5.19) von γ ergibt keine Parabel. Die Kurve erinnert eher an einen Potentialtopf mit sehr steilen

---

[1]) Solche Zustände sind nicht streng stationär, da einige nichtdiagonale Matrixelemente des Operators $\sum_\lambda \frac{R_\lambda^2}{2I_\lambda}$ verschieden von Null sind. Diese Matrixelemente sind um so kleiner, je größer die Massenzahl des Kerns ist und je stärker die Form der Kernoberfläche von der Kugelform abweicht. Wir werden annehmen, daß man den Einfluß der nichtdiagonalen Matrixelemente dieses Operators vernachlässigen kann (Näherung der starken Kopplung) [4,30].

Wänden. Deshalb ist es unmöglich, die Bedeutung der mit Veränderungen von γ verknüpften Schwingungen für die gesamte Anregungsenergie des Kerns durch Berechnung von $\frac{d^2 W}{d\gamma^2}$ an der Stelle des Minimums abzuschätzen. Außerdem muß für Kerne mit gerader Massenzahl die Wellenfunktion eine gerade Funktion von γ sein. Deshalb folgt auf den Zustand mit der Nullpunktsenergie erst der Zustand mit der Hauptquantenzahl 2. Man muß jedoch folgendes beachten: Die Frage, ob Abweichungen von der axialen Symmetrie möglich sind, erfordert eine Untersuchung der Bedingungen, unter denen die „self-consistent"-Werte von γ gestört sind, und kann nicht dadurch entschieden werden, daß man nur den Ausdruck (4.5.19) untersucht, der unter der Voraussetzung erhalten wurde, daß der Kern axialsymmetrisch ist.

Im weiteren werden wir $\gamma = \gamma_0 \equiv 0$ oder $\equiv \pi$ setzen, d. h., wir werden annehmen, daß der Kern axiale Symmetrie besitzt. In diesem Fall wird die potentielle Energie (4.5.19) durch folgenden Ausdruck bestimmt:

$$W_{\gamma_0}(\beta) = \frac{C}{2}\beta^2 + A\,\beta\cos\gamma_0 + \frac{\hbar^2 F(j,\,\Omega)}{6B\beta^2}. \tag{4.5.20}$$

Unter Berücksichtigung von (4.4.23), (4.4.24) und (4.5.17) kann man die Gesamtenergie der kollektiven Bewegungen im Kern in folgender Form schreiben:

$$E = \frac{B}{2}\dot{\beta}^2 + W_{\gamma_0}(\beta) + E_{\text{rot}},$$

wobei E_{rot} die Rotationsenergie des Kerns für $\gamma = 0, \pi$ ist:

$$E_{\text{rot}} = \frac{\hbar^2}{2I} J(J+1) = \frac{\hbar^2}{6B\beta^2} J(J+1). \tag{4.5.21}$$

Da der Spin der gg-Kerne im Grundzustand Null ist, hängt der Mittelwert des Quadrats des Drehimpulses nur mit der Rotation des Kerns als Ganzem zusammen, d. h., es wird

$$R^2 = \hbar^2 J(J+1).$$

Die Energie der kollektiven Bewegungen des Kerns kann man deshalb durch die kinetische und die potentielle Energie der Oberflächenschwingungen und durch die Rotationsenergie folgendermaßen ausdrücken:

$$E = \frac{B}{2}\dot{\beta}^2 + W_{\gamma_0}(\beta) + \frac{R^2}{6B\beta^2}. \tag{4.5.22}$$

Diese Ergebnisse lassen sich leicht auf Kerne mit ungerader Massenzahl verallgemeinern. Der Spin K eines axialsymmetrischen Kerns mit ungerader Massenzahl wird im Grundzustand durch die Summe der Projektionen der Drehimpulse der Nukleonen auf die Kernachse bestimmt: $K = \sum_i \Omega_i$. Der Gesamtdrehimpuls des Kerns wird durch die Quantenzahl $J \geqq K$ charakterisiert. Es ist in diesem Fall günstig, die Energie (4.5.21) so zu normieren, daß sie für $J = K$ gleich Null ist, d. h., man setzt vorteilhaft

$$E_{\text{rot}} = \frac{\hbar^2}{2I}\{J(J+1) - K(K+1)\}. \tag{4.5.23}$$

Die Gesamtenergie der kollektiven Bewegungen des Kerns nimmt dann die Form

$$E = \frac{B}{2}\dot{\beta}^2 + W_k(\beta) + \frac{\hbar^2\{J(J+1) - K(K+1)\}}{2I} \qquad (4.5.24)$$

an, wobei

$$W_k(\beta) = W_{\gamma_0}(\beta) + \frac{\hbar^2 K(K+1)}{2I}$$

die potentielle Energie darstellt, die von β und den Zuständen der äußeren Nukleonen abhängt.

4.6. Rotationsenergie und Trägheitsmoment nichtsphärischer Kerne

Die Rotationsenergie des Kerns läßt sich nur dann von der Gesamtanregungsenergie abtrennen, wenn der Kern beträchtlich von der Kugelform abweicht. Wie von Wigner [4,33] gezeigt wurde, kann die Wellenfunktion eines beliebigen Teilchensystems mit dem Gesamtdrehimpuls J und der Projektion M auf eine ausgezeichnete Richtung sowie den anderen möglichen Bewegungsintegralen, die wir der Kürze halber mit dem Buchstaben α bezeichnen, in der Form

$$\Psi_{JM\alpha}(r_1, r_2, \ldots, r_N) = \sum_K \varphi_{K,\alpha}(\ldots, q_i, \ldots)\, D^J_{MK}(\vartheta_i)$$

dargestellt werden. Hierbei ist $D^J_{MK}(\vartheta_i)$ die von den Eulerschen Winkeln ϑ_i, welche die Orientierung des mit dem Teilchensystem verbundenen Koordinatensystems ξ, η, ζ angeben, abhängige Wellenfunktion; die $\varphi_{MK,\alpha}(\ldots, q_i, \ldots)$ sind Wellenfunktionen, die von den Teilchenkoordinaten bezüglich des beweglichen Systems ξ, η, ζ abhängen. Die Quantenzahl K bestimmt die Projektion des Gesamtdrehimpulses J auf die ζ-Achse des beweglichen Koordinatensystems.

Wenn das Teilchensystem im Zustand J, α eine Symmetrieachse besitzt und wesentlich von der Kugelform abweicht, stellt K eine gute Quantenzahl dar. In diesem Fall kann sich das Teilchensystem in Zuständen befinden, die durch die Quantenzahlen α, J, M, K charakterisiert werden. Diesen Zuständen entspricht die Wellenfunktion

$$\Psi_{\alpha,JMK}(\ldots, r_i, \ldots) = \varphi_{MK,\alpha}(\ldots, q_i, \ldots)\, D^J_{MK}(\vartheta_i). \qquad (4.6.1)$$

Die Gesamtenergie des Systems ist gleich der Summe der Rotationsenergie und der inneren Energie.

Wenn das Teilchensystem außer der Symmetrieachse noch ein Symmetriezentrum besitzt, so ist das Koordinatensystem ξ, η, ζ nur bis auf Inversion der Richtung der Achsen ξ, η, ζ bestimmt (die Lage der Achsen ξ, η ist dabei überhaupt unbestimmt). Die Wellenfunktion (4.6.1) muß invariant gegenüber diesen Transformationen der Achsen ξ, η (und folglich der Eulerschen Winkel ϑ_i) sein. Der Inversion der Achsen ξ, η, ζ entspricht folgende Transformation der Eulerschen Winkel: $\{\vartheta_i\} \equiv \varphi, \vartheta, \psi \to \varphi + \pi, \pi - \vartheta, \pi - \psi$, und folgende Transformation der Wellenfunktionen: $D^J_{MK} \to (-1)^{J+K} D^J_{M,-K}$.

Da die physikalischen Ergebnisse nicht von der Vieldeutigkeit in der Wahl der Richtung der Achsen ξ, η, ζ abhängen dürfen, muß die Wellenfunktion (4.6.1) in der Form

$$\Psi_{\alpha,JMK}(\ldots, r_i, \ldots) = \varphi_{MK,\alpha}(q)\{D^J_{MK}(\vartheta_i) + (-1)^{J+K} D_{M,-K}(\vartheta_i)\} \quad (4.6.1\,\mathrm{a})$$

geschrieben werden. In diesem Fall hängt die Parität der Wellenfunktion (4.6.1a) bei Inversion aller Teilchenkoordinaten nur von der Parität der Wellenfunktion $\varphi_{MK,\alpha}(\ldots, q, \ldots)$ ab, welche die innere Bewegung beschreibt. Aus (4.6.1a) folgt unmittelbar, daß für $K = 0$ (gg-Kerne) nur Zustände mit geraden Werten des Gesamtdrehimpulses möglich sind, d. h., daß $J = 0, 2, 4, \ldots$ ist.

Der Rotationsenergie

$$E_{\text{rot}} = \frac{\hbar^2}{2I}\{J(J+1) - K(K+1)\} \quad (4.6.2)$$

eines axialsymmetrischen Kerns entspricht somit eine Wellenfunktion vom Typ (4.6.1a).[1] Wenn eine Abtrennung der kollektiven Freiheitsgrade möglich ist, die den Schwingungszuständen des Kerns entsprechen, so kann man die Wellenfunktion der inneren Bewegung angenähert als Produkt der Wellenfunktion $\Phi(\beta)$, welche die Oberflächenschwingungen des Kerns beschreibt, mit der Wellenfunktion $\chi_{K,\alpha}$, welche die Nukleonenkonfiguration bestimmt, darstellen.

$7/2^+$ — 75,67
$5/2^+$ — 67,25
$3/2^+$ — 7,65
$1/2^+$ — 0

Abb. 12. Schema der Rotationsniveaus des ^{239}Pu-Kerns

Die Gl. (4.6.2) bestimmt die Rotationsenergie des Kerns nur dann, wenn der Kernspin größer als $1/2$ ist. Wie schon weiter oben gesagt wurde, ist die mittlere Energie der Wechselwirkung des äußeren Nukleons mit der Oberfläche des Kerns bei $K = 1/2$ gleich Null. In diesem Fall wird die Rotationsenergie, wie von A. Bohr und Mottelson [4,27] gezeigt wurde, durch die Gleichung

$$E_{\text{rot}} = \frac{\hbar^2}{2I}\left\{J(J+1) + (-1)^{J+1/2} a\left(J + \frac{1}{2}\right)\right\} \quad (4.6.3)$$

bestimmt (a ist eine Konstante, die vom inneren Zustand des Kerns abhängt).

In Abb. 12 ist das Niveauschema des ^{239}Pu als Beispiel für die Rotationsbande eines Kerns mit dem Spin $1/2$ dargestellt. Dieses Niveauschema wird durch die Gl. (4.6.3) gut beschrieben, wenn man

$$\frac{\hbar^2}{2I} = 6{,}25\,\text{keV} \quad \text{und} \quad a = -0{,}58$$

setzt.

Benutzt man die experimentellen Werte für die Rotationsniveaus, so kann man über Gl. (4.6.2) die Trägheitsmomente der Kerne berechnen.

---

[1]) Die Rotationsenergie von nichtaxialen gg-Kernen wurde von Dawydow und Filippow berechnet [J. éksp. teor. Fiz. **35** (1958) H. 8 oder Nucl. Phys. 8 (1958) 237].

In Abb. 13 sind die Trägheitsmomente von gg-Kernen angeführt, die aus den Daten über die ersten angeregten $E(2^+)$-Zustände berechnet werden. Die Abbildung zeigt die Größe der Trägheitsmomente in Abhängigkeit von der Neutronenzahl. Es wurde ein Intervall zwischen zwei abgeschlossenen Neutronenschalen gewählt ($N = 82 \cdots 126$). Die experimentellen Daten wurden den Arbeiten [4,34] und [4,35] entnommen.

Im Abschn. 4.4. wurde gezeigt, daß das Trägheitsmoment I in der hydrodynamischen Näherung mit dem Deformationsparameter β über die Beziehung

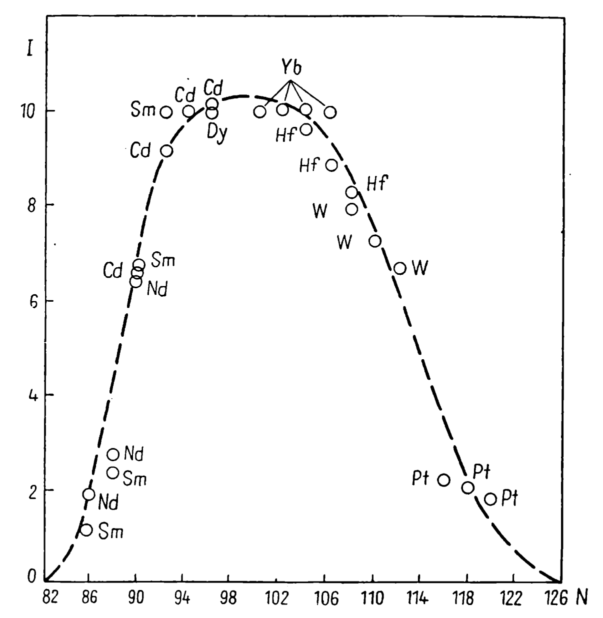


Abb. 13. Effektives Trägheitsmoment von gg-Kernen (in Einheiten 10^{-46} g cm^{-2}) als Funktion der Neutronenzahl

$I = 3B\beta^2$ zusammenhängt, wobei $B = \frac{3}{8\pi} MAR_0^2$ ist. Berücksichtigt man den Zusammenhang des Trägheitsmoments mit der Energie des ersten Rotationsniveaus von gg-Kernen $E(2^+) = 3\hbar^2/I$, so kann man schreiben:

$$\beta^2 = \frac{8\pi\hbar^2}{3MAR_0^2 E(2^+)}.$$

Wird $R_0 = 1{,}2\,A^{1/3} \cdot 10^{-13}$ cm gesetzt und der Zahlenfaktor berechnet, so erhält man die Beziehung

$$\beta^2 \approx \frac{2{,}4 \cdot 10^5}{A^{5/3} E_{[\text{keV}]}(2^+)}. \tag{4.6.4}$$

Man kann daraus für Kerne mit der Massenzahl A den Wert von β^2 bestimmen, wenn die Energie des ersten Rotationszustandes $E(2^+)$ bekannt ist.

In Abb. 14 sind die Werte von β_0^2 dargestellt, die mit Hilfe von (4.6.4) erhalten wurden. Diese Werte sind durch Kreise wiedergegeben und wurden nach der Skala auf der linken Seite der Abbildung abgetragen. In der gleichen Abbildung sind auch noch die Werte β_Δ^2 eingezeichnet, die durch Dreiecke wiedergegeben sind und nach der rechten Skala abgetragen wurden. Diese Werte berechnete man aus den Angaben über die inneren Quadrupolmomente

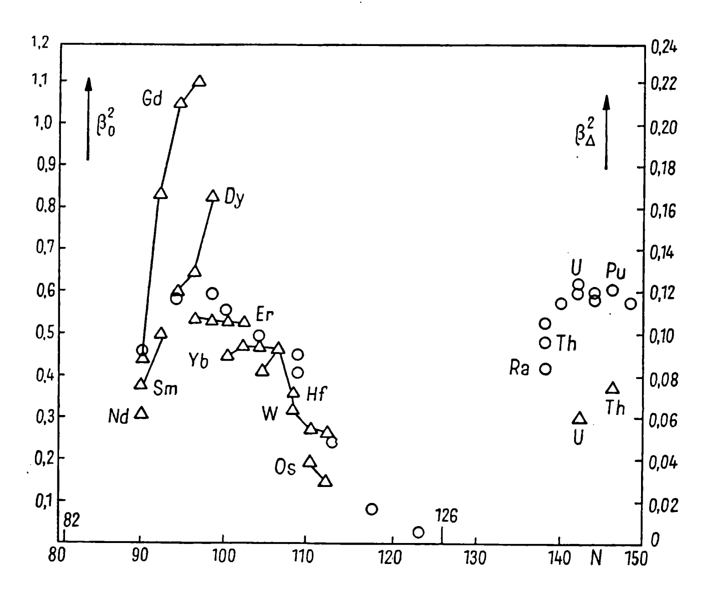


Abb. 14. Werte für die Quadrate der Parameter, welche die Abweichung des Kerns von der Kugelform charakterisieren

Die β_0^2-Werte sind als Kreise dargestellt. Die Zahlenwerte können an der linken Skala abgelesen werden. Sie wurden aus den Anregungsenergien des ersten Niveaus berechnet

Die β_Δ^2 -Werte sind als Dreiecke dargestellt. Die Zahlenwerte sind auf der rechten Skala abgetragen. Sie wurden aus den elektrischen Quadrupolmomenten bei der Messung der Anregungwahrscheinlichkeit bestimmt

der Kerne, wobei vorausgesetzt wurde, daß die Ladung gleichmäßig über das gesamte Kernvolumen verteilt ist.

Ein Vergleich von β_0^2 und β_Δ^2 zeigt, daß die beiden Größen sehr ähnlich von der Neutronenzahl abhängen. Beide Größen besitzen Maxima im Gebiet $N \approx 95$ und 145. Die Absolutwerte von β_0^2 und β_Δ^2 fallen jedoch nicht zusammen. Für Kerne mit einer Neutronenzahl zwischen 85 und 115 sind die β_0^2-Werte etwa fünfmal größer als die Werte von β_Δ^2. Im Gebiet $N > 135$ überwiegt β_0^2 noch mehr.

Die Größe β_Δ^2 charakterisiert die Verteilung (vom Quadrupoltyp) der Ladungen im Kern. Der Umstand, daß $\beta_0^2 \neq \beta_\Delta^2$ ist, deutet darauf hin, daß entweder die hydrodynamische Beschreibung bei der Berechnung der Träg-

heitsmomente nicht verwendet werden kann oder daß sich die Verteilung der Masse von der Ladungsverteilung im Kern unterscheidet. Nach unseren gegenwärtigen Kenntnissen ist die zweite Interpretation wenig wahrscheinlich.

Nimmt man an, daß die Ladung ebenso verteilt ist wie die Masse des Kerns, so charakterisiert β_Δ^2 die Abweichung des Kerns von der Kugelform. Hat man das Trägheitsmoment des Kerns nach der Beziehung $I = 3B\,\beta_\Delta^2$ für ein gegebenes β_Δ^2 berechnet und vergleicht es mit den experimentellen Daten über die Energie des ersten Rotationsniveaus, so kann man Rückschlüsse auf die Anwendbarkeit der hydrodynamischen Näherung ziehen. Ein solcher Vergleich wird in Abb. 15 durchgeführt. Die gestrichelte Linie stellt das Verhältnis des nach der Gleichung $I = 3B\,\beta_\Delta^2$ berechneten Trägheitsmoments zum Trägheitsmoment des starren Körpers I_{starr} dar. Die Punkte zeigen das Verhältnis des Trägheitsmoments, das aus den Werten der Energie $E(2^+)$ für Kerne mit vorgegebenem β_Δ^2 bestimmt wurde, zum Trägheitsmoment des starren Körpers.

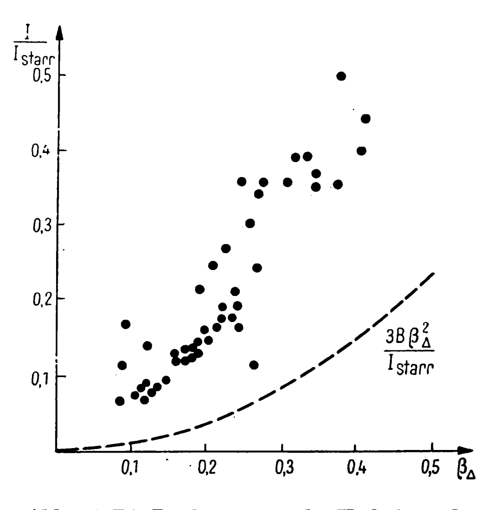


Abb. 15. Die Punkte zeigen das Verhältnis des Trägheitsmoments, das sich aus den Angaben über das erste angeregte Niveau ergab, zum Trägheitsmoment des starren Körpers in Abhängigkeit von den Deformationsparametern, die aus den Daten über die Lebensdauer des Niveaus gewonnen wurden

Die gestrichelte Linie stellt das Verhältnis des Trägheitsmoments der hydrodynamischen Theorie zum Trägheitsmoment des starren Körpers dar

Da das hydrodynamische Kernmodell sehr grob ist, erschienen in letzter Zeit zur Beschreibung der Rotation einige Arbeiten, in denen der Versuch gemacht wurde, das Trägheitsmoment der Kerne unter Benutzung anderer Modellvorstellungen zu berechnen. Die strengste Aufgabenstellung wäre dabei, die Energie eines Systems von Nukleonen zu berechnen, die sich in Zuständen mit bestimmten Werten des Drehimpulses befinden, und diese Energie näherungsweise als Summe der inneren Energie bezüglich eines mit dem Kern verbundenen Koordinatensystems und der Rotationsenergie des Kerns darzustellen. Die praktische Lösung dieser Aufgabe ist schwierig zu verwirklichen (vgl. z. B. Dawydow und Filippow [4,36] sowie die Arbeiten von Tamura, Nataf, Lipkin u. a. [4,37]). Eine weniger strenge Formulierung wurde von Inglis vorgeschlagen [4,38]. Zur Berechnung des Trägheitsmoments des Kerns betrachtet Inglis ein System von Teilchen, die sich in einem mit konstanter Winkelgeschwindigkeit langsam rotierenden Feld befinden, das in Form eines dreidimensionalen axialsymmetrischen Oszillatorpotentials gewählt wird. Hat man die Energieänderung des Systems, die

durch Rotationen hervorgerufen wird, berechnet, so kann man das effektive Trägheitsmoment eines solchen Teilchensystems bestimmen. Das Modell von Inglis wird kurz als „cranking model" bezeichnet. In dieser Benennung kommt bereits sein Hauptmangel zum Ausdruck. Er besteht in folgendem: Die Koordinaten, welche das Feld beschreiben, sind überflüssige Variable der Aufgabe, und ihre zeitliche Veränderung (Rotation) wird von außen vorgegeben.

Zur Veranschaulichung der Methode von Inglis betrachten wir das einfache Beispiel eines Systems aus einem Teilchen, das sich in einem mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse rotierenden Feld V befindet. Der Zustand des Systems wird im ruhenden Koordinatensystem durch die Schrödinger-Gleichung

$$\left[i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\varphi} - K - V(r, \vartheta, \varphi + \omega t)\right]\psi(r, \vartheta, \varphi, t) = 0 \tag{4.6.5}$$

beschrieben, wobei das Zeichen φ an der Ableitung nach der Zeit bedeutet, daß diese Ableitung unter der Bedingung zu bilden ist, daß φ eine unabhängige Variable darstellt. Wir transformieren die Gl. (4.6.5) auf das zusammen mit dem Feld rotierende Koordinatensystem

$$r' = r, \qquad \vartheta' = \vartheta, \qquad \varphi' = \varphi - \omega t. \tag{4.6.6}$$

In diesem System sind r', ϑ', φ' die unabhängigen Variablen. Die Differentiation unter diesen Bedingungen werden wir mit $(\partial/\partial t)_{\varphi'}$ bezeichnen. Unter Berücksichtigung von (4.6.6) gilt dann

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\varphi} = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\varphi'} + \omega\frac{\partial}{\partial\varphi'}.$$

Die Gl. (4.6.5) kann man somit im rotierenden Koordinatensystem in der Form

$$\left[i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\varphi'} - H' + i\hbar\omega\frac{\partial}{\partial\varphi'}\right]\psi(r', \vartheta', \varphi', t) = 0 \tag{4.6.7}$$

schreiben, wobei

$$H' = K + V(r', \vartheta', \varphi')$$

ein Hamilton-Operator ist, der nicht explizit von der Zeit abhängt. Führt man den Operator der Projektion des Drehimpulses auf die z-Achse

$$\hat{J}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi'}$$

ein, so lautet Gl. (4.6.7)

$$\left[i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\varphi'} - H' - \omega\hat{J}_z\right]\psi(r', \vartheta', \varphi', t) = 0. \tag{4.6.8}$$

Wir betrachten die stationären Lösungen der Gl. (4.6.8) im rotierenden Koordinatensystem, d. h., wir setzen

$$\psi = \Phi(r', \vartheta', \varphi')\exp\left(-i\frac{E't}{\hbar}\right). \tag{4.6.9}$$

Setzen wir dies in (4.6.8) ein, so erhalten wir eine Gleichung für Φ:

$$(H' - E')\,\Phi = -\omega\,\hat{J}_z\,\Phi. \tag{4.6.10}$$

Bei kleinen Winkelgeschwindigkeiten ist die rechte Seite von (4.6.10) klein, und man kann die Gleichung mit den Methoden der Störungsrechnung lösen. In der nullten Näherung wird

$$(H' - \varepsilon_n)\,\Phi_n^0 = 0. \tag{4.6.11}$$

Wenn ε_0 der niedrigsten Energie des Systems bei $\omega = 0$ entspricht, so kann man für kleine ω die Wellenfunktion in der Form

$$\Phi = a_0\,\Phi_0^0 + \sum_{n\neq 0} a_n\,\Phi_n^0$$

ansetzen, wobei

$$|a_0|^2 = 1 - \sum_{n\neq 0} |a_n|^2, \qquad a_n = \omega\,\frac{(0\,|\hat{J}_z|\,n)}{\varepsilon_0 - \varepsilon_n} \ll 1$$

ist.

Die Energie des Systems im gestrichenen System wird dann durch die Gleichung

$$E' = \int \Phi\,H\,\Phi\,d\tau = |a_0|^2\,\varepsilon_0 + \sum_{n\neq 0} |a_n|^2\,\varepsilon_n = \varepsilon_0 - \omega^2 \sum_{n\neq 0} \frac{|(0\,|\hat{J}_z|\,n)|^2}{\varepsilon_n - \varepsilon_0}$$

bestimmt. Betrachtet man nach Inglis [4,38] die Änderung der Teilchenenergie, welche durch die Rotation des Feldes hervorgerufen wird, als Rotationsenergie, d. h., schreibt man im ruhenden Koordinatensystem

$$E = \varepsilon_0 + \omega^2 \sum_{n\neq 0} \frac{|(0\,|\hat{J}_z|\,n)|^2}{\varepsilon_n - \varepsilon_0},$$

so erhält man aus der Gleichung

$$\frac{\omega^2 I}{2} = \omega^2 \sum_{n\neq 0} \frac{|(0\,|\hat{J}_z|\,n)|^2}{\varepsilon_n - \varepsilon_0}$$

eine Beziehung für das effektive Trägheitsmoment:[1])

$$I = 2 \sum_{n\neq 0} \frac{|(0\,|\hat{J}_z|\,n)|^2}{\varepsilon_n - \varepsilon_0}. \tag{4.6.12}$$

Wenn das Potential $V(r, \vartheta, \varphi)$ eine Symmetrieachse besitzt und die z-Achse mit dieser Symmetrieachse zusammenfällt, so sind alle nichtdiagonalen Matrixelemente $(0\,|J_z|\,n)$ gleich Null. Gl. (4.6.12) bestimmt somit das Trägheitsmoment für Rotationen senkrecht zur Symmetrieachse des Kerns.

Durch eine einfache Verallgemeinerung der durchgeführten Ableitung kann man einen Ausdruck für das effektive Trägheitsmoment von Teilchensystemen

[1]) Der Drehimpuls ωI wird bekanntlich durch die Energie E' des Körpers im rotierenden Koordinatensystem durch die Beziehung $\omega I = -\frac{\partial E'}{\partial \omega}$ ausgedrückt. Diese Beziehung gestattet, das Trägheitsmoment (4.6.12) unmittelbar aus E' zu erhalten.

erhalten, die sich in einem äußeren rotierenden Feld befinden. Das Trägheitsmoment des Teilchensystems wird ebenfalls durch Gl. (4.6.12) beschrieben, wenn man unter J_z die Summe der Projektionen der Drehimpulse aller Teilchen des Systems versteht und Φ_n sowie ε_n als Eigenfunktionen und Energieeigenwerte des Teilchensystems im ruhenden Feld betrachtet.

Der Ausdruck für das Trägheitsmoment (4.6.12) wurde in der Arbeit von A. Bohr und Mottelson [4,39] untersucht. Sie zeigten, daß das nach (4.6.12) berechnete Trägheitsmoment größer als das in der hydrodynamischen Näherung berechnete Trägheitsmoment ist und daß es im Grenzfall vieler Teilchen gegen das Trägheitsmoment des starren Körpers geht. Dies konnte nicht befriedigen. A. Bohr und Mottelson [4,39] versuchten deshalb, es durch die Berücksichtigung von Restwechselwirkungen zwischen Nukleonen zu verbessern. Unter Restwechselwirkung versteht man dabei die Differenz zwischen der tatsächlichen Wechselwirkung der Nukleonen und ihrer Wechselwirkung mit dem „self-consistent field". Zu solchen Wechselwirkungen gehört z. B. der Paarungseffekt der Nukleonen in gg-Kernen. Dieser Effekt führt dazu, daß die Abstände der Einzelteilchenniveaus in gg-Kernen vergrößert werden. Entsprechend vergrößert sich die Energiedifferenz $\varepsilon_n - \varepsilon_0$ im Nenner von (4.6.12) gegenüber dem Fall unabhängiger Teilchen im „self-consistent field". Im Vergleich zum Trägheitsmoment des starren Körpers führt das zu einer Verringerung des Trägheitsmoments (4.6.12). Quantitativ wurde diese Frage noch nicht ausreichend untersucht.

4.7. Die elektrischen Quadrupolmomente und das kombinierte Kernmodell

Im kombinierten Kernmodell wird angenommen, daß sich das Quadrupolmoment des Kerns aus dem Quadrupolmoment Q_{koll} der Deformation des Kernrumpfes und dem Quadrupolmoment Q_{p} der nichtsphärischen Verteilung der äußeren Nukleonen additiv zusammensetzt:

$$Q = Q_{\text{koll}} + Q_{\text{p}}.$$

Für Kerne, die weit entfernt von magischen Kernen liegen, besitzt Q_{koll} manchmal einen um den Faktor 20 größeren Wert als Q_{p}. Die Berücksichtigung von Q_{koll} gestattet, wesentliche Besonderheiten der experimentell beobachteten Quadrupolmomente einiger Atomkerne zu erklären.

Als Operator des inneren Quadrupolmoments des Kerns wird der Ausdruck

$$\hat{Q} = 2\sqrt{\frac{4\pi}{5}} \sum_{i=1}^{Z} r_i^2 Y_{20}(\vartheta_i, \varphi_i) \tag{4.7.1}$$

definiert. Hierbei sind Z die Kernladungszahl, und r_i, ϑ_i, φ_i die Kugelkoordinaten des i-ten Protons in dem mit dem Kern verbundenen Koordinatensystem. Nach A. Bohr und Mottelson [4,27] werden die Kollektivkoordi-

naten a_μ bei gleichförmiger Nukleonenverteilung durch die Koordinaten der individuellen Nukleonen über die Beziehung

$$a_\mu = \frac{4\pi}{3A} \sum_{i=1}^{A} \left(\frac{r_i}{R}\right)^2 Y_{2\mu}(\vartheta_i, \varphi_i)$$

bestimmt. Wenn die elektrische Ladung gleichförmig im Kern verteilt ist, läßt sich diese Gleichung in folgender Form schreiben:

$$a_\mu = \frac{4\pi}{3Z} \sum_{i=1}^{Z} \left(\frac{r_i}{R}\right)^2 Y_{2\mu}(\vartheta_i, \varphi_i).$$

Vergleicht man dies mit (4.7.1), so kann man sich überzeugen, daß der Operator des inneren Quadrupolmoments des Kerns unmittelbar durch die Koordinate der Kollektivbewegung $a_0 = \beta \cos\gamma$ über die Beziehung

$$\hat{Q}_{\text{koll}} = \frac{3ZR^2}{\sqrt{5\pi}} \beta \cos\gamma \tag{4.7.2}$$

ausgedrückt wird.

Um den Wert des inneren Quadrupolmoments für einen bestimmten Zustand des Kerns berechnen zu können, muß (4.7.2) über die Kollektivbewegungen dieses Zustandes gemittelt werden. So erhält man u. a. das innere Quadrupolmoment des Grundzustandes des Kerns durch Mittelung von (4.7.2) über die Nullpunktsschwingungen der Kernoberfläche:

$$Q^0_{\text{koll}} = \frac{3ZR^2}{\sqrt{5\pi}} \langle \beta \cos\gamma \rangle_0. \tag{4.7.3}$$

Bei der Berechnung von (4.7.3) wird gewöhnlich angenommen, daß

$$\langle \beta \cos\gamma \rangle_0 = \beta_0 \cos\gamma_0$$

ist, wobei β_0 und γ_0 die Werte der Kollektivkoordinaten β und γ sind, die dem Minimum der potentiellen Energie (4.5.19) entsprechen. In einer Arbeit von Dawydow und Filippow [4,40] wird jedoch gezeigt, daß im Grundzustand des Kerns $|\langle \beta \cos\gamma \rangle_0| > |\beta_0 \cos\gamma_0|$ gilt. Diese Ungleichung kann man bei hinreichend großen Werten von β_0 näherungsweise durch die entsprechende Gleichung ersetzen.

Bei der quantitativen Berechnung der Quadrupolmomente der Kerne kommt man auch deshalb nicht zu befriedigenden Ergebnissen, weil die Werte der Parameter C und B, welche in die potentielle Deformationsenergie (4.5.19) eingehen, nicht bekannt sind. Der Koeffizient C hängt anscheinend wesentlich vom Zustand der Nukleonen im Kern ab. Dies wird dadurch bestätigt, daß die Kerne in der Nähe von magischen Kernen eine besonders große Stabilität gegen Deformationen ihrer Form besitzen. Berücksichtigt man dies und beschränkt man sich auf eine qualitative Betrachtung, so kann man folgende Beziehung annehmen:

$$Q^0_{\text{koll}} \approx \frac{3ZR^2}{\sqrt{5\pi}} \beta_0 \cos\gamma_0. \tag{4.7.4}$$

Die Größe β_0, bei der die potentielle Energie (4.5.19) ihren Minimalwert besitzt, wird aus einer Gleichung vierten Grades bestimmt:

$$\beta_0 = -\frac{A}{C}\cos\gamma_0 + \frac{\hbar^2\{K(K+1) + F(j,\,\Omega)\}}{3CB\beta_0^3}. \tag{4.7.5}$$

Hierin ist $\gamma_0 = 0$ zu setzen, wenn

$$A = T_{nl}\frac{\sum\limits_i \{3\Omega_i^2 - j(j+1)\}}{j(j+1)} \leqq 0, \tag{4.7.6}$$

und $\gamma_0 = \pi$, wenn A positiv ist.

Bei Kernen, die weit entfernt von magischen Kernen liegen, überwiegt das durch die kollektiven Freiheitsgrade bedingte Quadrupolmoment ($\beta_0 > 1/Z$). Dann ist das erste Glied auf der rechten Seite der Gl. (4.7.5) groß gegen das zweite, und β_0 wird in nullter Näherung durch

$$\beta_0 = -\frac{A}{C}\cos\gamma_0$$

bestimmt. Wird dieser Wert in (4.7.4) eingesetzt und werden die möglichen Werte von γ_0 (0 oder π) berücksichtigt, so erhält man

$$Q_{\text{koll}}^0 = -\frac{3ZR^2}{\sqrt{5\pi}}\frac{A}{C}. \tag{4.7.7}$$

Besetzen die Nukleonen alle Zustände mit gegebenem j, so entsteht keine Deformation des Kerns, da

$$3\sum_{\Omega=-j}^{j}\Omega^2 = j(j+1)(2j+1)$$

und $A = 0$ ist. Wenn sich außerhalb der abgeschlossenen Schalen ein Nukleon im Zustand $|\Omega| = j \geqq {}^3/_2$ befindet (was der kleinsten inneren Energie des Kerns entspricht), so gilt

$$Q_{\text{koll}} = -\frac{3ZR^2}{\sqrt{5\pi}}\frac{T_{nl}}{C}\frac{2j-1}{j+1} < 0. \tag{4.7.8}$$

In diesem Fall besitzt der Kern die Gestalt eines abgeplatteten Rotationsellipsoids. Wenn an der abgeschlossenen Schale ein Nukleon mit $|\Omega| = j$ fehlt, so gilt

$$Q_{\text{koll}} = \frac{3ZR^2}{\sqrt{5\pi}}\frac{T_{nl}}{C}\frac{2j-1}{j+1} > 0. \tag{4.7.9}$$

In diesem Fall besitzt der Kern die Gestalt eines verlängerten Rotationsellipsoids.

Der Wert von Q_{koll} wächst, wenn die Zahl der äußeren Nukleonen vergrößert wird (oder wenn mehrere Nukleonen bis zur abgeschlossenen Schale fehlen). Der Einfluß der Schalenstruktur auf die Quadrupolmomente findet somit durch die kollektive Deformation des Kerns seinen Ausdruck.

Das Experiment bestätigt, daß Kerne mit einem Nukleon über die abgeschlossenen Schalen hinaus negative Quadrupolmomente besitzen, so z. B.

^{17}O ($d_{5/2}$), ^{63}Cu ($p_{3/2}$), ^{121}Sb ($d_{5/2}$), ^{123}Sb ($g_{7/2}$), ^{209}Bi ($h_{9/2}$) u. a. Kerne, bei denen ein Nukleon an der besetzten Schale fehlt, besitzen ein positives Quadrupolmoment, so z. B. ^{11}B ($p_{3/2}$), ^{35}S ($d_{3/2}$), ^{113}In ($g_{9/2}$) u. a.

Wenn sich außerhalb der besetzten Schalen nicht nur ein Nukleon befindet oder bis zum Abschluß der Schale mehrere Nukleonen fehlen, so hängen Größe und Vorzeichen des Quadrupolmoments wesentlich von der Lage der Energieniveaus der äußeren Nukleonen in diesen deformierten Kernen ab. Von MOSZKOWSKI und TOWNES [4,41] wurde das Energieminimum des Kerns als Funktion der Gestaltsabweichung des Kerns von der Kugelform berechnet. Sie vernachlässigten dabei die Wechselwirkung zwischen den äußeren Nukleonen. Diese Rechnungen zeigten, daß Zustände mit positiven Quadrupolmomenten bei großen Gestaltsänderungen energetisch tiefer liegen als diejenigen mit den entsprechenden negativen Quadrupolmomenten.[1])

Wenn man die elektrische Wechselwirkung nicht berücksichtigt, so erzeugen äußere Protonen und äußere Neutronen gleiche Deformationen des Kerns. Deshalb besitzen die Quadrupolmomente benachbarter Kerne mit einem ungeraden Proton bzw. ungeraden Neutron vergleichbare Werte.

Aus den experimentellen Daten für die Quadrupolmomente kann man auf die Deformierbarkeit des Kerns und deren Abhängigkeit von der Schalenstruktur schließen. Die ‚inneren' Quadrupolmomente der Kerne, d. h. die Quadrupolmomente Q_0 bezüglich des mit dem Kern verbundenen Koordinatensystems, gehen in Ausdrücke ein, von denen einerseits die Wahrscheinlichkeit der COULOMB-Anregung von Rotationsniveaus durch schnelle geladene Teilchen (s. Abschn. 11.10.) abhängt und die andererseits die Wahrscheinlichkeit von γ-Übergängen zwischen Rotationsniveaus bestimmen (s. Abschn. 11.5.). Werden diese Wahrscheinlichkeiten gemessen, so kann man auch die entsprechenden Werte von Q_0 bestimmen. Durch diese Meßmethoden können auch die elektrischen Quadrupolmomente der gg-Kerne bestimmt werden, deren Spin gleich Null ist. Die Übereinstimmung zwischen den experimentellen Werten von Q_0 und den tatsächlichen Werten hängt neben den experimentellen Fehlern auch von der Genauigkeit der theoretischen Ausdrücke für die oben erwähnten Übergangswahrscheinlichkeiten ab.

Für Kerne mit dem Spin $J \geqq 1$ können die elektrischen Quadrupolmomente auch aus den spektroskopischen Angaben über die Hyperfeinstruktur der Spektrallinien bestimmt werden. Bei diesen Messungen wird unmittelbar

---

[1]) Qualitativ erhält man dieses Resultat, wenn man die Veränderung der Oberflächenenergie und der elektrostatischen Energie des Kernrumpfes bei Abweichungen seiner Gestalt von der Kugelform betrachtet. Beschränkt man sich auf Glieder 3. Ordnung in $a = \beta \cos\gamma$, so ist die Energieänderung [4,42]

$$\Delta E = 4\pi R \sigma \{0{,}4(1 - x)\, a^2 - (0{,}0381 + 0{,}07619 x)\, a^3\}, \tag{4.7.10}$$

wobei σ die Oberflächenspannung und $x = \dfrac{3Z^2 e^2}{40\pi R^3 \sigma}$ das Verhältnis der Hälfte der COULOMB-Energie zur Oberflächenenergie ist. Das zweite Glied in (4.7.10) liefert bei großen Deformationen, die positiven Quadrupolmomenten entsprechen, eine Verringerung der Energie.

die Energie der Wechselwirkung zwischen dem elektrischen Feld der Elektronenhülle des Atoms und dem Mittelwert des elektrischen Quadrupolmoments Q bestimmt, und zwar in Zuständen, in denen die Projektion des Spins J auf die durch das elektrische Feld ausgezeichnete Richtung gleich J ist. Für Kerne, die wesentlich von der Kugelform abweichen ($\beta_0 > 0{,}1$), hängt das gemessene Quadrupolmoment Q mit dem ‚inneren' elektrischen Quadrupolmoment Q_0 über folgende Beziehung zusammen (s. Anhang 2.1):

$$Q = Q_0 \frac{J(2J-1)}{(J+1)(2J+3)}.$$

Der Projektionsfaktor $P_Q = \frac{J(2J-1)}{(J+1)(2J+3)}$, der das Verhältnis des Quadrupolmoments bei vorgegebenem Zustand Ψ_{JJ} des Kerns zu seinem inneren Quadrupolmoment Q_0 bestimmt, verringert stark den gemessenen Wert von Q. Bei $J = 1$ ist er gleich $^1/_{10}$, bei $J = {}^3/_2$ gleich $^1/_5$, bei $J = 2$ ist $P_Q = {}^2/_7$, bei weiterer Vergrößerung von J geht der Projektionsfaktor langsam gegen 1.

Bei der Bestimmung von Q durch spektroskopische Messungen hängt die Genauigkeit neben den experimentellen Fehlern noch von der Genauigkeit bei der Berechnung des Gradienten des elektrischen Feldes im Atom ab. Diese Rechnungen werden mit einer Genauigkeit von $4 \cdots 40\%$ ausgeführt.

Für einige Kerne sind in der Tab. 10 die experimentellen Werte des inneren Quadrupolmoments Q_0 (in Einheiten 10^{-24} cm^2) angeführt, wie sie sich aus den 3 Methoden ergeben: Die Werte Q_0^s sind Resultate spektroskopischer Messungen, die Q_0^r wurden aus Messungen der Lebensdauer von Rotationsniveaus bestimmt und die Q_0^q aus der Wahrscheinlichkeit der Coulomb-Anregung von Rotationsniveaus. In eckigen Klammern sind die Literaturhinweise angegeben.

Tabelle 10

Die inneren Quadrupolmomente einiger Kerne

Kern	Spin	Q_0^s	Q_0^r	Q_0^q
^{193}Ir	$^3/_2$	—	—	3,2 [4,43]
^{166}Er	0	—	7,5 [4,39]	7,8 [4,44]
^{167}Er	$^7/_2$	≈ 20 [4,27]	—	—
^{175}Lu	$^7/_2$	8 [4,46]	8,8 [4,39]	8,2 [4,44]
^{180}Hf	0	—	7,2 [4,39]	7,1 [4,44]
^{181}Ta	$^7/_2$	6 [4,46]	7,0 [4,48]	7 [4,50]
^{234}U	0	—	6 [4,49]	—
^{235}U	$^5/_2$	22 [4,45]	—	9 [4,44]
^{232}Th	0	—	—	5,7 [4,43]
^{238}U	0	—	8 [4,27]	6,9 [4,43]
^{182}W	0	—	6,9 [4,39]	7 [4,27]
^{185}Re	$^5/_2$	7,85 [4,47]	—	4,2 [4,43]
^{187}Re	$^5/_2$	7,28 [4,47]	—	5,1 [4,43]
^{239}Pu	$^1/_2$	—	—	8,3 [4,44]

4.8. Die magnetischen Momente und das kombinierte Kernmodell

Wie wir bereits im Abschn. 4.2. bemerkten, werden die magnetischen Momente der Kerne durch das Schalenmodell des Kerns nur grob erklärt. Die Berücksichtigung der Wechselwirkung zwischen den äußeren Nukleonen und die Berücksichtigung der Abweichungen von den reinen Kopplungsvarianten (LS- oder jj-Kopplung) verbessert die Übereinstimmung der theoretischen Werte mit dem Experiment. Die magnetischen Momente einiger Kerne können jedoch nur erklärt werden, wenn man den Einfluß von Nukleonen berücksichtigt, die zu abgeschlossenen Schalen gehören. Dieser Einfluß wird im kombinierten Kernmodell berücksichtigt, und man kann hoffen, daß das kombinierte Kernmodell eine umfassendere Beschreibung der magnetischen Momente der Kerne ermöglicht.

Wenn der Kern axialsymmetrisch ist, so wird der Zustand eines äußeren Nukleons durch die Projektion (Ω) seines Drehimpulses auf die Symmetrieachse charakterisiert. In einem System, das aus einem deformierten Kernrumpf und einem äußeren Nukleon besteht, besitzt dann der Operator des magnetischen Moments in Einheiten des Kernmagnetons die Form

$$\hat{\vec{\mu}} = g_\Omega \hat{\Omega}\, \mathfrak{n} + g_R \hat{\mathfrak{R}}. \tag{4.8.1}$$

Hierbei sind $\mathfrak{n}$ der Einheitsvektor in Richtung der Symmetrieachse, g_Ω das gyromagnetische Verhältnis für ein Nukleon, das sich im axialen Feld des Kerns bewegt, $g_R \approx Z/A$ das gyromagnetische Verhältnis, das mit der Bewegung des Kerns als Ganzem zusammenhängt [4,51] (es wird angenommen, daß die Ladung des Kerns gleichförmig über das gesamte Kernvolumen verteilt ist), und $\hat{\mathfrak{R}}$ der Operator des Drehimpulses des Kernrumpfes. Dieser Operator wird durch den Operator des Gesamtdrehimpulses $\hat{\mathfrak{J}}$ und den Operator des Drehimpulses des äußeren Nukleons $\hat{\Omega}\,\mathfrak{n}$ durch die einfache Beziehung

$$\hat{\mathfrak{R}} = \hat{\mathfrak{J}} - \hat{\Omega}\, \mathfrak{n} \tag{4.8.2}$$

ausgedrückt. Wird (4.8.2) in (4.8.1) eingesetzt, so erhalten wir

$$\hat{\vec{\mu}} = (g_\Omega - g_R)\, \hat{\Omega}\, \mathfrak{n} + g_R\, \hat{\mathfrak{J}} = \left\{(g_\Omega - g_R) \frac{(\mathfrak{n}\, \hat{\mathfrak{J}})}{J^2} \hat{\Omega} + g_R\right\} \hat{\mathfrak{J}}. \tag{4.8.3}$$

Im Zustand $\Psi^J_{M\Omega}$, in dem die Projektionen des Gesamtdrehimpulses und des Drehimpulses des äußeren Nukleons auf die Symmetrieachse des Kerns zusammenfallen und gleich $M = \Omega = J$ sind, ist der Mittelwert des Operators des magnetischen Moments (4.8.3)

$$\langle\mu\rangle_J = (g_\Omega - g_R) \frac{J^2}{J+1} + g_R J = g_\Omega J - (g_\Omega - g_R) \frac{J}{J+1}. \tag{4.8.4}$$

Wenn die Bewegung des äußeren Nukleons so verläuft, daß der Gesamtdrehimpuls j dieses Nukleons eine gute Quantenzahl darstellt, so ist das gyromagnetische Verhältnis g_Ω angenähert gleich dem gyromagnetischen

Verhältnis für ein Nukleon im Schalenmodell: $g_\Omega \approx g_j$. In diesem Fall ist das magnetische Moment des Kerns für $j > {}^3/_2$

$$\langle\mu\rangle_J = g_j J - (g_j - g_R)\frac{J}{J+1}. \tag{4.8.5}$$

Bei $j = {}^1/_2$ existiert kein direkter Zusammenhang des Nukleons mit der Oberfläche, und das magnetische Moment muß mit dem magnetischen Moment eines Nukleons zusammenfallen: $\langle\mu\rangle_j = g_j J$. Der Fall $j = {}^3/_2$ erfordert eine spezielle Betrachtung [4,27], da die Wechselwirkung eines Nukleons im Zustand $j = {}^3/_2$ mit der Oberfläche einige Besonderheiten besitzt.

Tabelle 11

Die magnetischen Momente von Kernen mit dem Spin ${}^5/_2$

Kerne mit ungerader Protonenzahl			Kerne mit ungerader Neutronenzahl		
	Experiment	Theorie		Experiment	Theorie
^{27}Al	3,64	3,77	^{25}Mg	−0,86	−0,67
^{121}Sb	3,36	3,73	^{95}Mo	−0,91	−0,81
^{131}Cs	3,48	3,73	^{105}Pd	−0,6	−0,81
^{151}Pr	3,9	3,73	^{111}Cd	−0,7	−0,81
^{187}Re	3,20	3,71			

In Tab. 11 sind die experimentellen Werte der magnetischen Momente von Kernen angeführt, die ein unpaariges Nukleon, den Spin ${}^5/_2$ und positive Parität besitzen. Nach dem Schalenmodell müßten solche Kerne das magnetische Moment

$$\mu = \begin{cases} 4{,}793 & \text{bei ungerader Protonenzahl} \\ -1{,}913 & \text{bei ungerader Neutronenzahl} \end{cases}$$

haben. Die in der Tabelle angeführten theoretischen Werte wurden nach Gl. (4.8.5) berechnet. Die Werte von g_j wurden dabei der Tab. 9 entnommen, g_R wurde gleich Z/A gesetzt. Aus Tab. 11 folgt, daß die Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment beträchtlich verbessert wird, wenn man die Beiträge zum magnetischen Moment berücksichtigt, welche durch einen sphäroidalen Kernrumpf hervorgerufen werden.

Bei Kernen, die sich stark von der Kugelform unterscheiden, ist die Annahme, daß der Gesamtdrehimpuls des einzelnen Nukleons ein Bewegungsintegral darstellt, schlecht erfüllt. Deshalb muß man zur Berechnung des gesamten magnetischen Moments des Kerns die Gl. (4.8.4) benutzen und die gyromagnetischen Verhältnisse g_Ω aus der Beziehung

$$g_\Omega = \frac{1}{\Omega}\langle g_s \hat{s}_\xi + g_l \hat{l}_\xi\rangle \tag{4.8.6}$$

bestimmen. Dabei sind g_s und g_l die gyromagnetischen Verhältnisse des Nukleons für die Spin- bzw. die Bahnbewegung, $\hat{s}_\xi$ und $\hat{l}_\xi$ die Projektionen der entsprechenden Drehimpulse auf die Symmetrieachse des Kerns. Die

Mittelung von (4.8.6) muß mit den Wellenfunktionen eines Nukleons ausgeführt werden, das sich in einem axialsymmetrischen Kernfeld bewegt. Da die Wellenfunktion von der Deformation β_0 des Kerns abhängt, wird auch g_Ω eine Funktion von β_0. Es ist möglich, daß gerade dieser Effekt für den großen Unterschied der magnetischen Momente von ^{151}Eu und ^{153}Eu verantwortlich ist. Das magnetische Moment des ^{151}Eu beträgt 3,6 Kernmagnetonen, das magnetische Moment des ^{153}Eu 1,6 Kernmagnetonen. Der Wert von β_0 ist beim ^{153}Eu-Kern etwa um den Faktor 2 größer als der Wert von β_0 für den ^{151}Eu-Kern.

In letzter Zeit sind Arbeiten erschienen [4,18; 4,52], in denen der Versuch gemacht wird, jedes der gyromagnetischen Verhältnisse g_Ω und g_R aus Gl. (4.8.6) experimentell zu untersuchen. Benutzt man die experimentellen Werte der magnetischen Momente der Grundzustände und die Werte aus den Wahrscheinlichkeiten von magnetischen Dipolübergängen zwischen Rotationsniveaus, die von $(g_\Omega - g_R)^2$ abhängen (vgl. Abschn. 11.5.), so kann man die beiden Größen g_Ω und g_R berechnen, wenn man eine Voraussetzung über das Vorzeichen von $g_\Omega - g_R$ macht. Für einige Übergänge kann man dieses Vorzeichen aus der Winkelkorrelation zwischen den γ-Quanten zweier aufeinanderfolgender Übergänge bestimmen. In Tab. 12 werden die in den Arbeiten [4,18] und [4,52] erhaltenen Resultate angeführt.

Tabelle 12

Die Werte der gyromagnetischen Verhältnisse g_Ω und g_R

Kern	Spin	μ	$(g_\Omega - g_R)^2$	g_Ω	g_R	g_j
^{181}Ta	$^7/_2$	2,1	0,202	0,70	0,25	0,49 ($g_{7/2}$)
^{197}Au	$^3/_2$	0,19	0,149	−0,061	0,32	0,12 ($d_{3/2}$)
^{185}Re	$^5/_2$	3,17	1,17	1,53	0,53	1,99 ($d_{5/2}$)
^{187}Re	$^5/_2$	3,20	1,32	1,63	0,52	1,99 ($d_{5/2}$)
^{193}Ir	$^3/_2$	0,17	$4 \cdot 10^{-4}$	0,12	0,10	0,12 ($d_{3/2}$)

Wenn die in Tab. 12 gegebenen Abschätzungen für g_Ω und g_R durch weitere Untersuchungen bestätigt werden, so kann man aus ihnen entnehmen, daß die Näherung $g_R = Z/A \approx 0{,}40$ recht grob ist.

In der letzten Spalte der Tab. 12 sind die Werte für g_j angegeben, die sich aus dem Schalenmodell ergeben. Diese Werte, die für einen kugelförmigen Potentialtopf berechnet wurden, unterscheiden sich wesentlich von den gemessenen g_Ω-Werten, die zu einer Bewegung des Teilchens in einem axialen Feld gehören.

4.9. Niedrig angeregte Zustände von Atomkernen

Jeder beliebige angeregte Zustand eines Kerns ist quasistationär, da ein spontaner Übergang aus diesem Zustand in andere Zustände des Kerns mit kleinerer Energie unter gleichzeitiger Emission von γ-Strahlen, Nukleonen, α-Teilchen usw. möglich ist. Infolgedessen besitzen alle Energiezustände der Kerne außer dem Grundzustand eine endliche Lebensdauer τ

und folglich eine bestimmte Breite Γ, die mit der Lebensdauer und der Übergangswahrscheinlichkeit W je Zeiteinheit durch folgende einfache Beziehung verknüpft ist:

$$\Gamma = \frac{\hbar}{\tau} = \hbar W. \tag{4.9.1}$$

Wir sehen hier vom β- und α-Zerfall und von der Spaltung ab (sie werden in den Kap. 5 und 6 betrachtet). Diese Prozesse führen dazu, daß auch der Grundzustand vieler Kerne in Wirklichkeit nicht streng stationär ist, sondern eine endliche Lebensdauer besitzt.

Wenn der Übergang aus einem gegebenen angeregten Zustand auf mehrere verschiedene Arten erfolgen kann, so setzt sich die Gesamtwahrscheinlichkeit des Übergangs W additiv aus den Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Übergänge zusammen: $W = \sum_i W_i$. Entsprechend kann man von den *Partialbreiten* Γ_i sprechen, die zum i-ten Übergangstyp aus dem gegebenen angeregten Zustand in den Grundzustand gehören. Die *Gesamtbreite* des Niveaus Γ ist dabei gleich der Summe der Partialbreiten.

Das Energiespektrum der angeregten Zustände von Kernen kann man in 3 Bereiche unterteilen: a) das stabile Gebiet, b) das Resonanzgebiet und c) das Gebiet des Kontinuumspektrums. Die Anregungsenergie im stabilen Gebiet ist kleiner als die minimale Energie, die zur Emission (Abtrennung) eines Nukleons vom Kern notwendig ist. Dabei wird, wie schon oben bemerkt, eine mögliche Instabilität des Kerns gegen β- und α-Zerfall sowie Spaltung nicht berücksichtigt. Der Übergang in den Grundzustand erfolgt aus den angeregten Zuständen des stabilen Gebietes durch Emission von γ-Quanten. Die Breite des entsprechenden Niveaus wird als *Strahlungsbreite* Γ_γ bezeichnet.

Zum Resonanzgebiet gehören die quasistationären (virtuellen) angeregten Zustände, deren Bindungsenergie größer als die Bindungsenergie eines Nukleons ist. Solche virtuelle Niveaus äußern sich als Resonanzen in den Querschnitten der Kernreaktionen, wenn die Abstände zwischen den Niveaus größer als deren Breite sind. Die Breite der virtuellen Niveaus setzt sich in diesem Gebiet des Spektrums additiv aus den Partialbreiten der γ-Strahlung, der Neutronenemission, der Protonenemission usw. zusammen.

Zum Kontinuumbereich gehören schließlich die angeregten Zustände mit kontinuierlichem Spektrum, wobei die Niveaubreite gleich oder größer als der Abstand zwischen den Niveaus ist.

Die angeregten Kernzustände, die zum stabilen und zum Resonanzgebiet des Anregungsspektrums gehören, werden durch bestimmte Werte des Spins, der Parität und bei den leichten Kernen auch des Isospins gekennzeichnet.

Die angeregten Zustände von leichten Kernen können in einigen Fällen mit Veränderungen des Zustandes einzelner Nukleonen im Kern im Rahmen des Schalenmodells identifiziert werden.

Das Schalenmodell gestattet in diesen Fällen, die Grundcharakteristiken solcher Niveaus zu bestimmen: Spin, Parität, magnetisches Moment usw. Von Sliw und Peker [4,53] wurde vorgeschlagen, die Niveauschemata der

niedrig gelegenen Energieniveaus von Kernen mit ungerader Massenzahl in 3 Typen zu unterteilen: a) das „Reihen"-Niveausystem, b) das „Löcher"-Niveausystem und c) das gemischte Niveausystem.

Ein Niveausystem gehört zum „Reihen"typ, wenn sich das am wenigsten gebundene Nukleon im Grundzustand auf dem ersten oder zweiten Niveau einer Schale befindet und wenn die Anregung des Kerns einem Übergang dieses Nukleons auf ein höherliegendes Niveau dieser Schale entspricht. In diesem Fall wird der Spin und die Parität des angeregten Kernzustandes durch den Spin und die Parität des Zustandes dieses Nukleons bestimmt. Solche Anregungen treten bei den Kernen ^{7}Li, ^{7}Be, ^{17}O, ^{41}K, ^{45}Se, ^{51}V, ^{57}Fe u. a. auf.

Das Niveausystem gehört zum „Löcher"typ, wenn die angeregten Zustände eines Kerns mit ungerader Massenzahl durch den Übergang eines der Nukleonen einer abgeschlossenen Schale auf das Niveau mit dem unpaarigen Nukleon erzeugt werden. Der angeregte Zustand des Kerns wird in diesem Fall durch den Spin und die Parität des „Loches" gekennzeichnet, das in der besetzten Schale nach dem Übergang des Nukleons zurückbleibt. Ein solches Niveausystem wird bei den Kernen ^{55}Fe, ^{65}Cu, ^{67}Zn, ^{125}Te, ^{207}Pb u. a. beobachtet.

Kerne, deren Massenzahl kleiner als 6 ist, besitzen keine angeregten Zustände, die zum stabilen Gebiet gehören, d. h. Zustände, aus denen ein Übergang in den Grundzustand nur durch Emission eines γ-Quants erfolgen könnte. Sie besitzen jedoch *virtuelle angeregte Zustände,* die sich als Resonanzen bei Kernreaktionen und bei der Streuung von Nukleonen bemerkbar machen (vgl. Abschn. 8.6.).

Wie wir in Abschn. 7.5. sehen werden, besitzt das Deuteron das virtuelle Niveau ^{1}S. Das α-Teilchen hat anscheinend ein virtuelles angeregtes Niveau mit der Konfiguration $(1s_{1/2})^3(1p_{1/2})^1$, das einer Anregungsenergie von etwa 22 MeV entspricht. Dieses virtuelle Niveau tritt als Resonanz bei der Streuung von Protonen an Tritium auf. Der Begriff „angeregtes Niveau" hat in diesen Fällen nur einen bedingten Sinn, da das Deuteron im Zustand ^{1}S in ein Proton und ein Neutron und das α-Teilchen aus dem Zustand $(1s_{1/2})^3(1p_{1/2})^1$ in Tritium und ein Proton zerfällt.

Die Kerne mit der Massenzahl 5 (Helium und Lithium) besitzen nicht einmal stabile Grundzustände. Bei der Streuung

$$\mathrm{n} + {}^{4}\mathrm{He} \to {}^{5}\mathrm{He} \to {}^{4}\mathrm{He} + \mathrm{n},$$
$$\mathrm{p} + {}^{4}\mathrm{He} \to {}^{5}\mathrm{Li} \to {}^{4}\mathrm{He} + \mathrm{p}$$

treten jedoch Resonanzen auf, die darauf hindeuten, daß die Bildung der instabilen Kerne ^{5}He und ^{5}Li möglich ist. Es werden auch die Resonanzreaktionen

$$\mathrm{d} + {}^{3}\mathrm{H} \to {}^{5}\mathrm{He} \to {}^{4}\mathrm{He} + \mathrm{n},$$
$$\mathrm{d} + {}^{3}\mathrm{He} \to {}^{5}\mathrm{Li} \to {}^{4}\mathrm{He} + \mathrm{p},$$
$$\mathrm{d} + {}^{3}\mathrm{He} \to {}^{5}\mathrm{Li} + \gamma \to {}^{4}\mathrm{He} + \mathrm{p} + \gamma$$

beobachtet, die bestätigen, daß diese Elemente (im Resonanzgebiet) instabile angeregte Zustände besitzen.

In Abb. 16 wird das Energieniveauschema der 4 Lithiumisotope angeführt. Die schraffierten Linien kennzeichnen Niveaus mit sehr großer Breite. Die Energie der Niveaus ist in MeV angegeben. Außerdem sind noch die Spins und die Paritäten der Niveaus eingetragen. Die meisten Niveaus treten beim ^{6}Li auf. In der Abbildung sind auch die Isospins dieser Niveaus angeführt. Das 2,19-MeV-Niveau besitzt eine Breite von etwa 30 keV, das 4,52-MeV-Niveau eine Breite von etwa 900 keV. Das 7,46-MeV-Niveau des ^{7}Li tritt

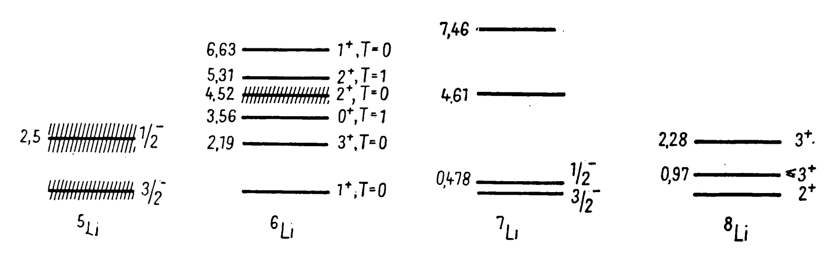


Abb. 16. Niveauschemata der Lithiumisotope
Die Anregungsenergie ist in MeV angegeben

in der Reaktion ^{6}Li(n, α)^{3}H auf, seine Breite beträgt etwa 100 keV [4,49]. Das 2,28-MeV-Niveau des Compoundkerns ^{8}Li, das eine Breite von 32 keV besitzt, wird in der Reaktion ^{7}Li(n, n)^{7}Li beobachtet [4,54].

In Abb. 17 sind die Energieniveaus einiger leichter Kerne angeführt [4,55]. Die angeregten Zustände entsprechen Einzelteilchenanregungen (die Energie ist in MeV ausgedrückt). Die Abbildung enthält die Spins und die Paritäten der entsprechenden angeregten Zustände.

Die angeregten Zustände von mittleren und schweren Kernen, die sich nur wenig von magischen Kernen unterscheiden, können bei kleinen Anregungsenergien ebenfalls nach dem Schalenmodell des Kerns klassifiziert werden. In Abb. 18 ist das Schema der Energieniveaus des doppeltmagischen Bleis (Messungen von Elliot, die in der Arbeit [4,56] publiziert wurden) und zweier anderer Bleiisotope [4,57] angeführt. Der ^{209}Pb-Kern besitzt ein Neutron über die 82 Protonen und 126 Neutronen hinaus, welche die abgeschlossenen Schalen bilden. Die Energieniveaus des ^{209}Pb gehören zum „Reihen"-Niveausystem. Im Kern des ^{207}Pb fehlt ein Neutron an der vollbesetzten Schale. Die angeregten Niveaus dieses Kerns gehören zum Löchertyp.

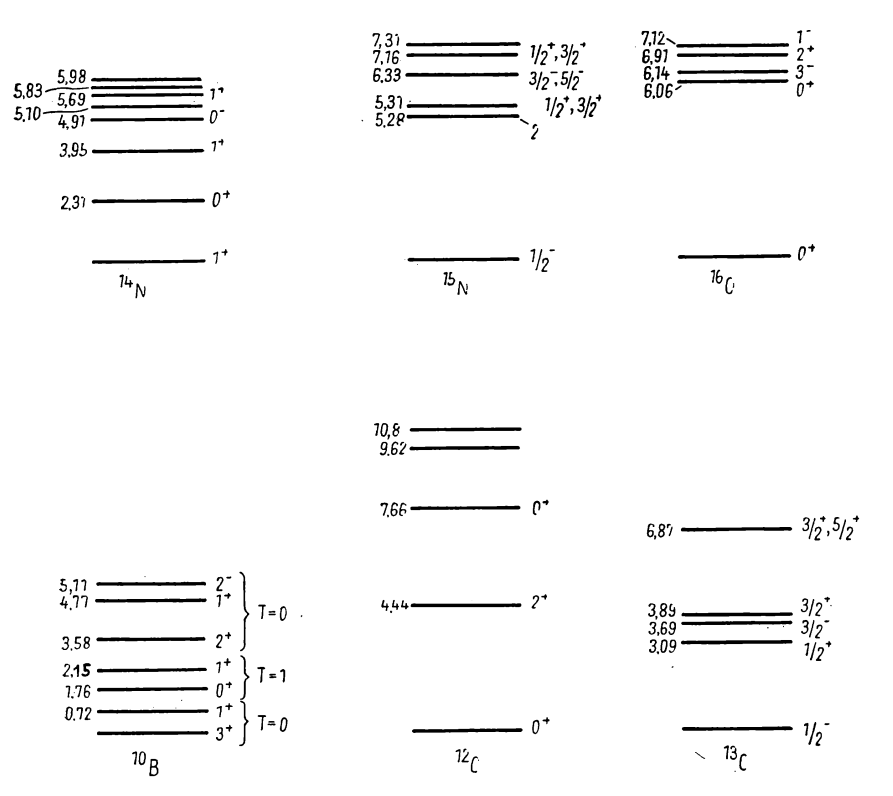


Abb. 17. Niveauschemata einiger leichter Kerne

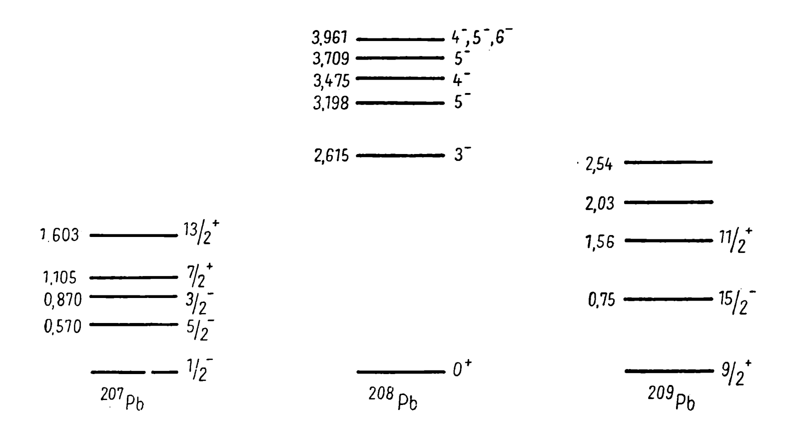


Abb. 18. Niveauschemata einiger Bleiisotope

Kerne mit abgeschlossenen Schalen zeichnen sich durch große Werte der Anregungsenergie des ersten angeregten Niveaus im Vergleich zu den benachbarten nichtmagischen Kernen aus (vgl. z. B. ^{208}Pb, ^{209}Pb, ^{207}Pb, Abb. 18). Bei Kernen, deren Nukleonenkonfiguration der Konfiguration abgeschlossener Schalen nahekommt, ist die Wechselwirkung der äußeren Nukleonen mit diesen Schalen relativ klein, und die Anregung kann als Veränderung des Zustandes eines Nukleons betrachtet werden (Einzelteilchenanregung). Als charakteristisches Kennzeichen von Einzelteilchenübergängen findet man oft eine beträchtliche Spinänderung beim Übergang in den angeregten Zustand, manchmal auch eine Änderung der Parität. Angeregte Zustände dieser Art führen zur Entstehung langlebiger Isomere, deren Interpretation das Schalenmodell gut bestätigt [4,58] (vgl. Abschn. 11.4.).

Kerne, deren Nukleonenkonfiguration sich stark von den Konfigurationen abgeschlossener Schalen unterscheidet, weisen wegen der starken Wechselwirkung der äußeren Nukleonen mit den gefüllten Schalen wesentliche Abweichungen von der Kugelsymmetrie auf. Es treten 2 Anregungsarten auf. Der erste Anregungstyp ist die Veränderung des Zustandes eines einzelnen Nukleons, der von einer Veränderung der Kerngestalt begleitet sein kann. Solche Anregungen sind den Elektronenübergängen in Molekülen analog. Der zweite Anregungstyp entspricht einer Rotation des Kerns als Ganzem und manchmal auch Oberflächenschwingungen des Kerns. Die Aufteilung der Anregungen in die beiden Arten Einzelteilchenanregung und kollektive Anregung (Schwingungen bzw. Rotationen) ist nur dann möglich, wenn die Kerne stark von der Kugelform abweichen (s. Abschn. 4.6.), wenn die Energie der Rotationsniveaus etwa 40 · · · 200 keV und die Energie der Einzelteilchenübergänge 1 · · · 3 MeV beträgt.

Die Eigenschaften der kollektiven Anregungen und der Einzelteilchenanregungen unterscheiden sich wesentlich. Die Niveaus der Kollektivanregungen eines bestimmten Typs besitzen gleiche Parität. Die Spins benachbarter Zustände unterscheiden sich bei den gg-Kernen um 2 Einheiten, bei den Kernen mit ungeraden Massenzahlen um 1 bis 2 Einheiten (vgl. jedoch 4.5.). Bei der Anregung einzelner Nukleonen können Paritätsänderungen und auch — wie wir sahen — beträchtliche Spinänderungen auftreten.

Am deutlichsten lassen sich kollektive und Einzelteilchenanregungen bei den sphäroidalen gg-Kernen unterscheiden, da bei diesen Kernen die Energie der Einzelteilchenanregungen relativ groß ist. Wenn die Kerne nur wenig von der Kugelform abweichen, wird die Rotationsenergie vergleichbar mit der Energie von Einzelteilchenanregungen. In diesem Fall ist die Unterscheidung von Einzelteilchen- und Kollektivanregungen nicht möglich (s. 4.6.). Dies tritt öfter bei Kernen mit ungerader Massenzahl ein, bei denen die Energie der Einzelteilchenanregungen einige 100 keV beträgt.

Die Energie des ersten angeregten Zustandes nimmt im allgemeinen mit wachsender Massenzahl A ab. Es sind jedoch auch beträchtliche Abweichungen von dieser Tendenz bekannt, besonders im Gebiet der magischen Kerne. Wenn man die Energie des ersten angeregten Niveaus als Funktion der Protonen- und der Neutronenzahl darstellt, so zeigt die Energiefläche scharfe

Maxima bei den doppeltmagischen Kernen (^{40}Ca und ^{208}Pb), Kämme entlang der magischen Protonen- und Neutronenzahlen und breite Senken zwischen den magischen Zahlen.

In Abb. 10 (S. 63) ist die Energie des ersten angeregten Niveaus der gg-Kerne als Funktion der Neutronenzahl dargestellt. Die Protonenzahlen sind an den Punkten angegeben, die die Lage des Energieniveaus darstellen.

Durch besonders kleine Anregungsenergien des ersten Niveaus sind die Seltenen Erden und die Kerne am Ende des Periodensystems der Elemente gekennzeichnet, bei denen die angeregten Zustände Rotationsenergien entsprechen.

In letzter Zeit [4,59] wurden bei einigen gg-Kernen tiefliegende angeregte Zustände mit negativer Parität beobachtet: 1^-, manchmal aber auch 3^- und 5^-. Als Beispiel dafür geben wir in Abb. 19 (vgl. [4,44]) das Niveauschema des ^{226}Ra an, das beim α-Zerfall des ^{230}Th entsteht. Die Anregungsniveaus des ^{226}Ra entsprechen 2 Rotationsbanden; die eine beginnt beim Grundzustand, die zweite Bande entspricht Niveaus mit negativer Parität. In Tab. 13 sind die Anregungsenergien des ersten Niveaus der Rotationsbande $E(2^+)$ und des Niveaus $E(1^-)$ für einige gg-Kerne angegeben.

416 — 6^+
445 — 5^-
320 — 3^-
253 — 1^-
210 — 4^+
67,8 — 2^+
0 — 0^+
$K = 0^+$

Abb. 19. Niveauschema des ^{226}Ra
Die Energie ist in keV angegeben

Tabelle 13

Anregungsenergie des ersten Niveaus der Rotationsbande $E(2^+)$ und des ersten Niveaus $E(1^-)$

Kern	$E(2^+)$ in keV	$E(1^-)$ in keV
^{222}Ra	112	242
^{224}Ra	84	217
^{226}Ra	68	253
^{226}Th	73	232
^{228}Th	58	326
^{238}Pu	43	605

Der Übergang aus dem Zustand 1^- in die Zustände 0^+ und 2^+ erfolgt unter Emission elektrischer Dipolstrahlung. In Abb. 20 sind die ersten Energieniveaus der gg-Kerne in Abhängigkeit von der Neutronenzahl im Kern dargestellt. Die Niveaus mit dem Spin 1^- sind durch Kreuze gekennzeichnet. Von A. Bohr wurde die Vermutung geäußert, daß die oben angeführten angeregten Zustände mit Spin und Parität 1^- kollektiven Nukleonenbewegungen entsprechen, bei denen der Kern sein Symmetriezentrum verliert (birnenförmige Kerne).

Bei den gg-Kernen können kollektive Bewegungen mit negativer Parität auch dann auftreten, wenn Oktupolschwingungen angeregt werden, bei

denen die Kernform durch die Kugelfunktion $Y_{3m}(\vartheta, \varphi)$ bestimmt wird. Anregungen dieses Typs müssen den Spin $J = 3$ und negative Parität besitzen. Niveaus, die einer gleichzeitigen Anregung von Quadrupol- und Oktupolschwingungen entsprechen, besitzen die Spins $J = 1^-, 2^-, \ldots, 5^-$. Wenn der Kern wegen der Oktupolschwingungen sein Symmetriezentrum

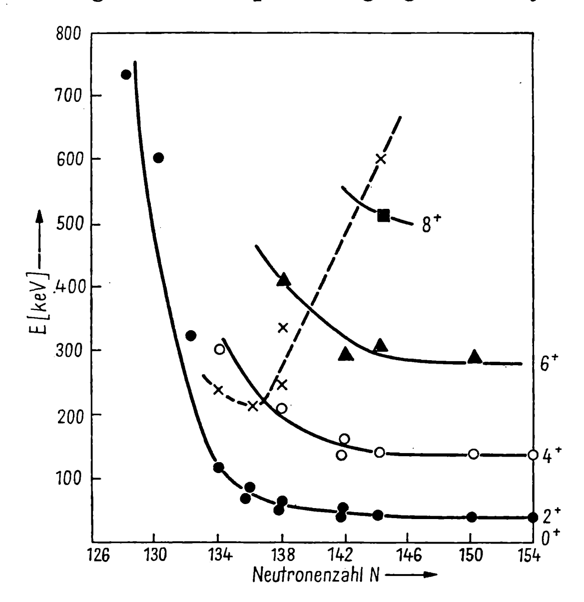


Abb. 20. Energie der ersten angeregten Zustände von gg-Kernen in Abhängigkeit von der Neutronenzahl im Kern

verliert, so werden Rotationen mit ungeraden Drehimpulsen ($1^-, 3^-, \ldots$) möglich. Zustände mit ungeraden Drehimpulsen sind gegenüber Zuständen mit geraden Drehimpulsen um die Energie der Oktupolschwingungen verschoben.

4.10.* Rotationsschwingungsspektrum von gg-Kernen

Gut ausgeprägte Rotationszustände findet man nur bei Kernen mit den Massenzahlen $A > 225$, $150 < A < 185$ sowie $A \approx 25$. Bei einer Reihe von Kernen kann man zwar die ersten angeregten Zustände zu den kollektiven Anregungen rechnen, ihre Reihenfolge entspricht jedoch keinen Rotationszuständen. So wurde in einer Arbeit von Scharff-Goldhaber und Weneser [4,60] auf eine große Gruppe von gg-Kernen im Gebiet der Massenzahlen $66 < A < 150$ hingewiesen, bei denen das erste angeregte Niveau den Spin 2^+ besitzt und die Anregungsenergie (E_1) bei 300 keV oder höher liegt, während das zweite angeregte Niveau (E_2) den Spin 2^+, 4^+ oder 0^+ besitzt. Das Verhältnis der Energie des ersten angeregten Zustands zur Energie des zweiten angeregten Zustands liegt für diese Kerne zwischen 2 und 2,5. Bei diesen

Kernen sind anscheinend die Abweichungen von der Kugelsymmetrie nicht allzu stark, und die angeregten Zustände lassen sich nicht in Rotationszustände und Schwingungszustände trennen.

Zur Untersuchung (vgl. DAWYDOW und FILIPPOW [4,61]) von solchen angeregten Zuständen der axialsymmetrischen gg-Kerne[1]) gehen wir vom klassischen Ausdruck für die Energie der Kollektivbewegungen des Kerns aus:

$$E = \frac{B}{2}\dot{\beta}^2 + W_{\gamma_0}(\beta) + \frac{R^2}{6B\beta^2}, \tag{4.10.1}$$

die wir in Abschn. 4.5. erhielten (vgl. 4.5.22). Die potentielle Energie W_{γ_0} wird nach (4.5.20) durch die Formel

$$W_{\gamma_0}(\beta) = \frac{C}{2}\beta^2 + A\beta\cos\gamma_0 + \frac{\hbar^2 F}{6B\beta^2} \tag{4.10.2}$$

bestimmt, wobei $\gamma_0 = 0$ oder π ist. Die Größen A, B, C, F, die in (4.10.1) und (4.10.2) eingehen, sind als Parameter der Theorie zu betrachten.

Die potentielle Energie (4.10.2) besitzt im Punkt $\beta = 0$ einen Pol. Dadurch kommt zum Ausdruck, daß das Trägheitsmoment des Kerns gegen Null geht, wenn β gegen Null strebt. Wenn im Kern außerhalb der abgeschlossenen Schalen Nukleonen vorhanden sind, so sind selbst dann, wenn der Gesamtdrehimpuls des Kerns Null ist, der Drehimpuls des Kernrumpfes und der Gesamtdrehimpuls der äußeren Nukleonen keine Bewegungsintegrale und einzeln für sich auch nicht gleich Null. Deshalb ist das Glied $\hbar^2 F/6B\beta^2$ immer in der potentiellen Energie (4.10.2) enthalten.

Für $\gamma_0 = 0$ entspricht das Minimum der potentiellen Energie (4.10.2) einem β_0, welches durch die Gleichung

$$\beta_0 = -\frac{A}{C} + \frac{\hbar^2 F}{3CB\beta_0^3}$$

bestimmt ist. Wird (4.10.2) in eine Reihe an der Stelle β_0 entwickelt und beschränkt man sich auf quadratische Glieder, so hat man nach (4.10.1)

$$\varepsilon \equiv E - W_0(\beta_0) = \frac{B}{2}\dot{\beta}^2 + \frac{R^2}{6B\beta^2} + \frac{C_0}{2}(\beta - \beta_0)^2, \tag{4.10.3}$$

wobei

$$C_0 = C + \frac{\hbar^2 F}{B\beta_0^4}$$

ist. Beim Übergang von (4.10.3) zum entsprechenden Ausdruck der Quantenmechanik berücksichtigen wir, daß das Quadrat des Drehimpulses im Koordinatensystem β, ϑ, φ mit dem Massenkoeffizienten B

$$R^2 = 9B^2\beta^4(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta)$$

ist. Bezeichnen wir mit T die kinetische Energie der Kollektivbewegungen des Kerns, so erhalten wir

$$2T\,dt^2 = B\,d\beta^2 + 3\beta^2\,d\vartheta^2 + 3\beta^2\sin^2\vartheta\,d\varphi^2.$$

---

[1]) Das Rotationsschwingungsspektrum von Kernen mit ungerader Massenzahl wurde in einer Arbeit von DAWYDOW und MURASCHKIN [J. eksp. teor. Fiz. **34** (1958) 1619] untersucht.

Nun kann man den Operator der kinetischen Energie (s. [4,62]) in folgender Form schreiben:

$$\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2B\beta^2}\left\{\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\beta^2\frac{\partial}{\partial\beta}\right) + \frac{1}{3\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{3\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right\}.$$

Die SCHRÖDINGER-Gleichung, die die Energie der Kollektivbewegungen eines gg-Kerns bestimmt, nimmt die Form

$$\left[\hat{T} + \frac{C_0}{2}(\beta - \beta_0)^2 - \varepsilon\right]\psi(\beta, \vartheta, \varphi) = 0 \tag{4.10.4}$$

an. Die Lösung der Gl. (4.10.4) kann man in der Form

$$\psi(\beta, \vartheta, \varphi) = \sum_J \frac{u_J(\beta)}{\beta} Y_{JM}(\vartheta, \varphi)$$

ansetzen, wobei J nur ganzzahlige Werte annimmt, da die Funktion nicht von der Wahl der Richtung der Symmetrieachse des Kerns abhängen darf. Die Funktionen $u_J(\beta)$ müssen der Gleichung

$$-\frac{\hbar^2}{3B}\frac{d^2u_J}{d\beta^2} + V_J(\beta)\,u_J - \varepsilon\,u_J = 0, \qquad u_J(0) = 0 \tag{4.10.5}$$

genügen, wobei folgende Bezeichnungen benutzt wurden:

$$V_J(\beta) \approx V_J(\beta_J) + \frac{C_J}{2}(\beta - \beta_J)^2, \tag{4.10.6}$$

$$\beta_J = \beta_0 + \frac{\hbar^2 J(J+1)}{3BC_0\beta_J^3}, \tag{4.10.7}$$

$$C_J = C_0\left(1 + \frac{\hbar^2 J(J+1)}{B\beta_J^4 C_0}\right). \tag{4.10.8}$$

Wir führen nun die dimensionslosen Parameter

$$\delta = \beta_0\left(\frac{BC_0}{\hbar^2}\right)^{1/4} \quad \text{und} \quad \xi = \frac{\beta_J}{\beta_0} \geqq 1 \tag{4.10.9}$$

ein. Dann gehen die Beziehungen (4.10.6) bis (4.10.8) in folgende Ausdrücke über:

$$V_J(\beta_J) \approx \hbar\omega_0\left\{\delta^2(\xi - 1)^2 + \frac{J(J+1)}{6\delta^2\xi^2}\right\}, \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{C_0}{B}}, \tag{4.10.6a}$$

$$\xi^3(\xi - 1) = \frac{J(J+1)}{3\delta^4}, \tag{4.10.7a}$$

$$C_J = C_0\left(1 + \frac{J(J+1)}{\delta^4\xi^4}\right). \tag{4.10.8a}$$

Zur Untersuchung der Lösungen von Gl. (4.10.5) führen wir die neue Variable

$$\zeta = \frac{\xi\,\delta_1(\beta - \beta_J)}{\beta_J}, \qquad \delta_1 = \delta_0\left(\frac{C_J}{C_0}\right)^{1/4} \approx \delta \tag{4.10.10}$$

ein, die sich in den Grenzen $-\xi\,\delta_1 \leqq \zeta < \infty$ ändert. Außerdem benutzen wir eine neue Funktion $v(\zeta)$, die wir folgendermaßen definieren:

$$u(\beta) = v(\zeta)\exp\left(-\frac{\zeta^2}{2}\right). \tag{4.10.11}$$

Dann erhalten wir aus (4.10.5) eine Gleichung für $v(\zeta)$:

$$v''(\zeta) - 2\,\zeta\, v'(\zeta) + 2\,\nu\, v(\zeta) = 0 \tag{4.10.12}$$

mit den Randbedingungen

$$v(-\delta\,\zeta) = 0 \quad \text{und} \quad v(\zeta)\exp\left(-\frac{\zeta^2}{2}\right) \to 0 \quad \text{für} \quad \zeta \to \infty. \tag{4.10.13}$$

Die Rotationsschwingungsenergie des Kerns wird durch die Eigenzahl ν der Gl. (4.10.12) über die Beziehung

$$\frac{\varepsilon_\nu(J)}{\hbar\,\omega_0} = \left(\nu + \frac{1}{2}\right)\sqrt{1 + \frac{J(J+1)}{\delta^4\,\xi^4} + \frac{\delta^2}{2}(\xi - 1)^2 + \frac{J(J+1)}{6\,\delta^2\,\xi^2}} \tag{4.10.14}$$

bestimmt. Die Gl. (4.10.12) stimmt mit der Gleichung des eindimensionalen harmonischen Oszillators überein. Wegen der Randbedingungen (4.10.13) stellt ν jedoch keine ganze Zahl dar. Die allgemeine Lösung von (4.10.12) wird für ν = nichtganze Zahl durch eine HERMITEsche Funktion erster Art ausgedrückt ([4,63], S. 352):

$$v_\nu(\zeta) = a\,H_\nu(\zeta) + b\,H_\nu(-\zeta),$$

die als Reihe dargestellt werden kann:

$$H_\nu(\zeta) \equiv \frac{1}{2\,\Gamma(-\nu)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\,\Gamma\left(\frac{k-\nu}{2}\right)}{k!}\,(2\zeta)^k;$$

$\Gamma(x)$ bezeichnet die Gammafunktion.

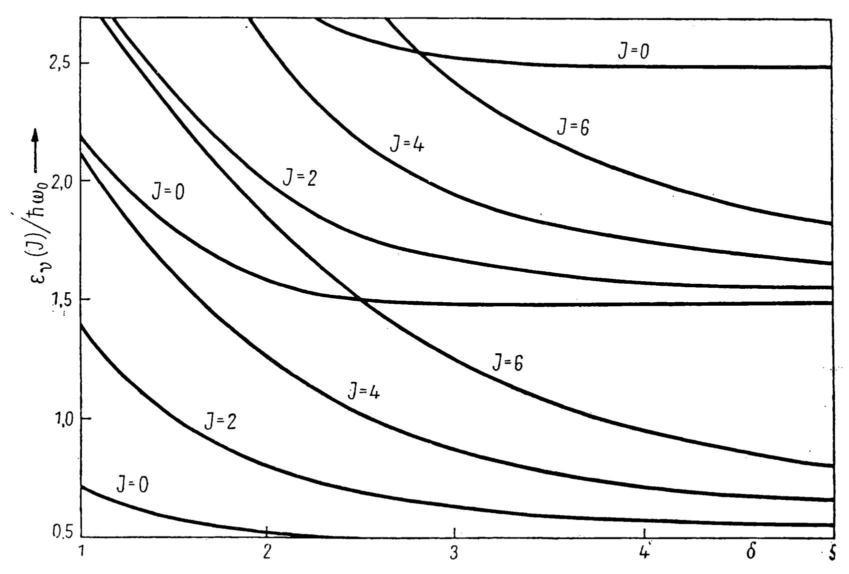


Abb. 21. Energie der ersten angeregten Kollektivniveaus von gg-Kernen in Abhängigkeit vom Deformationsparameter



Berücksichtigt man das asymptotische Verhalten der HERMITEschen Funktion bei großen ζ-Werten, so kann man leicht zeigen, daß zur Erfüllung der Randbedingung (4.10.13) bei $\zeta \to \infty$ notwendig $b = 0$ gesetzt werden muß. Dann erhält man die Eigenzahlen ν aus der Bedingung

$$v(-\delta\,\xi) = a\,H_\nu\,(-\delta\,\xi) = 0. \tag{4.10.15}$$

Da ξ bei vorgegebenem J eindeutig durch Gl. (4.10.7a) als Funktion des Parameters δ bestimmt wird, folgt aus (4.10.15) und (4.10.14), daß die Energie der Rotationsschwingungsanregungen von axialsymmetrischen gg-Kernen nur von den beiden Parametern $\hbar\,\omega_0$ und δ abhängt.

Für $\delta \leqq 1$ und $J = 0$, 2, 4 wurde die Energie (4.10.14) in [4,61], für $\delta > 1$ in [4,64] berechnet. In Abb. 21 ist $\varepsilon_\nu(J)/\hbar\,\omega_0$ in Abhängigkeit von δ graphisch dargestellt. Wie man daraus ersieht, spaltet sich das Energiespektrum der Kollektivanregungen von gg-Kernen bei $\delta > 2{,}5$ in ein System von Rotations-Schwingungs-Banden auf. Für $\delta < 2{,}5$ unterscheidet sich die Reihenfolge

Tabelle 14

Die kollektiven Anregungen einiger gg-Kerne

Kern	J	Energieniveau [keV]		$\hbar\,\omega_0$ [keV]	δ	Literatur
		Theorie	Experiment			
^{182}W	2	100,09	100,09			[4,65]
	4	320,3	329,36			[4,66]
	6	641,6	677,6			
	0	1001	—	1001	3,48	
	2	1222	1222			
	4	1481	1478			
^{232}Th	2	50	50			[4,66]
	4	163	165			
	6	332	—			
	0	710	—	710	3,93	
	2	770	770			
	4	901	—			
^{234}U	2	43	43			[4,66]
	4	141	143,2			
	6	290	297	806	4,48	
	0	806	806			
	2	855	—			
	4	966	—			
^{238}Pu	2	44,2	44,2			[4,66]
	4	147,7	146			
	6	304,8	309			
	0	935	935	935	4,73	
	2	986	986			
	4	1100	—			

der angeregten Zustände von gg-Kernen wesentlich von der Reihenfolge, die der Rotation eines Körpers mit bestimmtem Drehimpuls entspricht. In Tab. 14 wird ein Vergleich der theoretischen Energiewerte der ersten und zweiten Rotationsbande mit den experimentellen Daten für mehrere Kerne durchgeführt. Es sind auch die Werte der Parameter $\hbar\,\omega_0$ und δ angeführt, die bei der Berechnung der theoretischen Energiewerte benutzt wurden.

Tab. 15 zeigt die Verhältnisse $\varepsilon_{1\,\mathrm{II}}/\varepsilon_{1\,\mathrm{I}}$, $\varepsilon_{2\,\mathrm{I}}/\varepsilon_{1\,\mathrm{I}}$, $\varepsilon_{2\,\mathrm{II}}/\varepsilon_{1\,\mathrm{II}}$ in Abhängigkeit von δ. Hierbei sind $\varepsilon_{1\,\mathrm{I}}$, $\varepsilon_{2\,\mathrm{I}}$, $\varepsilon_{1\,\mathrm{II}}$, $\varepsilon_{2\,\mathrm{II}}$ die Energien des ersten und zweiten (1, 2) Rotationsunterniveaus in der ersten und zweiten (I, II) Rotationsbande der Kernzustände.

Tabelle 15

Die Verhältnisse der Energien einiger Niveaus von gg-Kernen

δ	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5
$\varepsilon_{1\,\mathrm{II}}/\varepsilon_{1\,\mathrm{I}}$	1,48	1,39	1,36	1,31	1,26	1,21	1,16	1,13	1,11
$\varepsilon_{2\,\mathrm{I}}/\varepsilon_{1\,\mathrm{I}}$	2,17	2,38	2,70	2,87	2,92	3,21	3,27	3,29	3,33
$\varepsilon_{2\,\mathrm{II}}/\varepsilon_{1\,\mathrm{II}}$	1,76	2,16	2,43	2,52	2,94	3,16	3,25	3,27	3,31

Bei $\delta > 2$ unterscheidet sich die Funktion

$$\xi = F\left(\frac{J(J+1)}{3\delta^4}\right)$$

nur wenig von Eins. Zerlegt man sie in eine Reihe und beschränkt sich auf die ersten Glieder der Entwicklung, so kann man (4.10.14) in der Form

$$\varepsilon_J = \varepsilon_0 + \hbar\,\omega_0 \left\{\frac{J(J+1)}{6\delta^2} - a\,\frac{J^2(J+1)^2}{\delta^6}\right\} \tag{4.10.16}$$

schreiben. Berücksichtigt man (4.10.9) und führt das Trägheitsmoment $I = 3B\,\beta_0^2$ ein, so läßt sich (4.10.16) in der Form

$$\varepsilon_J = \varepsilon_0 + A\,J(J+1) - B\,J^2(J+1)^2 \tag{4.10.17}$$

schreiben, wobei A und B folgende Bedeutung besitzen:

$$A = \frac{\hbar^2}{2I}, \qquad B = \frac{a}{(\hbar\,\omega_0)^2}\left(\frac{\hbar}{I}\right)^3. \tag{4.10.17 a}$$

Eine Formel vom Typ (4.10.17) wurde zuerst von A. Bohr und Mottelson [4,27] vorgeschlagen. Bekanntlich ergibt sich gute Übereinstimmung mit dem Experiment, wenn A und B als Parameter der Theorie betrachtet werden. In der Tab. 16 sind die Werte von A und B angeführt, die sich aus den Angaben über die Rotationsniveaus einiger Kerne ergeben.

Benutzt man (4.10.9) und die Beziehung $I = 3B\,\beta_0^2$, so kann der Parameter δ durch das Trägheitsmoment und $\hbar\,\omega_0$ über die Beziehung

$$\delta^2 = \frac{\hbar\,\omega_0 I}{3\hbar^2} = \frac{\hbar\,\omega_0}{6A} \tag{4.10.18}$$

ausgedrückt werden. In der vierten Spalte der Tab. 16 sind die δ-Werte nach (4.10.18) angegeben, wenn man $\hbar\omega_0 \approx 1$ MeV setzt und die entsprechenden Werte von A aus der Tabelle benutzt.

Tabelle 16

Werte der Parameter, die die Rotationszustände einiger gg-Kerne bestimmen

Kern	A [keV]	B [keV]	δ
^{180}Hf	15,58	0,0703	3,3
^{226}Th	12,16	0,043	3,7
^{238}Pu	7,37	0,0033	4,7

4.11. Hochangeregte Kernzustände. Compoundkern

Bei hohen Anregungsenergien ($> 6 \cdots 7$ MeV) darf man die quasistationären angeregten Zustände der Kerne nicht mehr als Bewegung eines Nukleons und kollektive Bewegungen eines bestimmten Typs betrachten. Ein und derselben Anregungsenergie entsprechen hier mehrere verschiedene Arten von angeregten Zuständen. Diese Anregungen sind nur in erster Näherung unabhängig voneinander. In den höheren Näherungen treten wegen der Wechselbeziehungen zwischen den Anregungen verschiedener Art spontane Übergänge von einer Anregungsform in eine andere auf, was zu einer beträchtlichen Verbreiterung der Niveaus führt. Wenn die Niveaubreite Werte erreicht, die von der Größenordnung des Niveauabstands sind, geht das Anregungsspektrum in ein Kontinuum über.

Bei hochangeregten Zuständen gehören also zu einer Anregung viele verschiedene Bewegungstypen. Durch den Zusammenhang zwischen diesen Bewegungstypen werden die Kernzustände so kompliziert, daß man statistische und thermodynamische Methoden zur Beschreibung anwenden muß.

Anregungen, deren Energie beträchtlich über der Energie der ersten Kernniveaus liegt, entstehen in vielen Fällen bei der Anlagerung eines Nukleons an den Kern und bei Kernzusammenstößen (außer Stößen zwischen den leichtesten Kernen und zwischen magischen Kernen), da die Anlagerungsenergie eines Nukleons von der Größenordnung $6 \cdots 7$ MeV ist, die Energie der ersten angeregten Niveaus dagegen $40 \cdots 200$ keV beträgt. Die starke Wechselwirkung zwischen Kern und Nukleon führt dazu, daß das einfallende Nukleon sehr kurze Zeit nach dem Stoß den größten Teil seiner Energie an andere Nukleonen des Kerns abgibt (s. Abschn. 8.6. und 8.10.). Bei dieser Verteilung der Energie, die zunächst auf das einfallende eine Nukleon konzentriert war, erhält keines der Nukleonen im Kern einen solchen Energiebetrag, daß es die anziehenden Kernkräfte überwinden und den Kern verlassen könnte. Obwohl die Energie des Systems, das sich durch den Stoß herausbildet, die zur Emission eines oder mehrerer Nukleonen notwendige Energie übersteigt, kann doch eine Emission erst nach einer bestimmten Zeit erfolgen, nach der auf Grund von Fluktuationen auf eines der Nukleonen ausreichende Energie konzentriert wird.

Als Zeiteinheit bei Kernreaktionen benutzt man eine Zeit von der Größenordnung der Zeit, die ein nicht mit ihm in Wechselwirkung tretendes Teilchen zum Durchlaufen des Kerns braucht. Diese „charakteristische Kernzeit" ist von der Größenordnung 10^{-22} s. Ein stoßendes Teilchen und ein Kern bilden zusammen oft ein System, das — ohne zu zerfallen — beträchtlich länger als die charakteristische Kernzeit lebt. Ein solches System bezeichnet man als *Compoundkern.*

Die Compoundkernhypothese wurde zuerst von N. BOHR [4,22] zur Erklärung von Kernreaktionen eingeführt (s. Abschn. 8.6. und 8.10.). Im weiteren werden wir die Bezeichnung Compoundkern für Kerne verwenden, die sich in einem stark angeregten Zustand befinden, dessen Anregungsenergie (unabhängig von der Art der Anregung) die Ablösearbeit für ein oder mehrere Nukleonen überschreitet, jedoch kleiner als die Gesamtbindungsenergie des Kerns ist.[1])

LANDAU [4,67] und FRENKEL [4,68] schlugen vor, den Compoundkern als FERMI-Flüssigkeit oder FERMI-Gas zu betrachten und zur Beschreibung des Compoundkerns die Methoden der Thermodynamik und der statistischen Physik zu verwenden. Vorstellungen dieser Art lassen eine qualitative Erklärung für die Zunahme der Niveaudichte mit wachsender Anregungsenergie und die Betrachtung der Teilchenemission durch den Compoundkern als Verdampfungsprozeß (s. Abschn. 4.12.) zu.

Bei der statistischen Betrachtung werden die Eigenschaften eines Körpers durch die thermodynamischen Funktionen bestimmt: die Entropie S, die Anregungsenergie usw., die ihrerseits Funktionen der Temperatur sind. (Die statistische Betrachtung läßt sich auf Kerne mit mittleren und großen Massenzahlen anwenden.) Uns interessieren Anregungsenergien, die klein gegen die Gesamtbindungsenergie des Kerns (≈ 600 MeV) sind. In diesem Fall wird der innere Zustand des Kerns mit dem Zustand eines makroskopischen Körpers bei sehr niedrigen Temperaturen verglichen. Die Anregungsenergie eines gewöhnlichen makroskopischen Körpers wird bei niedrigen Temperaturen durch die Formel

$$E = \frac{a}{2}\Theta^n$$

ausgedrückt, wobei Θ die Temperatur in Energieeinheiten, a und n Konstanten sind. Für feste Körper ist $n = 4$, für ein Flüssigkeitströpfchen, das Oberflächenschwingungen ausführt, erhält man $n = 7/2$ [4,70], für ein entartetes FERMI-Gas (FERMI-Flüssigkeit) ist $n = 2$. Wenn also die Energiezustände von Kernen den Zuständen einer FERMI-Flüssigkeit ähnlich sind, so kann man die Anregungsenergie des Kerns durch die Beziehung

$$E = \frac{a}{2}\Theta^2 \tag{4.11.1}$$

---

[1]) An Stelle des einen Begriffs Compoundkern werden manchmal die beiden Begriffe „Compoundkern" und „Compoundsystem" eingeführt [4,69]. Als Compoundsystem bezeichnet man dabei ein Nukleonensystem, dessen gesamte Anregungsenergie die Ablösearbeit für ein Nukleon überschreitet, unabhängig davon, auf welche Freiheitsgrade diese Energie konzentriert ist. Als Compoundkern bezeichnet man dann diejenigen Zustände des Compoundsystems, bei denen die Anregungsenergie statistisch über alle (oder viele) Freiheitsgrade des Systems von Nukleonen verteilt ist.

ausdrücken, wobei a eine Konstante und Θ die Temperatur in Energieeinheiten darstellt. Die Wärmekapazität

$$C = \frac{dE}{d\Theta} = a\,\Theta \tag{4.11.2}$$

hängt linear von der Temperatur ab und stellt in den benutzten Einheiten eine dimensionslose Zahl dar. Die Entropie des Systems ist

$$S = \int_0^\Theta \frac{C\,d\Theta}{\Theta} = a\Theta = \sqrt{2aE}. \tag{4.11.3}$$

Die Beziehungen (4.11.1), (4.11.2) und (4.11.3) bilden die Grundlage der Kernthermodynamik.

Nach dem allgemeinen BOLTZMANNschen Prinzip ist

$$S = \ln W, \tag{4.11.4}$$

wobei W die Zahl der Möglichkeiten zur Realisierung eines Zustands mit gegebener Entropie S, d. h. die Zahl der möglichen Zustände mit gegebener Energie (mit allen möglichen Drehimpulsen), darstellt. Die Zahl der Zustände je Energieeinheit ist

$$\omega(E) = \frac{dW}{dE} = \frac{dS}{dE}\,\mathrm{e}^S = \frac{1}{\Theta}\,\mathrm{e}^S. \tag{4.11.5}$$

Der mittlere Abstand zwischen den Niveaus D ist proportional ω^{-1}. Es gilt somit

$$D = \Theta\,\mathrm{e}^{-\sqrt{2aE}}. \tag{4.11.6}$$

Die Gl. (4.11.6) gibt die exponentielle Abnahme des mittleren Niveauabstands mit wachsender Anregungsenergie richtig wieder. Vernachlässigt man Oberflächeneffekte, so ist die Konstante a proportional der Massenzahl. Gl. (4.11.6) bestimmt folglich qualitativ die Abhängigkeit des mittleren Niveauabstands der Kerne von A. Für den Absolutwert des Abstands zwischen den Niveaus erhält man einen etwas zu kleinen Wert, da in (4.11.6) die entarteten Zustände, d. h. die Fälle, bei denen mehrere Zustände zu ein und derselben Energie gehören, nicht berücksichtigt sind. Außerdem treten wegen der verschiedenen Erhaltungssätze bei den Experimenten meist nur Niveaus eines bestimmten Typs in Erscheinung. So werden z. B. beim Stoß eines langsamen Neutrons mit einem Kern nur Niveaus mit dem Drehimpuls $J = J_0 \pm {}^1/_2$ angeregt, wobei J_0 der Spin des Targetkerns ist. Deshalb muß man zum Vergleich mit dem Experiment den mittleren Abstand zwischen Niveaus mit bestimmten Werten des Drehimpulses, der Parität usw. kennen.

Betrachten wir einen Zustand mit dem Drehimpuls $\hbar\,J$. Bei großen Werten des Drehimpulses $J \gg 1$ kann man eine klassische Näherung verwenden. In dieser Näherung entsprechen den Kernzuständen mit dem Drehimpuls $\hbar\,J$ Rotationen des Körpers als Ganzem mit der Energie[1]) $E_J = \hbar^2\,J^2/2I_0$, wobei

[1]) Hier wird die Rotation des Kerns klassisch betrachtet. Deshalb besitzt das Trägheitsmoment I_0 keine Beziehung zum Trägheitsmoment eines nichtsphärischen Kerns, das die „wellenförmige“ Rotationsbewegung charakterisiert.

$I_0 = {}^2/_5\, m A R^2 = {}^2/_5\, m A^{5/3} r_0^2$ das Trägheitsmoment einer Kugel der Masse mA vom Radius R ist.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Gesamtdrehimpuls des Kerns im Intervall $(J, J+1)$ liegt, ist

$$\alpha_J = \frac{J^2 \exp\left\{-\frac{\hbar^2 J^2}{2\Theta I_0}\right\}}{\int\limits_0^\infty J^2 \exp\left\{-\frac{\hbar^2 J^2}{2\Theta I_0}\right\} dJ} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2 I_0 \Theta}{\hbar^2}\right)^{-3/2} J^2 \exp\left\{-\frac{\hbar^2 J^2}{2\Theta I_0}\right\}. \tag{4.11.7}$$

Bei $\frac{2\Theta I_0}{t_1^2} \gg 1$ gilt

$$\alpha_J = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2 I_0 \Theta}{\hbar^2}\right)^{-3/2} J^2. \tag{4.11.8}$$

Die Größe α_J bestimmt den Anteil derjenigen Kernniveaus, die einen vorgegebenen Drehimpuls J besitzen. Um die Abstände zwischen den Energieniveaus mit dem gegebenen J festzustellen, muß (4.11.6) durch α_J dividiert werden. Man erhält

$$D_J = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{I_0}{\hbar^2}\right)^{3/2} \frac{\Theta^{5/2}}{J^2} \exp\{-S\}. \tag{4.11.9}$$

Diese Formel ist gültig für große Werte von J und $\Theta > \hbar^2/2 I_0$. Setzt man $r_0 = 1{,}4 \cdot 10^{-13}$ cm, $A = 100$ und $\Theta = 1$ MeV ein, so erhält man

$$2 I_0 \Theta\, \hbar^{-2} \approx 100.$$

Aus (4.11.1) und (4.11.3) folgt

$$\Theta = \frac{2E}{S}. \tag{4.11.10}$$

Wird dies in (4.11.9) eingesetzt, so erhält man

$$S^{5/2} e^S = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{I_0}{\hbar^2}\right)^{3/2} (2E)^{5/2} J^{-2} D_J^{-1}. \tag{4.11.11}$$

Setzt man $E = 8$ MeV, $D_J = 5$ eV, $A = 100$ und $J = 1$, so erhält man aus (4.11.11) den Wert $S \approx 14$[1]) und folglich $\Theta = 2E/S \approx 1{,}1$ MeV. Diese Zahlen geben nur eine Vorstellung von der Größenordnung, da die Formel (4.11.9) nur bei großen J Gültigkeit besitzt.

Zur qualitativen Abschätzung des Niveauabstands geht man gewöhnlich von folgendem Ausdruck für die Dichte der Kernniveaus $\omega \sim 1/D$ aus:

$$\omega(E) = a \exp \sqrt{b E}. \tag{4.11.12}$$

Die Parameter a und b werden aus dem Experiment bestimmt. Heidman und Bethe [4,71] geben für den Parameter b im Gebiet der Massenzahlen $15 < A < 70$ den Wert $b = 0{,}14(A - 12)$ [MeV^{-1}] an.

---

[1]) Wir erinnern daran, daß für gewöhnliche Körper die Entropie in dimensionslosen Einheiten von der Größenordnung 10^5 ist.

Eine der Methoden zur experimentellen Bestimmung des Niveauabstands stellt die Untersuchung der Wirkungsquerschnitte des Resonanzeinfangs von Nukleonen dar. In der Tab. 17 sind D-Werte angeführt, die auf diese Weise [4,71] erhalten wurden. Die Anregungsenergie setzt sich additiv aus der Bindungsenergie des Nukleons und der Relativenergie von Nukleon und Kern zusammen.

Tabelle 17

Die mittleren Niveauabstände einiger Kerne

Targetkern	Einfallendes Nukleon	Energie der Relativbewegung [MeV]	Zahl der Resonanzen	D [keV]
^{15}N	p	0,8 ··· 1,4	3	160
^{19}F	p	0,18 ··· 2,2	18	110
^{27}Al	p	0,45 ··· 2,59	30	36
^{16}O	n	0 ··· 1,45	3	500
^{19}F	n	0 ··· 0,70	7	100
^{23}Na	n	0,03 ··· 1,0	8	120
^{27}Al	n	0,01 ··· 1,0	12	83
^{27}Al	n	0,13 ··· 0,5	10	37
^{40}Ca	n	0,03 ··· 0,52	6	82

4.12. Emission von Teilchen aus dem Compoundkern als Verdampfungsprozeß

Wir verwenden die Bezeichnung Compoundkern, wenn die Anregungsenergie die Bindungsenergie eines Nukleons überschreitet. Die Zustände des Compoundkerns sind quasistationär, da aus diesen Zuständen Nukleonen und γ-Quanten emittiert werden können. Die Niveaus des Compoundkerns besitzen eine beträchtliche Breite Γ, welche die Wahrscheinlichkeit $e^{-\Gamma t}$ dafür bestimmt, den Compoundkern im gegebenen Zustand aufzufinden. Im allgemeinen kann der Compoundkern Nukleonen mit verschiedenen Drehimpulsen emittieren. Die Emission von γ-Quanten erfolgt mit beträchtlich kleinerer Wahrscheinlichkeit. Die gesamte Niveaubreite setzt sich additiv aus den Partialbreiten für die Emission von γ-Quanten (Γ_γ), von Neutronen mit dem Drehimpuls j (Γ_{nj}), von Protonen mit dem Drehimpuls j (Γ_{pj}) und von anderen Teilchen (Γ') zusammen:

$$\Gamma = \Gamma_\gamma + \sum_j (\Gamma_{nj} + \Gamma_{pj}) + \Gamma'.$$

Von FRENKEL [4,68] und danach von WEISSKOPF [4,72] ist vorgeschlagen worden, die Emission von Nukleonen aus dem Compoundkern mit Methoden der Thermodynamik zu beschreiben. In der thermodynamischen Theorie wird die Emission von Neutronen in Analogie zur Verdampfung von Atomen aus flüssigen Körpern oder zur Verdampfung von Elektronen aus erhitzten Metallen (RICHARDSON-Effekt) als Abdampfung betrachtet. Zur elementaren quantitativen Beschreibung des Abdampfungseffekts betrachten wir das thermodynamische Gleichgewicht zwischen dem „erhitzten Kern" und dem

„gesättigten Neutronendampf". Im thermodynamischen Gleichgewicht werden in der Zeiteinheit gleichviel Neutronen verdampfen und kondensieren. Außerhalb des Kerns besitzen die Neutronen eine geringe Dichte, deshalb kann man ihre Energieverteilung durch eine MAXWELL-Verteilung annähern:

$$df(\varepsilon) = \text{const} \cdot \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\Theta}\right) \sqrt{\varepsilon}\, d\varepsilon. \tag{4.12.1}$$

Da beim thermodynamischen Gleichgewicht die Zahl der verdampfenden Neutronen gleich der Zahl der absorbierten Neutronen ist, kann man an Stelle der Zahl der emittierten Neutronen auch die Zahl der vom Kern je Sekunde absorbierten Neutronen berechnen. Diese Zahl ist proportional der Neutronengeschwindigkeit, d. h. zu $\sqrt{\varepsilon}$, der Neutronendichte bei gegebener Energie, d. h. zu $\sqrt{\varepsilon} \exp(-\varepsilon/\Theta)\, d\varepsilon$, dem Querschnitt des Kerns und dem Anlagerungskoeffizienten $\eta(\varepsilon)$ für die Neutronen, der im allgemeinen eine Funktion von ε sein wird. Berücksichtigt man die energieabhängigen Faktoren, so erhält man

$$dN(\varepsilon) = \text{const} \cdot \varepsilon\, \eta(\varepsilon) \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\Theta}\right) d\varepsilon. \tag{4.12.2}$$

Dieser Ausdruck gibt ebenfalls die Zahl der in einer Sekunde vom Kern emittierten Neutronen mit Energien zwischen ε und $\varepsilon + d\varepsilon$ an. Die Formel (4.12.2) ist gültig, wenn 1. das Energieintervall $d\varepsilon$ so groß gewählt wird, daß in dem Kern, der nach der Neutronenemission zurückbleibt, noch zahlreiche angeregte Niveaus verbleiben, d. h., wenn $d\varepsilon$ größer als die Energiedifferenz zwischen benachbarten Niveaus in dem zurückbleibenden Kern ist, und wenn 2. die Anregungsenergie E des Anfangskerns so groß ist, daß der nach der Emission eines Neutrons zurückbleibende Kern fast noch die gleiche Anregungsenergie besitzt, d. h., wenn $E \gg E_0 + \varepsilon$ ist, wobei $E_0 \approx 6$ bis 7 MeV die Bindungsenergie des Neutrons darstellt. Die letzte Bedingung ist fast nie erfüllt; bei der Emission eines Neutrons verändert sich die Anregungsenergie wesentlich, deshalb kann man im Augenblick der Emission nicht von der Temperatur des Kerns sprechen.

Wir betrachten nun die Ableitung von WEISSKOPF für die Zahl der vom angeregten Kern emittierten Neutronen. Hierbei wird der Unterschied zwischen der Statistik eines Systems mit relativ kleiner Teilchenzahl und der üblichen Statistik makroskopischer Körper berücksichtigt.

Wir nehmen an, daß der Kern A mit der Anregungsenergie E_A ein Neutron im Energieintervall $(\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon)$ emittiert und dabei in den Kern B mit der Anregungsenergie $E_B = E_A - E_0 - \varepsilon$ übergeht. Wir bezeichnen die über viele Quantenzustände im Energieintervall $(E_A, E_A + d\varepsilon)$ gemittelte Wahrscheinlichkeit dieses Prozesses je Zeiteinheit mit $W_n(\varepsilon)\, d\varepsilon$. Die Wahrscheinlichkeit (in der Zeiteinheit) des umgekehrten Prozesses, d. h. des Einfangs eines Neutrons mit der Energie ε und der Relativgeschwindigkeit $v = \sqrt{2\varepsilon/M}$ durch den Kern B, besitzt nach Mittelung über das Energieintervall $(E_B, E_B + d\varepsilon)$ die Gestalt

$$W_c = \frac{\sigma(E_A, \varepsilon)\, v}{\Omega}. \tag{4.12.3}$$

Hierbei ist $\sigma(E_A, \varepsilon)$ der Querschnitt für den Stoß eines Neutrons der Energie ε mit dem Kern B (E_B), der zur Bildung des Compoundkerns A (E_A) führt. Mit Ω wird das Volumen bezeichnet, in dem sich das Neutron und der Kern befinden.

Bei thermodynamischem Gleichgewicht muß die Gleichung

$$W_n(\varepsilon)\,\omega_A(E_A)\,d\varepsilon = W_c\,\omega_B(E_B)\,dN(\varepsilon) \tag{4.12.4}$$

erfüllt sein. Hierbei ist $\omega_A(E_A)\,d\varepsilon$ die Zahl der möglichen Zustände des Kerns A mit der Energie E_A im Intervall $d\varepsilon$. Mit $\omega_B(E_B)\,d\varepsilon$ wird die entsprechende Größe für den Kern B bezeichnet. Die Zahl der Quantenzustände des Neutrons mit der Energie ε, $\varepsilon + d\varepsilon$ im Volumen Ω ist

$$dN(\varepsilon) = \frac{\Omega\, g\, M}{2\pi^2\,\hbar^3}\,(2M\,\varepsilon)^{1/2}\,d\varepsilon; \tag{4.12.5}$$

$g = 2s + 1$ ist die Zahl der Spinzustände (für das Neutron gilt $g = 2$).

Bei Berücksichtigung von (4.12.3) und (4.12.5) folgt aus (4.12.4)

$$W_n(\varepsilon)\,d\varepsilon = \frac{\omega_B(E_B)}{\omega_A(E_A)}\,\sigma(E_A, \varepsilon)\,\frac{g\,M\,\varepsilon}{\pi^2\,\hbar^3}\,d\varepsilon. \tag{4.12.6}$$

Die Gl. (4.12.6) verknüpft die Energieverteilung der emittierten Neutronen mit der Niveaudichte ω_B des Kerns B und dem Querschnitt $\sigma(E_A, \varepsilon)$ des umgekehrten Prozesses. Werden nur die energieabhängigen Faktoren beibehalten, läßt sich (4.12.6) in der Form

$$W_n(\varepsilon)\,d\varepsilon = \text{const}\cdot\sigma(E_A, \varepsilon)\,\omega_B(\varepsilon_{max} - \varepsilon)\,\varepsilon\,d\varepsilon \tag{4.12.6a}$$

schreiben, wobei $\varepsilon_{max} = E_A - E_0$ die maximal mögliche Energie der emittierten Neutronen ist.

Die Gesamtwahrscheinlichkeit $\Gamma_n/\hbar$ für die Emission eines Neutrons erhält man durch Integration von (4.12.6) über alle Energien der emittierten Neutronen:

$$\frac{\Gamma_n}{\hbar} = \int_0^{\varepsilon_{max}} W_n(\varepsilon)\,d\varepsilon = \frac{g\,M}{\pi^2\,\hbar^3\,\omega_A(E_A)} \int_0^{\varepsilon_{max}} \sigma(E_A, \varepsilon)\,\omega_B\,(\varepsilon_{max} - \varepsilon)\,\varepsilon\,d\varepsilon. \tag{4.12.6b}$$

Aus Gl. (4.12.6a) kann man die Dichte der Energieniveaus $\omega_B(\varepsilon_{max} - \varepsilon)$ des Restkerns berechnen, wenn die Energieverteilung der emittierten Teilchen bekannt ist. GUGELOT [4,73] untersuchte die Energieverteilung von Protonen, die bei der Anregung von Kernen durch Protonen der Energie von 18,3 MeV emittiert werden, und berechnete daraus die relative Niveaudichte für verschiedene Werte der Anregungsenergien des Restkerns. In Abb. 22 sind die Werte der relativen Niveaudichte von Eisen in Abhängigkeit von der Anregungsenergie dargestellt. Das Gebiet a entspricht der Streuung der experimentellen Werte bei der Streuung um 60°, das Gebiet b der Streuung der experimentellen Werte bei Streuung um 150°. Aus Abb. 22 folgt, daß die schnellen Protonen vorwiegend in Vorwärtsrichtung gestreut werden. Dies

deutet darauf hin, daß sich der Streumechanismus von der Verdampfung unterscheidet, da die Winkelverteilung von abdampfenden Nukleonen nach der statistischen Theorie entweder isotrop oder symmetrisch bezüglich 90° sein muß (s. Abschn. 8.12.). In Abb. 23 sind Werte angeführt, die GUGELOT bei der Untersuchung der unelastischen Streuung von Protonen an Cu- und Pt-Kernen erhielt. Die Streuung der experimentellen Werte wird durch die schraffierten Gebiete gekennzeichnet. Es ist zu sehen, daß der Asymmetrieeffekt bei den schwereren Kernen stärker in Erscheinung tritt als beim Eisen.

Bei der unelastischen Streuung ist somit die statistische Theorie der Nukleonenemission nur begrenzt anwendbar.

Führt man die Entropie des Kerns als Logarithmus der Niveaudichte ein, d. h., setzt man

$$S(E) = \ln \omega(E),$$

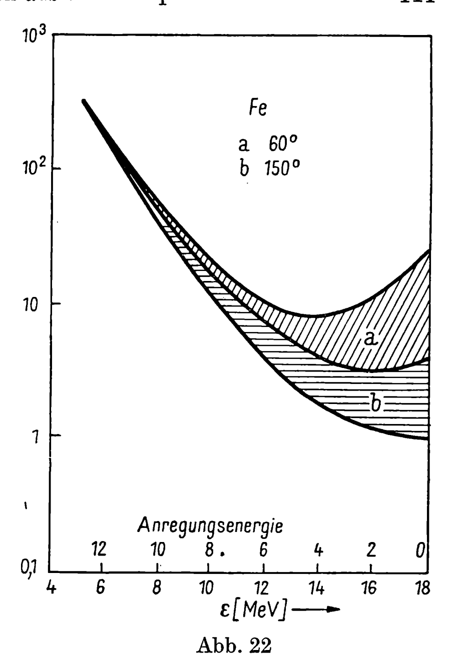
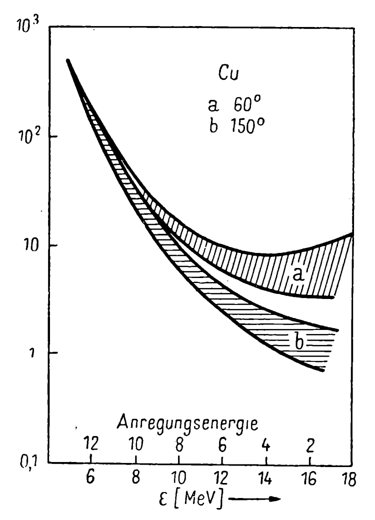


Abb. 22
Relative Niveaudichte des Fe-Kerns

Das Gebiet *a* gibt die Streuung der experimentellen Werte bei der Streuung um 60° an, das Gebiet *b* entsprechend bei der Streuung um 150°



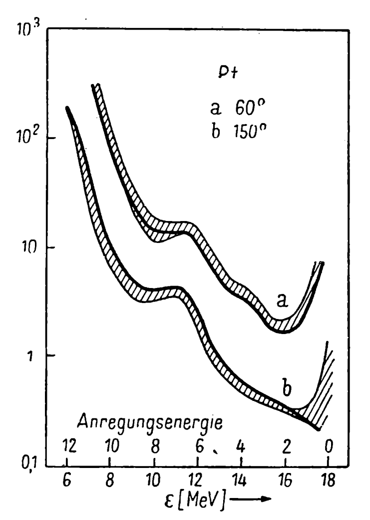


Abb. 23. Relative Niveaudichte des Cu- und Pt-Kerns

so kann man (4.12.6) in die Form

$$W_{\text{n}}(\varepsilon)\,d\varepsilon = \frac{g\,M\,\varepsilon}{\pi^2\,\hbar^3}\,\sigma(E_{\text{A}},\,\omega)\,\exp\{S_{\text{B}}(E_{\text{A}} - E_0 - \varepsilon) - S_{\text{A}}(E_{\text{A}})\}\,d\varepsilon \qquad (4.12.7)$$

bringen. Die Gl. (4.12.7) geht in (4.12.2) über, wenn man annimmt, daß $E_{\text{A}} \gg E_0$, $E_{\text{A}} \gg \varepsilon$ und daß S_{A} und S_{B} identische Funktionen sind: $S(E) = S_{\text{A}}(E) = S_{\text{B}}(E)$. Dann gilt

$$S(E_{\text{A}} - E_0 - \varepsilon) \approx S(E_{\text{A}}) - (E_0 + \varepsilon)\left(\frac{dS}{dE}\right)_{E_{\text{A}}} = S(E_{\text{A}}) - \frac{E_0 + \varepsilon}{\Theta_{\text{A}}},$$

wobei Θ_{A} die „Temperatur" des Kerns A darstellt. In dieser Näherung geht (4.12.7) in

$$W_{\text{n}}(\varepsilon)\,d\varepsilon = \frac{g\,M\,\varepsilon}{\pi^2\,\hbar^3}\,\sigma(E_{\text{A}},\,\varepsilon)\,e^{-E_0/\Theta_{\text{A}}}\exp\left\{-\frac{\varepsilon}{\Theta_{\text{A}}}\right\}d\varepsilon \qquad (4.12.7\,\text{a})$$

über. Wie schon weiter oben gesagt wurde, sind die bei der Ableitung von (4.12.7a) benutzten Ungleichungen im Kern nicht gültig. In einigen Fällen ist jedoch die Erfüllung der Ungleichung

$$\varepsilon \ll E_{\text{A}} - E_0 \qquad (4.12.8)$$

möglich. Dann kann man schreiben

$$S_{\text{B}}(E_{\text{A}} - E_0 - \varepsilon) = S_{\text{B}}(E_{\text{A}} - E_0) - \frac{\varepsilon}{\Theta_{\text{B}}(E_{\text{A}} - E_0)} - \varphi(\varepsilon). \qquad (4.12.9)$$

Dabei ist

$$\Theta_{\text{B}}(E_{\text{A}} - E_0) = \left\{\left(\frac{dS_{\text{B}}}{dE}\right)_{E_{\text{A}}-E_0}\right\}^{-1}, \qquad \varphi(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{d^2S}{dE^2}\right)_{E_{\text{A}}-E_0} + \dots \qquad (4.12.9\,\text{a})$$

Wird (4.12.9) in (4.12.7) eingesetzt, so erhält man

$$W_{\text{n}}(\varepsilon)\,d\varepsilon = C(\varepsilon)\,\varepsilon\,\exp\left\{-\frac{\varepsilon}{\Theta_{\text{B}}(E_{\text{A}} - E_0)} - \varphi(\varepsilon)\right\}d\varepsilon, \qquad (4.12.10)$$

wobei

$$C(\varepsilon) = \frac{g\,M}{\pi^2\,\hbar^3}\exp\{S_{\text{B}}(E_{\text{A}} - E_0) - S_{\text{A}}(E_{\text{A}})\}\,\sigma(E_{\text{A}},\,\varepsilon)$$

ist. Wird $\varphi(\varepsilon) = 0$ gesetzt, so fällt (4.12.10) formal mit der üblichen Verdampfungsformel (4.12.2) zusammen, in der man unter der Temperatur Θ die der Anregungsenergie $E_{\text{A}} - E_0$ des Kerns B entsprechende Temperatur zu verstehen hat. Der zusätzliche Faktor $\exp\{-\varphi(\varepsilon)\}$ in (4.12.10) verschiebt das Maximum der relativen Energieverteilung der emittierten Teilchen in Richtung größerer Energien. Wird diese Korrektion vernachlässigt, so kann man über (4.12.10) die mittlere Energie $\bar{\varepsilon}$ der emittierten Teilchen berechnen. Bei der Emission von Neutronen kleiner Energie ist $C(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-1/2}$, und man hat folglich $\bar{\varepsilon} = {}^3/_2\,\Theta_{\text{B}}$. Besitzen die emittierten Neutronen Energien von einigen MeV, so ist $C(\varepsilon) \approx \text{const}$ und deshalb $\bar{\varepsilon} = 2\,\Theta_{\text{B}}$. Im allgemeinen Fall werden die Neutronen mit Energien aus dem Intervall

$$2\,\Theta_{\text{B}} \leqq \bar{\varepsilon} \leqq \frac{5}{2}\,\Theta_{\text{B}}$$

emittiert.

Aus Gl. (4.12.10) läßt sich die *Neutronenbreite* Γ_n des Kernniveaus berechnen, d. h. derjenige Teil der Gesamtbreite des Niveaus, der wegen der möglichen Emission von Neutronen entsteht. Dazu muß (4.12.10) über alle Energien der emittierten Neutronen integriert und das Ergebnis mit $\hbar$ multipliziert werden:

$$\Gamma_n = \hbar \int W_n(\varepsilon)\, d\varepsilon = \bar{C}\Theta_B^2(E_A - E_0).$$

Hierbei ist

$$\bar{C} = \frac{\int C(\varepsilon)\, \varepsilon \exp\left(-\varphi(\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{\Theta_B}\right) d\varepsilon}{\int \varepsilon \exp\left(-\varphi(\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{\Theta_B}\right) d\varepsilon}.$$

Außer Neutronen können von stark angeregten Kernen auch geladene Teilchen emittiert werden (p, α u. a.). Die oben angeführten Formeln kann man auch dazu benutzen, die Wahrscheinlichkeit der Emission von geladenen Teilchen abzuschätzen. Man muß dazu den Einfluß des COULOMB-Feldes auf den Wirkungsquerschnitt der Bildung des Compoundkerns $\sigma_C(E_A, \varepsilon)$ beim umgekehrten Prozeß berücksichtigen.

Der Wirkungsquerschnitt für die Bildung des Compoundkerns durch Protonen der Relativenergie ε läßt sich durch

$$\sigma_p(\varepsilon) = \frac{\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1)\, T_l(\varepsilon)$$

ausdrücken (s. Abschn. 8.2.), wobei $T_l(\varepsilon)$ der Durchdringungskoeffizient des COULOMB- und des Zentrifugalwalls ist. Für Atomkerne mit $Z = 8$ und 20 sind

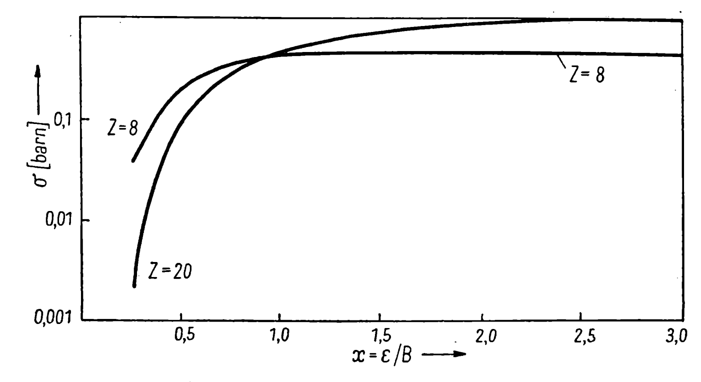


Abb. 24. Wirkungsquerschnitt für die Compoundkernbildung durch Protonen

die Werte von $\sigma_p(\varepsilon)$ als Funktion des Verhältnisses der Protonenenergie zur Maximalenergie des COULOMB-Walls (B) in Abb. 24 dargestellt. Sie wurden der Arbeit [4,71] entnommen.

Den Querschnitt des umgekehrten Prozesses $\sigma(E_A, \varepsilon)$ kann man auf der Grundlage klassischer Betrachtungen grob abschätzen. Man nimmt an, daß

das Teilchen, das in den Bereich der Kernkräfte gelangt ist, vom Kern absorbiert wird. Dann gilt

$$\sigma(E_A, \varepsilon) = \begin{cases} \pi R^2\left(1 - \frac{B}{\varepsilon}\right) & \text{für} \quad \varepsilon > B, \\ 0 & \text{für} \quad \varepsilon < B. \end{cases}$$

Dabei bedeuten R den Kernradius, $B = Z_A Z e^2/R$, $e Z_A$ die Ladung des Kerns und $e Z$ die des Teilchens. Bei $R \approx 1{,}5 A^{1/3}\, 10^{-13}$ [cm] ist $B \approx Z_A Z A^{1/3}$ [MeV].

An Stelle der Zerlegung (4.12.9) benutzen wir jetzt besser

$$S_B(E_A - E_0 - \varepsilon) = S_B(E_A - E_0 - B) - \frac{\varepsilon - B}{\Theta_B(E_A - E_0 - B)} - \Phi(\varepsilon - B). \quad (4.12.11)$$

Mit Hilfe von (4.12.7) erhalten wir dann

$$W_p(\varepsilon)\, d\varepsilon = C(\varepsilon - B) \exp\left\{- \frac{\varepsilon - B}{\Theta_B(E_A - E_0 - B)} - \Phi(\varepsilon - B)\right\} d\varepsilon, \quad (4.12.12)$$

wobei wir folgende Abkürzung verwendet haben:

$$C = R^2 \frac{g M}{\pi \hbar^3} \exp\{S_B(E_A - E_0 - B) - S_A(E_A)\}.$$

Vergleicht man (4.12.12) mit (4.12.10), so sieht man, daß die Bindungsenergie E_0 der Gl. (4.12.10) sozusagen durch $E_0 + B$ ersetzt wird. Die Funktion der Energieverteilung wird in Richtung größerer Energien um den Betrag B verschoben. Die Gl. (4.12.12) ist nur für $\varepsilon > B$ anwendbar, wenn die Quanteneffekte nicht wesentlich sind. Für $\varepsilon \leqq B$ muß man eine strengere quantenmechanische Lösung der Aufgabe durchführen.

Kerne, die gegen Emission von Positronen stabil sind, besitzen eine größere Wahrscheinlichkeit für die Emission von Neutronen als für die Emission von Protonen. Bei der Anregung von Kernen mit einer Massenzahl $Z > 30$ durch Neutronen und γ-Strahlen (nicht allzu großer Energie) wird keine Protonenemission beobachtet. Ist der Kern (A + n) stabil gegen α-Zerfall, so ist die Emission von α-Teilchen weniger wahrscheinlich als die Emission von Neutronen.

In einigen Fällen kann der Compoundkern auch verschiedene Arten von Teilchen emittieren. Die Wahrscheinlichkeit der Emission von Teilchen eines bestimmten Typs ist

$$W_i = \frac{K_i}{\sum_l K_l},$$

wobei K_i proportional derjenigen Partialbreite des Niveaus ist, die einem Zerfall unter Emission eines Teilchens der Sorte i entspricht. K_i ist eine Funktion der Energie ε_{max}, die gleich der Anregungsenergie des Compoundkerns ohne die Bindungsenergie des i-ten Teilchens ist. Nach (4.12.6b) kann man schreiben

$$K_i(\varepsilon_{max}) = \begin{cases} (2s_i + 1)\, M_i \int\limits_0^{\varepsilon_{max}} \varepsilon\, \sigma_i(\varepsilon)\, \omega_i(\varepsilon_{max} - \varepsilon)\, d\varepsilon & \text{für} \quad \varepsilon_{max} > 0, \\ 0 & \text{für} \quad \varepsilon_{max} < 0. \end{cases}$$

Hierbei sind $\sigma_i(\varepsilon)$ der Wirkungsquerschnitt für die Bildung des Compoundkerns, $\omega_i(\varepsilon)$ die Niveaudichte des Restkerns, s_i und M_i der Spin und die Masse des i-ten Teilchens.

Nur im Gebiet kleiner Energien der emittierten Teilchen stimmen die Voraussagen der statistischen Theorie mit den Messungen des Energiespektrums der von Kernen emittierten Neutronen [4,74] und Protonen [4,73; 4,75] überein. Die Energieverteilung der Teilchen, an die ein großer Teil der Anregungsenergie des Kerns übertragen wird, unterscheidet sich wesentlich von der MAXWELL-Verteilung (vgl. Abschn. 14.1.).

KAPITEL 5

α-ZERFALL UND KERNSPALTUNG

5.1. Dynamische Instabilität schwerer Kerne

Die mittlere Bindungsenergie je Nukleon ist besonders groß für Kerne mit Massenzahlen in der Nähe von 100. Daher erweisen sich viele schwere Kerne bezüglich einer Spaltung in 2 Kerne mit ungefähr gleicher Masse (M_1 und M_2) als instabil. Davon überzeugt man sich leicht, wenn man folgende Energiedifferenz berechnet:

$$\Delta E = (M_0 - M_1 - M_2)\, c^2. \tag{5.1.1}$$

Hierbei bedeutet M_0 die Masse des schweren Kerns. Wie BOHR und WHEELER [5,1] zeigten, wird der Energieunterschied (5.1.1) für Kerne mit einer Massenzahl größer als 110 positiv.

Für Kerne mit Massenzahlen größer als 190 erweist sich auch die Emission von α-Teilchen als energetisch günstig.

Dennoch spalten sich viele schwere Kerne nicht und emittieren auch keine α-Teilchen mit endlich großer Wahrscheinlichkeit, da diese Prozesse durch die Anwesenheit eines großen Potentialwalls gehindert werden.

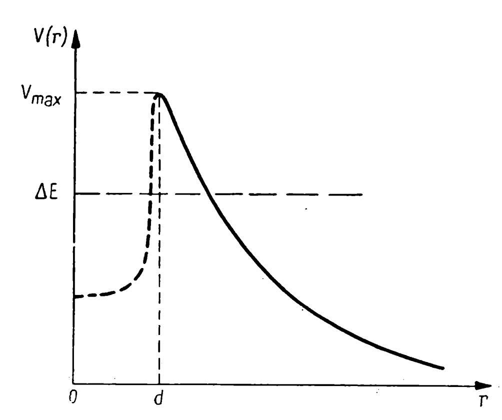


Abb. 25. Wechselwirkungsenergie von Spalt- oder α-Zerfallsprodukten in Abhängigkeit vom Abstand

Mit anderen Worten, die Kernspaltung und der α-Zerfall von Kernen, die sich im Grundzustand befinden, verlaufen immer über einen Zwischenzustand. Die Energie dieses Zwischenzustands erweist sich wesentlich größer als die Energie des Anfangszustands des Kerns und als die Energie der Endzustände des Zerfalls. Trägt man die potentielle Energie der beiden Spaltprodukte (oder die Energie des α-Teilchens und des Tochterkerns) als Funktion ihres gegenseitigen Abstands r auf, so erhält man die in der Abb. 25 für $r > d$ dargestellte Kurve (d ist die Summe aus den Radien der Spaltprodukte). Für Abstände $r < d$ treten anziehende Kernkräfte auf. Diese verkleinern den Wert der potentiellen Energie sehr stark. Dabei verliert die Koordinate r ihren Sinn, da beide Spaltprodukte sich zu einem Ganzen zusammenfügen. Dem Maximum der potentiellen Energie

entspricht größenordnungsmäßig $V_{\max} \approx Z_1 Z_2 e^2/d$. Zum Beispiel beträgt bei der Spaltung eines Goldkerns in zwei gleiche Teile $V_{\max} \approx 173$ MeV, die Größe ΔE, die durch die Formel (5.1.1) bestimmt ist, besitzt jedoch den Wert 132 MeV. Bei der Spaltung des Goldkerns ist also ein „Potentialwall" mit einer Höhe von ungefähr 41 MeV zu überwinden.

Infolge der großen Masse der Spaltprodukte ist die Durchdringungswahrscheinlichkeit durch den Potentialwall sehr klein. Für schwere Kerne (Th bis Pu) liegt der Grundzustand etwa 5 MeV tiefer als $V_{\max}$. In diesem Fall beträgt die Lebensdauer in bezug auf Spaltung $10^9 \cdots 10^{17}$ a. Für Kerne mit größerer Ladung und größeren Massenzahlen verkleinert sich die Lebensdauer bezüglich der Spaltung. So beträgt diese Zeit für Fm nur noch einige Stunden.

Die hier beschriebene spontane Spaltung der Kerne wurde erstmals 1940 von Fljorow und Petrshak [5,2] experimentell beobachtet. Sie zeigten, daß die Lebensdauer in bezug auf spontane Spaltung für Uran und Thorium von der Größenordnung $10^{15} \cdots 10^{17}$ a ist.

Soll die Spaltung mit beobachtbarer Wahrscheinlichkeit vor sich gehen, so muß man dem Kern eine zusätzliche Energie E_f, die etwa gleich $V_{\max} - \Delta E$ ist, zuführen. Die Energie E_f wird als *Schwellenenergie* des Spaltprozesses bezeichnet. Die Spaltung kann durch γ-Quanten, Neutronen, Protonen und andere Teilchen hervorgerufen werden. Dabei müssen diese den Kern in einen angeregten Zustand überführen, dessen Energie E_f übersteigt.

Die Uranspaltung beim Beschuß des Urans mit Neutronen wurde von Hahn und Strassmann im Jahre 1939 entdeckt. Bis dahin waren nur Kernreaktionen bekannt, bei denen relativ leichte Teilchen und γ-Quanten emittiert wurden. Wie sich erwies, zerfällt das Uran bei der Spaltung in 2 Bruchstücke, die wesentlich leichter als das Uran selbst sind. Die Massenzahlen dieser Bruchstücke liegen bei 90 und 140. Eine zweite Besonderheit des Spaltprozesses von Urankernen besteht in der Freisetzung einer großen Energie (≈ 200 MeV), die die Energie anderer exothermer Kernreaktionen um eine Größenordnung übersteigt. Als dritte Besonderheit ist schließlich zu nennen, daß diese Reaktion, die durch Neutronen ausgelöst wird, ihrerseits durch Emission einiger Neutronen begleitet wird.

Schon kurz nach der Entdeckung der Uranspaltung im Jahre 1939 bemerkte man, daß außer dem Uran auch andere schwere Kerne bei Neutronenbeschuß über Kernspaltung zerfallen können. Die hauptsächlichen Eigenarten der Uranspaltung werden auch an anderen schweren Kernen beobachtet. Eine Spaltung durch langsame Neutronen tritt jedoch nur an den Kernen ^{235}U, ^{233}U und ^{239}Pu auf. Die Besonderheiten der Spaltung dieser Kerne lassen unter entsprechenden Bedingungen sogenannte Kettenreaktionen (sich selbst unterhaltende Reaktionen) zu, bei denen große Energiebeträge frei werden. Zur Zeit bilden die Reaktionen dieser Art die Grundlage der Kernenergetik. Im vorliegenden Buche interessieren wir uns nur für den eigentlichen Spaltprozeß und berühren daher die Frage, die mit der Gewinnung von Kernenergie verbunden ist, nicht. Dieses Problem wird in speziellen Lehrbüchern und Monographien (siehe z. B. [5,3; 5,4]) behandelt.

Es liegen bereits große Erfolge bei der Untersuchung der Eigenschaften des Spaltprozesses vor. Die Theorie dieser Erscheinung ist jedoch noch recht unvollständig. Die Grundlagen einer Theorie der Kernspaltung sind in den Abschnitten 5.3. bis 5.8. dargestellt.

Wie schon oben bemerkt wurde, sind Kerne mit Massenzahlen größer als 190 in bezug auf α-Zerfall instabil. Der Zerfall des Mutterkerns in den Tochterkern und ein α-Teilchen verläuft stets mit positiver Energietönung. Experimentell gelingt es jedoch bis auf wenige Ausnahmen erst bei Kernen mit Ordnungszahlen größer als 82, den α-Zerfall festzustellen.

Bei der Untersuchung des α-Zerfalls erwies sich, daß α-aktive Kerne in der Regel mehrere Gruppen von α-Teilchen emittieren, die sich durch die Energie der α-Teilchen unterscheiden. Die intensivste Gruppe ist meist mit dem Übergang aus dem Grundzustand des Mutterkerns in den Grundzustand des Tochterkerns verbunden. Übergänge aus angeregten Zuständen des Mutterkerns sind meist durch Emission energiereicherer α-Teilchen (α-Teilchen großer Reichweite) gekennzeichnet. Übergänge vom Grundzustand des Mutterkerns in angeregte Zustände des Tochterkerns rufen Emission von monoenergetischen α-Teilchengruppen hervor. Die Energieunterschiede entsprechen den verschiedenen angeregten Zuständen des Tochterkerns.

Die Wahrscheinlichkeit für den α-Zerfall des Mutterkerns hängt sehr stark von der Energie der Relativbewegung von α-Teilchen und Tochterkern ab. Eine Verkleinerung der α-Teilchenenergie um 10% führt zu einer Verkleinerung der Zerfallswahrscheinlichkeit (und daher zu einer Vergrößerung der Lebensdauer des Mutterkerns) um mehr als den Faktor 10^3. Daher beobachtet man experimentell nur solche Zerfälle, die einem relativ schmalen Energieintervall zwischen 4 und 8 MeV entsprechen. Bei Energien kleiner als 4 MeV wird die Wahrscheinlichkeit des α-Zerfalls so klein, daß diese Prozesse nicht mehr beobachtbar sind.

Meist charakterisiert man den α-Zerfall durch die Halbwertzeit, d. h. durch die Zeit, in deren Verlauf die Hälfte der Mutterkerne zerfällt. Die Halbwertzeit schwankt zwischen Bruchteilen von Sekunden (z. B. $1{,}58 \cdot 10^{-4}$ s für ^{214}Po) und Milliarden Jahren (z. B. $4{,}49 \cdot 10^9$ a für ^{238}U).

Die relativ große Lebensdauer α-aktiver Kerne (im Verhältnis zur charakteristischen Kernzeit $\approx 10^{-22}$ s) führt zu einer kleinen natürlichen Linienbreite, die meist nicht den Wert einiger Millielektronenvolt übersteigt. Die Genauigkeit der Energiemessung von α-Teilchen ist sehr groß. Daher muß man bei Untersuchungen des α-Zerfalls an den Meßdaten der α-Teilchenenergie Korrektionen bezüglich der kinetischen Energie des Rückstoßkerns (Tochterkerns) anbringen. In diesem Fall kann man aus der gemessenen α-Teilchenenergie auf die Zerfallsenergie schließen. Bedeutet ε_α die α-Teilchenenergie, so gilt

$$E_{\text{Zerfall}} = \varepsilon_\alpha \frac{A}{A-4}.$$

Hierbei ist A die Massenzahl des Mutterkerns. In den nächsten Abschnitten betrachten wir die Grundlagen der Theorie des α-Zerfalls und der Spaltung schwerer Kerne.

5.2. Theorie des α-Zerfalls

Die erste Theorie über den α-Zerfall wurde 1928 von GAMOW [5,5] sowie von GURNEY und CONDON [5,6] entwickelt.

Die aus schweren Kernen beim α-Zerfall emittierten α-Teilchen sind in den Kernen vor dem Zerfall nicht vorhanden. Sie bilden sich während des Zerfallsprozesses. Die in [5,5] und [5,6] entwickelten Theorien umgingen die Frage der Bildung des α-Teilchens im Mutterkern. In diesen Theorien wurde ein System, bestehend aus dem Tochterkern (Ladung Ze) und einem α-Teilchen, betrachtet. Die potentielle Wechselwirkungsenergie zwischen beiden wurde in der Form

$$V(r) = \begin{cases} \frac{2Ze^2}{r} & \text{für} \quad r > d \\ -V_0 & \text{für} \quad r \leqq d \end{cases} \tag{5.2.1}$$

gewählt.

Die Wellenfunktion für die Relativbewegung von Tochterkern und α-Teilchen läßt sich in der Form

$$\psi_{E,l}(\mathfrak{r}) = \frac{u(r)}{r} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \tag{5.2.2}$$

schreiben, wenn das System einen Bahndrehimpuls $\hbar l$ besitzt. Die Radialwellenfunktion $u(r)$ genügt folgender Gleichung:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2} + V(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} - E\right) u(r) = 0. \tag{5.2.3}$$

Hierbei bedeutet μ die reduzierte Masse von α-Teilchen und Tochterkern. Das Glied $\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2}$ ist als kleiner Zusatz zur Wechselwirkungsenergie $V(r)$ anzusehen. Aus diesem Grund berücksichtigt man in der elementaren Theorie dieses Glied meist nicht. Läßt man $\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2}$ in der Gl. (5.2.3) weg, so schließt man die Möglichkeit aus, den α-Zerfall in Abhängigkeit von dem vom α-Teilchen weggetragenen Drehimpuls zu untersuchen. Will man jedoch diese Abhängigkeit mit untersuchen, so ist nicht nur dieses Glied, sondern auch die evtl. nichtsphärische Form des Mutterkerns (s. unten) zu berücksichtigen.

Die Gl. (5.2.3) wurde in der Arbeit von GAMOW [5,5] durch quasiklassische Methoden gelöst. SEXL [5,7] und PRESTON [5,8] lösten sie, indem sie die Lösungen für die Gebiete $r > d$ und $r < d$ aneinander anschlossen. Da der Gl. (5.2.3) nur eine sehr grobe Vorstellung über den α-Zerfall zugrunde liegt — sie berücksichtigt eine evtl. nichtsphärische Form des Kerns nicht und benutzt eine vereinfachte Vorstellung über das Potential im Gebiet $r < d$ —, sind Versuche einer genauen Lösung wenig gerechtfertigt. Zur Klärung der Abhängigkeit zwischen Zerfallswahrscheinlichkeit und Energie der α-Teilchen genügt es, in der quasiklassischen Näherung die Wahrscheinlichkeit für den Durchgang der α-Teilchen durch den Potentialwall zu berechnen. Wie aus

der Quantenmechanik bekannt ist, wird in der quasiklassischen Näherung die Durchdringungswahrscheinlichkeit durch den Ausdruck

$$P = \exp\left\{-\frac{2}{\hbar}\int_{r_1}^{r_2}\sqrt{2\mu[V(r) - E]}\,dr\right\} \tag{5.2.4}$$

beschrieben. Hierbei sind r_1 und r_2 Umkehrpunkte, die sich aus der Bedingung

$$V(r_1) = V(r_2) = E, \qquad r_2 > r_1$$

ergeben. Wählt man das Potential in der Form (5.2.1), so gilt $r_1 = d$, $r_2 = \frac{2Ze^2}{E}$. Setzt man diese Werte in (5.2.4) ein und integriert unter Berücksichtigung von (5.2.1), so ergibt sich

$$P = \exp\left\{\frac{-4Ze^2}{\hbar v}(\pi - 2\varphi_0 - \sin 2\varphi_0)\right\}. \tag{5.2.5}$$

Hierbei bedeutet $v = \sqrt{\frac{2E}{\mu}}$ die Geschwindigkeit der α-Teilchen und

$$\sin\varphi_0 = \left(\frac{Ed}{2Ze^2}\right)^{1/2}.$$

Die Wahrscheinlichkeit für den α-Zerfall je Sekunde (λ) bestimmt sich aus dem Produkt von Durchdringungswahrscheinlichkeit (5.2.5) und Zerfallswahrscheinlichkeit ohne Potentialwall ν:

$$\lambda = \nu P. \tag{5.2.6}$$

Die größten Schwierigkeiten verursacht die Berechnung des Faktors ν in (5.2.6), der die Wahrscheinlichkeit des α-Zerfalls bei Abwesenheit des Potentialwalls bestimmt. ν muß die Bildungswahrscheinlichkeit eines α-Teilchens im Kern, die Geschwindigkeit des α-Teilchens und andere Größen, die den inneren Zustand des Kerns beschreiben, enthalten. In den ersten Arbeiten Gamows wurde ν als „Frequenz" interpretiert, nämlich als die Frequenz, mit der das α-Teilchen auf den „Rand" des Kerns stößt. Er nahm also an, daß $\nu = v/2d$ ist, wobei v die Geschwindigkeit des α-Teilchens im Kern bedeutet.

Landau [5,9; 5,10] gab eine Abschätzung für diesen Faktor. Er ging dabei nur von der Niveaudichte im gesamten Kern aus. Das Verhalten des α-Teilchens im Kern wurde nicht betrachtet. Die Größe ν wird gleich $D/2\pi\hbar$ gesetzt, d. h. gleich der Frequenz eines Oszillators, der gerade dieselben Abstände zwischen seinen gequantelten Niveaus liefert, wie die Abstände zwischen den Niveaus im Kern im betrachteten Energieintervall sind. Dann nimmt die Formel, die die α-Zerfallskonstante liefert, folgende Form an:

$$\lambda = \frac{D}{2\pi\hbar}\exp\left\{-\frac{4e^2Z}{\hbar v}(\pi - 2\varphi_0 - \sin 2\varphi_0)\right\}. \tag{5.2.7}$$

In einigen Arbeiten (siehe z. B. [5,11]) wurde der Einfluß der Elektronenhülle auf den α-Zerfall berücksichtigt. Die Elektronen im Atom verkleinern den

Potentialwall für ein α-Teilchen etwas; außerdem geht beim α-Zerfall eine Umordnung in der Elektronenhülle vor sich, da sich die Ladung des Kerns um 2 Einheiten verringert. Wie in diesen Arbeiten gezeigt wurde, führt eine Berücksichtigung des Einflusses der Elektronenhülle dazu, daß an Stelle der Energie des α-Teilchens E in (5.2.7) der Ausdruck

$$E + \{73 Z^{4/3} + 65 Z^{5/3}\} \quad [\mathrm{eV}]$$

eingesetzt werden muß.

Vor kurzem untersuchte ERMA [5,12] erneut den Einfluß der Elektronenhülle auf die Durchdringungswahrscheinlichkeit des COULOMB-Walls. Er zeigte mit Hilfe des THOMAS-FERMI-Modells, daß die Elektronenhülle die Halbwertzeit der α-aktiven Kerne verringert. Dieser Effekt ist besonders wesentlich für α-Übergänge kleiner Energie. In der Tab. 18 sind Verhältnisse der Halbwertzeit ohne Berücksichtigung des Einflusses der Elektronenhülle (τ) zur Halbwertzeit mit Berücksichtigung dieses Einflusses (τ^*) für einige Kerne angeführt.

Tabelle 18

Einfluß der Elektronenhülle auf die Wahrscheinlichkeit des α-Zerfalls

Mutterkern	Energie der α-Teilchen [MeV]	τ/τ^*
^{222}Rn	5,486	1,55
^{212}Po	8,776	1,22
^{147}Sm	2,14	2,60

Logarithmiert man beide Seiten der Gl. (5.2.7) und nimmt an, daß $(2\varphi_0 - \sin 2\varphi_0)$ nur schwach energieabhängig ist, so läßt sich die angenäherte Beziehung

$$\ln \lambda = C - \frac{B}{\sqrt{E}} \tag{5.2.8}$$

finden. Diese Beziehung ist unter der Bezeichnung GEIGER-NUTTALL*sche Beziehung* bekannt.

Die Beziehung (5.2.8) beschreibt die experimentellen Werte befriedigend, wenn man für C und B [5,13] die in der Tab. 19 angegebenen Werte verwendet (und dabei die Energie der α-Teilchen in MeV ausdrückt).

Tabelle 19

Z	C	B
84	50,15	128,8
90	51,94	139,4
98	54,40	154,7

Die α-Teilchenenergie verkleinert sich für Isotope ein und desselben Elements mit wachsender Neutronenzahl. Diese Gesetzmäßigkeit wird gut durch die Abb. 26 illustriert. In dieser Abbildung ist die Abhängigkeit zwischen

der α-Teilchenenergie und der Massenzahl dargestellt [5,14]. Die ausgezogenen Linien verbinden die Punkte, die zu gleichen Ordnungszahlen gehören. Bei $A = 211$ zeigt sich ein scharfer Sprung in der Abhängigkeit zwischen Energie und Massenzahl für die Isotope des vorliegenden Elements, der mit der Auffüllung der Schale, die 126 Neutronen enthält, verknüpft ist. In der Arbeit [5,15] ist ein scharfer Knick für Kurven ähnlicher Art für die Kerne mit den Ordnungszahlen $Z = 98$, 99 und 100 und im Gebiet der Neutronenzahlen $N = 152$ festgestellt worden. Das kann als Hinweis auf die Existenz einer Unterschale mit der Neutronenzahl 152 dienen.

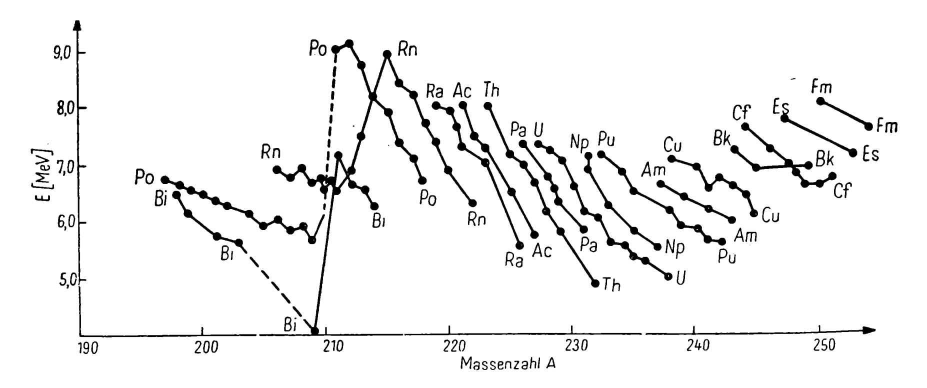


Abb. 26. Energie des α-Zerfalls in Abhängigkeit von der Massenzahl

Wie schon bemerkt wurde, hängt die Wahrscheinlichkeit des α-Zerfalls stark von der mit dem α-Teilchen weggetragenen Energie ab. Meist (für gg-Kerne sogar stets) ist der Übergang vom Grundzustand des Mutterkerns in den Grundzustand des Tochterkerns am wahrscheinlichsten. Übergänge in angeregte Zustände des Tochterkerns verlaufen nur dann mit merklicher Wahrscheinlichkeit, wenn diese angeregten Zustände nicht höher als 200 bis 300 keV über dem Grundzustand liegen. Im Falle von gg-Kernen, die α-aktiv sind, gehören zu solchen angeregten Zuständen Rotationsniveaus mit den Spins 0, 2, 4, 6, ... und gleicher Parität. Ein charakteristisches Beispiel für die Feinstruktur im Energiespektrum der α-Teilchen ist das in den Arbeiten von Goldin, Nowikowa und Tretjakow [5,16] angeführte α-Spektrum des ^{240}Pu im Gebiet von 5 MeV. Dieses Spektrum ist in der Abb. 27 dargestellt. Die α-Zerfälle in den Grundzustand und in die ersten beiden angeregten Zustände für eine Reihe von Tochterkernen (gg-Kerne; ^{230}U, ^{232}U, ^{234}U, ^{238}Pu, ^{240}Pu, ^{242}Cm) sind bereits untersucht worden. In allen diesen Fällen ist der Übergang in den Grundzustand am wahrscheinlichsten. Dem Übergang in den ersten angeregten Zustand entspricht ein Anteil von etwa 20 ··· 25% aller Übergänge, dem Übergang in den zweiten angeregten Zustand ein Anteil von 0,1 ··· 1%. Übergänge in den dritten Rotationszustand dieser Kerne konnten bisher noch nicht gefunden werden [5,17].

Sämtliche α-aktiven Kerne weichen erheblich von der kugelsymmetrischen Form ab. Darüber gibt der gut ausgeprägte Rotationscharakter der niederen angeregten Zustände dieser Kerne Aufschluß. Die Einzelteilchenzustände in solchen Kernen werden durch die Projektion des Gesamtdrehimpulses Ω_p des Nukleons auf die Symmetrieachse des Kerns bestimmt (s. Abschn. 4.3.). Nukleonenpaare, die gleich große Projektionen mit unterschiedlichem Vorzeichen besitzen, wechselwirken sehr stark miteinander. Im Grundzustand ist der Spin eines gg-Kerns daher $J = K = \sum_n \Omega_p = 0$. Der Spin im Grundzustand für einen Kern mit ungerader Massenzahl ist gleich dem Ω_p-Wert des letzten unpaarigen Nukleons. Das α-Teilchen bildet sich aus 2 Nukleonenpaaren mit gleichem $|\Omega_p|$, d. h., der Wert von K darf sich beim α-Zerfall nicht ändern. Aus diesem Grunde wird wegen der axialen Symmetrie des Kerns der α-Zerfall durch eine zusätzliche, angenäherte Auswahlregel charakterisiert: $\Delta K = 0$. Beim α-Zerfall von gg-Kernen gilt für den Grundzustand des Mutterkerns $J = K = 0$. Der Tochterkern kann sich in Zuständen bilden, die der Rotationsbande mit $K = 0$ entsprechen. In diesem Fall genügen alle Übergänge auf Niveaus aus dieser Bande der Auswahlregel $\Delta K = 0$. Der Übergang in den Grundzustand ist energetisch am günstigsten und vollzieht sich deshalb mit der größten Wahrscheinlichkeit. Auch der α-Zerfall von Kernen mit ungerader Massenzahl vollzieht sich mit der größten Wahrscheinlichkeit bei Erfüllung der Auswahlregel $\Delta K = 0$.

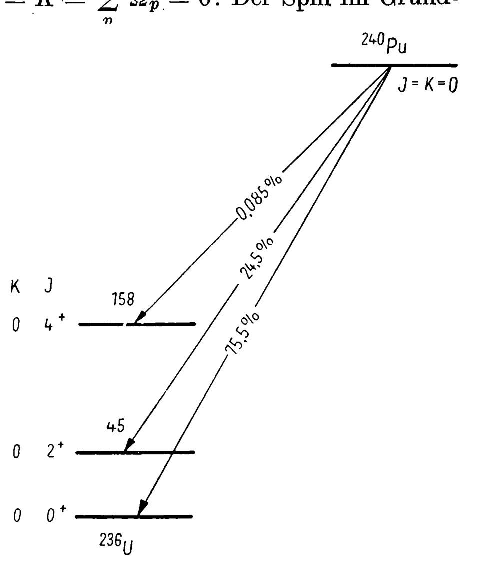


Abb. 27. α-Zerfallsschema des ^{240}Pu-Kerns
Die Energie ist in keV angegeben

Da alle Kernniveaus, die zu ein und derselben Rotationsbande gehören, gleiche Parität besitzen, ergeben sich für den vom α-Teilchen beim α-Zerfall des Kerns fortgetragene Bahndrehimpuls einige Einschränkungen. Beim Übergang aus dem Grundzustand des Mutterkerns auf Niveaus einer Rotationsbande des Tochterkerns können nur α-Teilchen entweder mit geradem l, wenn die Parität von Tochter- und Mutterkern zusammenfällt, oder mit ungeradem l, wenn die Paritäten verschieden sind, emittiert werden.

Fallen beim α-Zerfall von Kernen mit ungerader Massenzahl Spin und Parität in den Grundzuständen von Mutter- und Tochterkern zusammen (wie im Falle von gg-Kernen), so verläuft der intensivste Übergang auf den Grundzustand des Tochterkerns genauso wie in gg-Kernen. Als Beispiel eines solchen Übergangstyps dient der α-Zerfall $^{233}\text{U} \to {}^{229}\text{Th} + \alpha$. Die Grundzustände von ^{233}U und ^{229}Th besitzen den Spin $J = K = {}^5/_2$ und

gerade Parität. In der Abb. 28 ist das Zerfallsschema des ^{233}U (die Angaben wurden den Arbeiten [5,13] entnommen) und des ^{241}Am dargestellt. In diesem Fall vollzieht sich der intensivste Übergang auf das Niveau des Kerns ^{237}Np, das gleichen Spin und Parität wie der Grundzustand des ^{241}Am besitzt. Bemerkenswert ist die Tatsache, daß dieses Niveau der zweite angeregte Zustand des Kerns ^{237}Np ist. Übergänge in den Grundzustand und in den ersten angeregten Zustand des ^{237}Np sind sehr unwahrscheinlich (ihr Anteil beträgt nur 0,5% von allen anderen Übergängen). Diese Niveaus des Tochterkerns unterscheiden

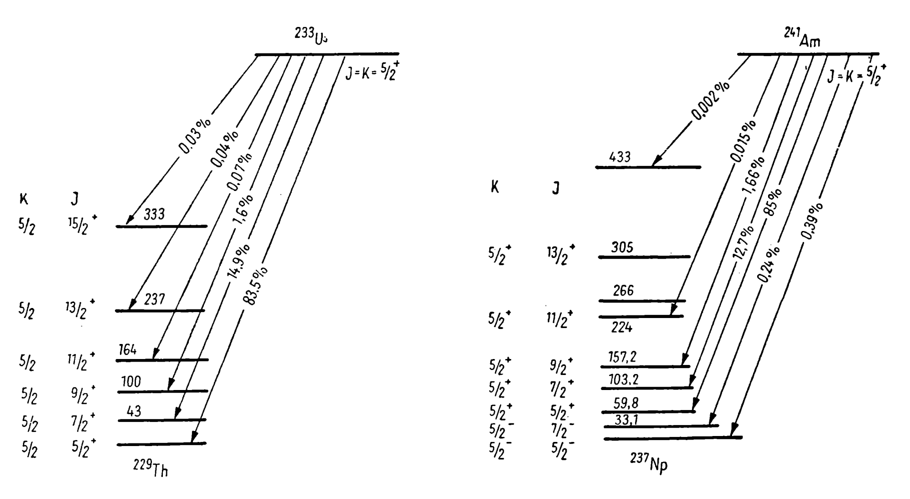


Abb. 28. α-Zerfallsschemata von Kernen mit ungerader Massenzahl
Die Energie ist in keV angegeben

sich in ihrer Parität vom Grundzustand des Mutterkerns. Als zweite Besonderheit des α-Zerfalls vom ^{241}Am ist der Umstand zu nennen, daß der Übergang nicht in die angeregten Zustände mit 266 und 433 keV erfolgt. Diese Niveaus gehören nicht zur Rotationsbande, die mit dem angeregten Niveau von 59,8 keV beginnt.

Übergänge ohne Spinänderung $\Delta K = 0$ und ohne Änderung der Parität gehören zu den wahrscheinlichsten Übergängen beim α-Zerfall. Solche Übergänge bezeichnet man als „*erleichterte*" *Übergänge.* Beim Zerfall des Kerns ^{231}Pa entspricht der Übergang auf das relativ hoch gelegene sechste angeregte Niveau des Tochterkerns ^{227}Ac mit einer Energie von 328 keV einem solchen „erleichterten" Übergang.

Übergänge, die mit einer Paritätsänderung verbunden sind, rufen offensichtlich eine wesentliche Veränderung im inneren Aufbau des Kerns hervor; aus diesem Grunde entsprechen ihnen kleine Wahrscheinlichkeiten. In der heutigen Zeit liegen schon einige Versuche für die theoretische Erklärung der oben angeführten Gesetzmäßigkeiten vor.

Für die Übergangswahrscheinlichkeit beim α-Zerfall auf verschiedene Rotationsniveaus des Tochterkerns schlug LANDAU [5,18] folgende Formel vor:

$$P = c(2J + 1) \exp\{-\alpha J(J + 1)\}. \tag{5.2.9}$$

Bei der Ableitung der Formel (5.2.9) berücksichtigte er, daß die Durchlässigkeit des COULOMB-Walls in jenen Gebieten am größten ist, die sich auf der Symmetrieachse des Kerns befinden.

Anregungswahrscheinlichkeiten der Rotationszustände im Tochterkern wurden für den α-Zerfall von gg-Kernen auch in den Arbeiten von NOSSOW [5,19], STRUTINSKI [5,20], RASMUSSEN und SEGALL [5,21], ADELSON-WELSKI, BRISGAL, PILIJA, GOLDIN und TER-MARTIROSJAN [5,22] ausgerechnet. In allen diesen Arbeiten wurde die SCHRÖDINGER-Gleichung für die Bewegung eines Teilchens außerhalb des Kerns unter der zusätzlichen Annahme untersucht, daß an der Kernoberfläche die Wellenfunktion einen konstanten Wert besitzt. Wegen der nichtsphärischen Form des Kerns sind die Radialwellenfunktionen für verschiedene Bahndrehimpulse stark miteinander verknüpft. Das erschwert die Rechnungen und führt notwendig zur Benutzung von numerischen Methoden [5,21; 5,22]. Da in den oben angeführten Theorien der Bildungsprozeß des α-Teilchens nicht untersucht wird, können diese Theorien auch nicht die Besonderheiten des α-Zerfalls, die mit der inneren Struktur des Kerns verknüpft sind, erklären. So kann z. B. diese Theorie die experimentell beobachtete [5,23] starke Veränderung der Übergangswahrscheinlichkeit auf das zweite angeregte Niveau ($J = 4^+$) in Abhängigkeit von der Massenzahl nicht erklären. Nach den experimentellen Werten ist die Anregung des Niveaus mit $J = 4^+$ beim α-Zerfall weniger wahrscheinlich als der Übergang in den Grundzustand, und zwar etwa 10mal für Th, etwa 10mal für U, etwa 18mal für Pu und etwa 400mal für Cm.

Für die qualitative Erklärung dieser Abhängigkeit wurde folgendes angenommen [5,24]: Die Bildung des α-Teilchens ist nicht gleich wahrscheinlich in allen Punkten der Oberfläche des Kerns, sie ist häufiger an den Punkten der Oberfläche, in denen die Wellenfunktionen der am schwächsten gebundenen Neutronen- und Protonenpaare ihren Maximalwert annehmen. Die Lage dieser Maxima hängt stark vom Besetzungsgrad der Nukleonenschalen ab. Die Emission eines α-Teilchens mit dem Bahndrehimpuls $\hbar\, l$ hängt ab von der Lage der Knotenpunkte des entsprechenden LEGENDRE-Polynoms l-ter Ordnung. Die LEGENDRE-Polynome gehen in die Ausdrücke der Wellenfunktionen ein. Fallen die Knotenpunkte dieser Polynome mit den Maxima der Bildungswahrscheinlichkeit für α-Teilchen zusammen, so wird die Emission von Teilchen mit dem Bahndrehimpuls $\hbar\, l$ wenig wahrscheinlich.

Die oben angeführten Theorien erklären die praktisch gleich großen Wahrscheinlichkeiten beim α-Zerfall des ^{233}U in die Rotationsniveaus des Kerns ^{229}Th mit den Spins $^{11}/_2$, $^{13}/_2$, $^{15}/_2$ ebenfalls nicht.

Wesentlich komplizierter ist die Theorie der relativen Intensitäten von α-Strahlen, die den Übergängen in angeregte Zustände von Kernen mit ungerader Massenzahl entsprechen. Der Übergang vom Niveau J_0 des Mutter-

kerns auf das Niveau J des Tochterkerns kann durch die Emission eines α-Teilchens mit dem Bahndrehimpuls $\hbar\, l$ begleitet werden. Dabei gilt

$$|J_0 - J| \leqq l \leqq J_0 + J.$$

Die Zerfallswahrscheinlichkeit für einen Mutterkern mit dem Spin J_0 in einen Tochterkern mit dem Rotationsniveau J wurde in der Arbeit von A. BOHR. FRÖMAN und MOTTELSON [5,13] berechnet:

$$P = P_0(Z\,E) \sum_{l=|J_0-J|}^{J+J_0} C_l\, |(J_0\, l\, J_0\, 0 |\, J\, J_0)|^2, \tag{5.2.10}$$

wobei

$$\ln P_0(Z\,E) = C(Z) - \frac{D(Z)}{\sqrt{E}}$$

ist. $C(Z)$ und $D(Z)$ bedeuten Parameter, die schwach von Z abhängen. Diese Parameter sind in der Arbeit [5,13] tabuliert. Die Koeffizienten C_l bestimmen die Emissionswahrscheinlichkeit von α-Teilchen mit dem Bahndrehimpuls $\hbar\, l$. Diese Koeffizienten sind als Parameter der Theorie zu betrachten. Die Formel (5.2.10) ist jedoch nicht in der Lage, die Besonderheiten in der Energieverteilung der α-Teilchen (Feinstruktur der α-Spektren) für Kerne mit ungerader Massenzahl zu erklären. Eine andere Formel, die nicht wie (5.2.10) einen, sondern zwei (α_1, α_2) empirische Parameter enthält, wurde von TER-MARTIROSJAN [5,17] vorgeschlagen:

$$P = C \sum_{l=J-J_0}^{J+J_0} |(J_0\, l\, J_0\, 0 |\, J\, J_0)|^2 (2l + 1) \exp\{-\alpha_1\, J(J+1) - \alpha_2\, l\,(l+1)\}. \tag{5.2.11}$$

In der Übersichtsarbeit von GOLDIN, PEKER und NOWIKOWA [5,17] wird dazu bemerkt, daß für einige Kerne die Formel (5.2.11) befriedigende Übereinstimmung mit dem Experiment liefert. Für andere Kerne jedoch ist keine Übereinstimmung bei beliebiger Wahl der Parameter α_1 und α_2 herzustellen.

Die Theorie des α-Zerfalls ist also gegenwärtig noch nicht in der Lage, viele im Experiment beobachtete Gesetzmäßigkeiten zu erklären. So gelang es z. B. noch nicht, eine befriedigende Theorie zu entwickeln, die die relativen Intensitäten der α-Teilchen beim Übergang auf angeregte Niveaus der Tochterkerne erklären könnte. Das bezieht sich besonders auf Übergänge in das zweite Niveau von gg-Kernen und auf Übergänge in alle Niveaus von Kernen mit ungerader Massenzahl.

5.3. Spontane Spaltung schwerer Kerne

Die Theorie der spontanen Spaltung schwerer Atomkerne wurde von N. BOHR und WHEELER [5,1] und von FRENKEL [5,25; 5,26; 5,27] ausgearbeitet. Die FRENKELsche Theorie der spontanen Spaltung [5,27] baut sich in Analogie zur Theorie des α-Zerfalls auf. Man darf natürlich nicht annehmen, daß der Kern bis zur Spaltung aus jenen 2 Teilen besteht, in die er beim Prozeß der Spaltung zerfällt. Diese formieren sich vielmehr während

des Spaltprozesses genauso, wie sich beim α-Zerfall α-Teilchen und Tochterkern formieren. Der Unterschied zwischen beiden Prozessen besteht lediglich darin, daß im Falle der Spaltung die Tochterkerne ungefähr gleiche Größe besitzen, während im Falle des α-Zerfalls einer der Tochterkerne wesentlich größer ist als der andere.

Die Durchdringungswahrscheinlichkeit durch den COULOMB-Wall kann in Analogie zu (5.2.5) bei einer Energie der COULOMB-Wechselwirkung von $\frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}$ in der Form

$$P \approx \exp\left\{-\frac{2e^2 Z_1 Z_2}{\hbar v}(\pi - 2\varphi_0 - \sin 2\varphi_0)\right\} \approx \exp\left(-\frac{2\pi e^2 Z_1 Z_2}{\hbar v}\right) \qquad (5.3.1)$$

geschrieben werden. Dabei bedeutet v die Geschwindigkeit, mit der beide Spaltprodukte auseinanderfliegen. Sie ist mit der Energie der Relativbewegung ε durch die Beziehung

$$\varepsilon = \frac{M_1 M_2}{2(M_1 + M_2)} v^2$$

verknüpft. Andererseits fällt die Energie ε, die in Form von kinetischer Energie der Spaltprodukte bei der Kernspaltung frei wird, angenähert mit der potentiellen Energie der elektrostatischen Abstoßung $\frac{Z_1 Z_2 e^2}{d}$ zusammen. Diese besitzen die Spaltprodukte im Moment der Trennung. Bestimmt man hieraus v, so finden wir nach FRENKEL folgenden Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit der spontanen Spaltung:

$$P \approx \exp\left(-\frac{2\pi}{\hbar} e \sqrt{\frac{M_1 M_2 d}{2(M_1 + M_2)} Z_1 Z_2}\right). \qquad (5.3.2)$$

Aus dem gefundenen Ausdruck folgt, daß die Wahrscheinlichkeit der Spaltung mit Vergrößerung der Asymmetrie von Masse und Ladung größer wird. Der Ausdruck (5.3.2) berücksichtigt jedoch keine Prozesse, die im Kern vor der Spaltung vor sich gehen. Daher kann (5.3.2) auch nur für grobe Abschätzungen verwendet werden.

In den Arbeiten von N. BOHR und WHEELER und in einer Reihe von darauffolgenden Arbeiten wurde die Theorie der Kernspaltung auf der Grundlage des Tröpfchenmodells behandelt. Beim Tröpfchenmodell wird die Stabilität des Kerns durch das Verhältnis der Oberflächenenergie des Kerns zur COULOMB-Energie bestimmt. Wie im Abschn. 4.4. gezeigt wurde, wird die Stabilität des Kerns in diesem Modell durch Erfüllung der Ungleichung $Z^2/A < 49$ gegeben. Aus diesem Grunde sucht man in vielen theoretischen und experimentellen Arbeiten bei Verallgemeinerung empirischer Gesetzmäßigkeiten der Spaltung den Zusammenhang dieser Gesetzmäßigkeiten mit dem Parameter Z^2/A. So wurde in den Arbeiten von SEABORG [5,28] sowie WHITEHOUSE und GOLBRAITH [5,29] darauf hingewiesen, daß sich die Halbwertzeit für die spontane Spaltung von gg-Kernen exponentiell mit wachsendem Z^2/A verkleinert. Eine solche Abhängigkeit folgt aus der Annahme [5,30], daß die Schwellenenergie für die Spaltung E_f eine Funktion des Parameters

Z^2/A ist, wenn außerdem die von N. BOHR und WHEELER [5,1] für die Durchdringungswahrscheinlichkeit durch den Potentialwall gewonnene Beziehung

$$P \approx \exp\left\{-\frac{2\pi}{\hbar}\,\alpha\sqrt{2ME_f}\right\}$$

zugrunde gelegt wird. Hierbei bedeutet M die reduzierte Masse der Spaltprodukte und α eine Größe in der Größenordnung des Kernradius.

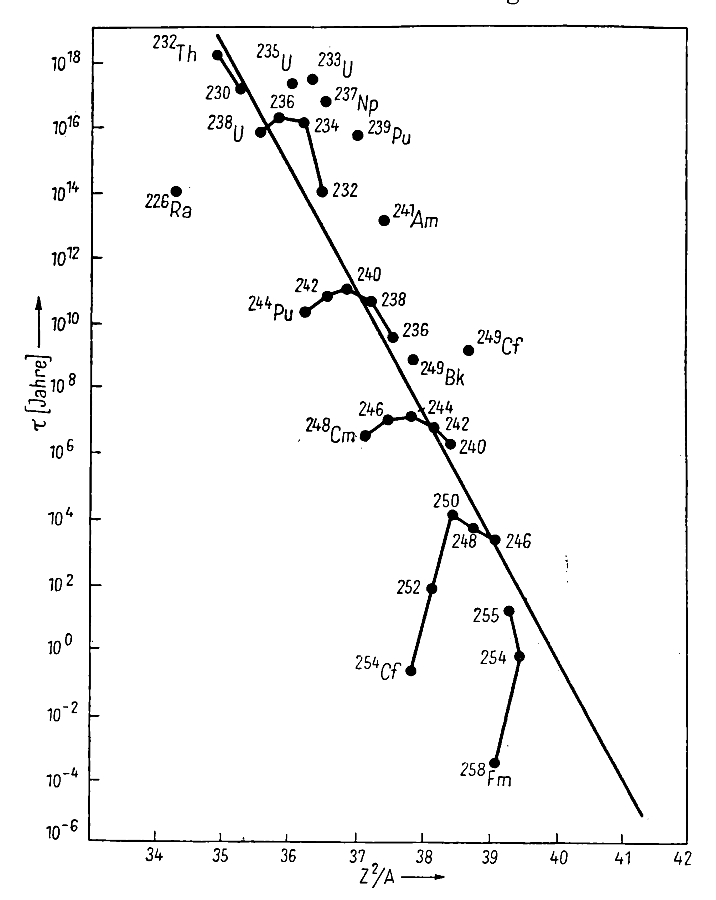


Abb. 29. Logarithmus der Halbwertzeit bezüglich des spontanen Zerfalls in Abhängigkeit von Z^2/A für verschiedene Elemente

In der Abb. 29 ist die aus der Arbeit von SEABORG [5,28] und aus [5,31] entnommene Abhängigkeit des Logarithmus der Halbwertzeit für die spontane Spaltung von Z^2/A dargestellt. Wie man daraus ersieht, liegen die experimentellen Werte auf Kurven mit einem Maximum. Die Halbwert-

zeit wird also nicht nur durch den Parameter Z^2/A, sondern auch durch das Verhältnis der Neutronenzahl zur Protonenzahl im Kern bestimmt. Das Stabilitätsmaximum für Isotope ein und desselben Elements fällt, wie Kolesnikow und Larin [5,32] sowie Huizenga [5,33] bemerkten, mit dem Stabilitätsmaximum bezüglich des β-Zerfalls zusammen.

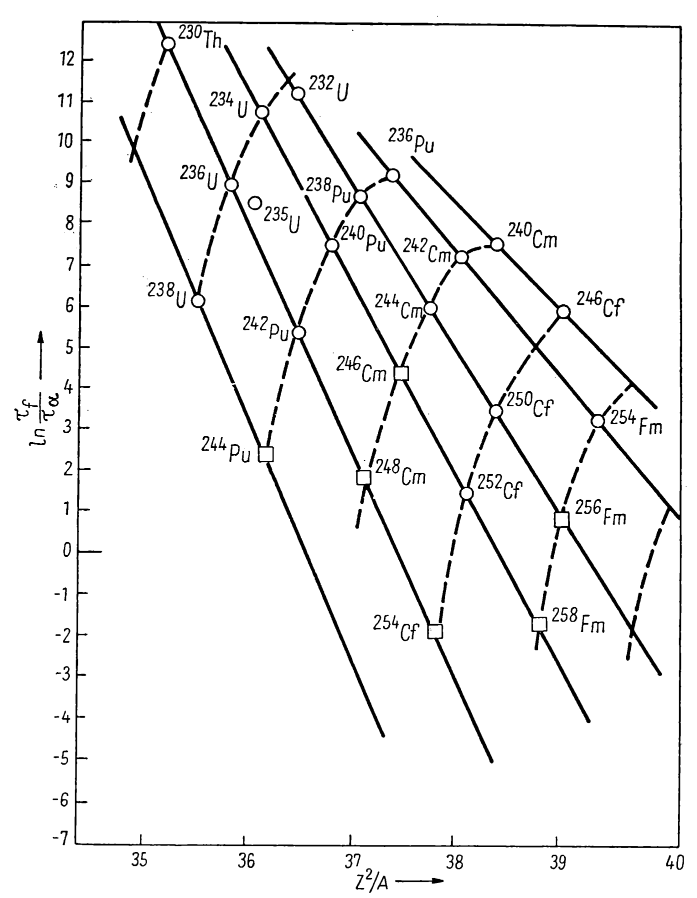


Abb. 30. Logarithmus des Verhältnisses der Halbwertzeit bezüglich der spontanen Spaltung τ_f zur Halbwertzeit bezüglich α-Zerfall τ_α in Abhängigkeit von Z^2/A

Die experimentellen Werte sind durch Kreise bezeichnet, die theoretischen durch Quadrate

Da die durch Spaltung zerfallenen Kerne gleichzeitig auch α-aktiv sind, wurden in den Arbeiten von Mechedow und Pewsner [5,34] die Beziehungen untersucht, die die Wahrscheinlichkeiten für spontane Spaltung und α-Zerfall miteinander verknüpfen. In diesen Arbeiten wurde gezeigt, daß einem bestimmten Wahrscheinlichkeitsbereich der spontanen Spaltung ein bestimmter

Bereich für die Wahrscheinlichkeit des α-Zerfalls zugeordnet ist. In der Abb. 30 (s. [5,35]) ist der Logarithmus des Verhältnisses von Halbwertzeit für spontane Spaltung τ_f zur Halbwertzeit τ_α für verschiedene Werte Z^2/A dargestellt. Die in der Abb. 30 angeführten Werte zeigen, daß spontane Spaltung und α-Zerfall als einander ergänzende und miteinander konkurrierende Zerfallsprozesse schwerer Kerne zu betrachten sind.

Alle oben angeführten empirischen Gesetzmäßigkeiten bezüglich der spontanen Spaltung wurden bisher theoretisch noch nicht erklärt. Zweifellos genügt es nicht, zur Erklärung der Besonderheiten bei der spontanen Spaltung schwerer Kerne nur den einen Parameter Z^2/A zu verwenden. Es wird notwendig sein, die nichtsphärische Form und den Einfluß der Schalenstruktur des Kerns zu berücksichtigen.

5.4. Theorie der Kernspaltung bei kleinen Anregungsenergien

Wie bereits im Abschn. 5.1. erwähnt, ist dem Kern eine zusätzliche Energie, die die Schwellenenergie der Spaltung übersteigt, zuzuführen, wenn die Spaltung mit merklicher Wahrscheinlichkeit vor sich gehen soll. Man muß jedoch berücksichtigen, daß die durch Energiezufuhr hervorgerufene Spaltung stetig in die Spaltung übergeht, die durch Energien kleiner als die Höhe des Potentialwalls hervorgerufen wird. Aus diesem Grunde ist eine strenge Trennung beider Prozesse nicht möglich.

Als Aufgabe einer Theorie der Spaltung ist die Berechnung der Spaltungsschwelle für verschiedene schwere Kerne, die Berechnung der Spaltungswahrscheinlichkeit, der Massen-, Ladungs- und Energieverteilung der Spaltprodukte, der Winkelverteilung der Spaltprodukte bezüglich der ursprünglichen Inzidenzteilchenrichtung bzw. γ-Quantenrichtung usw. anzusehen.

Selbstverständlich läßt sich der Spaltungsprozeß eines Kerns in 2 Teile ungefähr gleicher Masse nicht aus der Bewegung eines oder einiger Nukleonen im Kern erklären. Der Kernspaltung entspricht vielmehr die Kollektivbewegung einer großen Anzahl von Nukleonen im Kern. Aus diesem Grunde muß auch die Theorie der Kernspaltung auf der Grundlage von Untersuchungen der Kollektivbewegung im Kern entwickelt werden. Das einfachste (wenn auch unvollständigste) Kernmodell, das Kollektivbewegungen der Nukleonen berücksichtigt, ist das Tröpfchenmodell (s. Abschn. 4.4.). Nach dem Kollektivmodell verhält sich die Kernmaterie ähnlich wie ein Tröpfchen einer inkompressiblen Flüssigkeit mit konstanter Dichte und konstanter Ladungsdichte. Infolge der kleinen Kompressibilität der Kernmaterie entspricht der Kollektivbewegung des Kerns eine Formveränderung seiner Oberfläche.

Wenn $(Z^2/A) < (Z^2/A)_{\mathrm{kr}} \approx 49$ ist, überwiegt die stabilisierende Wirkung der Oberflächenspannung die Wirkung der elektrostatischen Abstoßungskräfte. In diesem Fall ist der Kern bezüglich kleiner Deformationen stabil. Für die weiteren Untersuchungen führen wir folgenden Parameter ein:

$$x = \frac{Z^2/A}{(Z^2/A)_{\mathrm{kr}}}.$$

Nimmt man an, daß die Schwingungen um die Gleichgewichtskugelform (Radius R_0) ohne Störung der axialen Symmetrie verlaufen, so läßt sich die Oberfläche des Kerns zu jedem Zeitpunkt durch die Gleichung

$$R(\vartheta) = R_0 \{1 + \sum_{n \geqq 2} \alpha_n P_n(\cos\vartheta)\} \tag{5.4.1}$$

darstellen. In der Abb. 31 ist die Oberflächenform eines Kerns für Fälle, in denen in (5.4.1) nur einer der Koeffizienten α_n von Null verschieden ist, dargestellt.

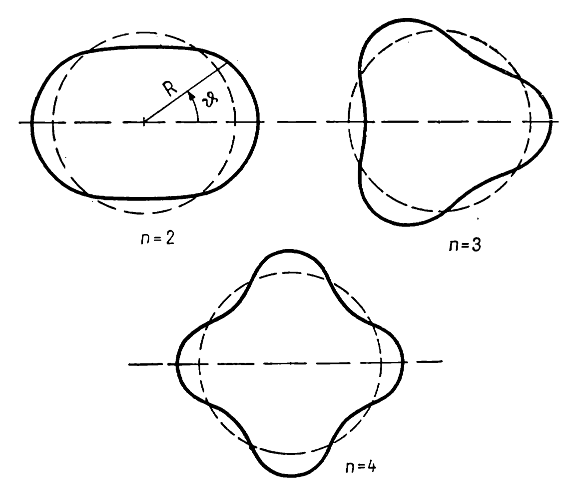


Abb. 31. Formen der Kernoberfläche, die bei Schwingungen der Oberfläche auftreten, welche durch verschiedene LEGENDREsche Polynome beschrieben werden

Wie schon bemerkt wurde, bleibt bei $x < 1$ und kleinen Abweichungen von der Gleichgewichtsform ($\alpha_n \approx 0$) der Kern stabil, d. h., bei wachsenden $\alpha_2, \alpha_3, \ldots$ wächst die potentielle Energie der Deformation. Bei genügend großer Deformation des Kerns geht dieser jedoch in nichtstabile Gleichgewichtszustände über. Diese kritische Deformation ist um so größer, je kleiner x ist.

Als *Spaltungsschwelle* für einen gegebenen Deformationstyp im Tröpfchenmodell wird derjenige Maximalwert der potentiellen Energie bezeichnet, der bei Vergrößerung der Deformation α_2 (bei vorgegebenen Werten der anderen Parameter $\alpha_3, \alpha_4, \ldots$) erreicht wird, wenn man die potentielle Energie der Gleichgewichtsform gleich Null setzt. Der Minimalwert der Spaltungsschwelle, der durch Variation der Parameter α_n, $n > 2$, erreicht wird, wird als *klassische Spaltungsschwelle* oder als *Energie im Sattelpunkt*, manchmal auch einfach als Spaltungsschwelle bezeichnet.

In der ursprünglichen Arbeit von N. BOHR und WHEELER wurden nur symmetrische Deformationen α_2 und α_4 betrachtet. Bei $x \approx 1$, wenn die

kritische Deformation klein ist, wurde für die Schwellenenergie der Spaltung folgender Ausdruck abgeleitet:

$$E_f^{\text{symm}} = E_s \left\{ \frac{98}{135} (1-x)^3 - \frac{11368}{34425} (1-x)^4 + \cdots \right\}, \qquad x \approx 1.$$

In den Arbeiten [5,36] berücksichtigte man auch Glieder, die nichtsymmetrischen Deformationen α_3, α_5 entsprechen. Es wurde gezeigt, daß der minimalen Schwellenenergie die symmetrische Spaltung entspricht. In diesen Arbeiten wurden ebenso wie in [5,1] nur kleine Deformationen (bei $x > 0{,}8$) untersucht. Im weiteren führten dann FRANKEL und METROPOLIS [5,37] Berechnungen auch für große Deformationen durch. Diese Berechnungen bekräftigten die Schlußfolgerungen früherer Arbeiten in bezug auf die größere Wahrscheinlichkeit für symmetrische Spaltung. Diese grundlegende Schlußfolgerung aus dem Tröpfchenmodell des Kerns stimmt mit dem Experiment nicht überein.

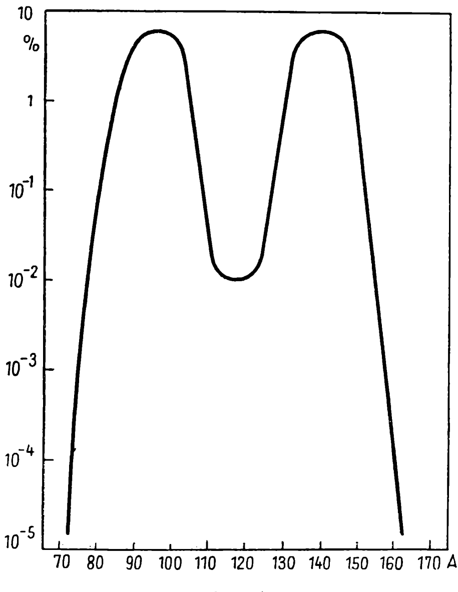


Abb. 32. Kurve für die prozentuale Spaltausbeute des ^{235}U

Die Erfahrung lehrt, daß die Spaltung schwerer Kerne vorwiegend über Spaltprodukte ungleicher Masse verläuft. Ist die Anregungsenergie im Vergleich zur Schwellenenergie nicht sehr groß, so beobachtet man eine Massenasymmetrie sowohl für erzwungene Spaltung, unabhängig davon, was für ein Teilchen zur Anregung benutzt wurde (Photon, Neutron, Proton, α-Teilchen), als auch für spontane Spaltung. In der Abb. 32 ist die Ausbeutekurve für Spaltprodukte mit verschiedener Massenzahl dargestellt. Auf der Ordinatenachse ist das Verhältnis der Anzahl der ^{235}U-Spaltungen, die Spaltprodukte mit der gegebenen Massenzahl liefern, zur Gesamtzahl der Spaltungen abgetragen. Die Spaltausbeute ändert sich relativ schwach für Massenänderungen um 15 ··· 20 Einheiten im Gebiet der Maxima. Bei weiterer Veränderung der Massen verkleinert sich die Ausbeute stark. So entspricht z. B. eine Änderung der Masse des leichten Spaltprodukts von 90 auf 75 einer Verkleinerung der Ausbeute um etwa den Faktor 104. Bei der Spaltung erhält man also Produkte verschiedener Masse, die Werte dieser Massen sind jedoch in scharf begrenzte Gebiete eingeschlossen. Im Mittel beträgt das Verhältnis zwischen der Masse des leichten Spaltprodukts zur Masse des schweren Spaltprodukts $^2/_3$. Für die Spaltung verschiedener Kerne

ist auch die Asymmetrie in der Massenverteilung verschieden. Mit wachsender Massenzahl rücken beide Maxima etwas näher zusammen [5,38]. FRANK [5,39] bemerkte, daß diese Annäherung der Maxima im wesentlichen auf Grund einer Verschiebung des Maximums für das leichte Spaltprodukt erfolgt. Die wahrscheinlichste Masse des schweren Spaltprodukts hängt fast nicht von der Masse des spaltenden Kerns ab und liegt in der Nähe von 139.

In Abb. 33 ist die Abhängigkeit für das Quadrat der relativen Asymmetrie bei der Spaltung $\left(\frac{M_2 - M_1}{A}\right)^2$ in Abhängigkeit vom Parameter Z^2/A dargestellt.

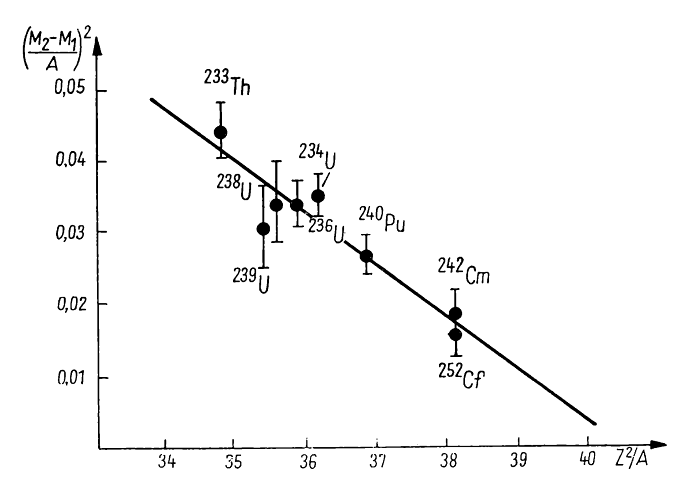


Abb. 33. Quadrat der relativen Spaltungsasymmetrie in Abhängigkeit von Z^2/A
M_1 und M_2 sind die Massenzahlen, die den Maxima der Ausbeute entsprechen

Aus dieser Abbildung folgt, daß bei Annäherung von Z^2/A an einen Wert von ungefähr 42 die Massenasymmetrie der Spaltprodukte verschwindet. Ausgehend von einer Analyse der experimentellen Angaben wird von SWIATECKI [5,40] folgende Formel für den Massenunterschied der Spaltprodukte vorgeschlagen:

$$M_1 - M_2 = 0{,}09\left[(40{,}2 \pm 0{,}7) - \frac{Z^2}{A}\right]A.$$

Dabei bedeuten A die Massenzahl des Kerns, $M_1 + M_2 = A - \nu$ und $\nu = 2{,}8$ die mittlere Zahl der Neutronen, die bei der Spaltung freigesetzt werden.

In den Arbeiten von Nossow [5,41], BUSINARO und GALLONE [5,42] sowie in der Arbeit von SWIATECKI [5,43] wurden die Möglichkeiten für eine Erklärung der asymmetrischen Spaltung im Rahmen des Tröpfchenmodells untersucht. Es zeigte sich, daß bei genügend großen Deformationen, die die Deformationen zur Erreichung des Sattelpunkts der symmetrischen Spaltung übersteigen, die Möglichkeit einer asymmetrischen Spaltung auftritt. So stellte

z. B. Nossow fest, daß bei $x = 0{,}81$ der Kern in bezug auf asymmetrische Deformationen instabil wird, wenn die symmetrische Deformation der Bedingung $c/a \gtreqq \sqrt{0{,}87}$ mit a als großer Halbachse des Ellipsoids und c als linearer Exzentrizität genügt.

Obwohl die angeführten Arbeiten auf der Grundlage des Tröpfchenmodells die Möglichkeit einer asymmetrischen Spaltung zeigen, sind sie doch nicht in der Lage, eine wenigstens qualitative Erklärung für die grundlegenden Gesetzmäßigkeiten der asymmetrischen Spaltung zu liefern. Die oben angeführte Konstanz der Masse des schweren und Zunahme der Masse des leichten Spaltprodukts bei Vergrößerung der Massenzahl des spaltenden Kerns deutet darauf hin, daß die asymmetrische Spaltung mit der Schalenstruktur des Kerns eng verknüpft ist. Diese Schlußfolgerung wird auch durch die Verkleinerung der Asymmetrie bei Vergrößerung der Anregungsenergie (s. Abschn. 5.6.) bestärkt, da dann Schalenstruktureffekte unbedeutender werden.

Der Einfluß der Schalenstruktur auf die Asymmetrie der Spaltung wurde schon in der Arbeit von Mayer [5,44] angeführt. Von den späteren Arbeiten, in denen diese Frage untersucht wurde, sind besonders die Arbeiten von Hill [5,45] sowie Curie, Fong und Mitarb. [5,46] anzuführen. In den meisten Arbeiten, die die Schalenstruktur des Kerns berücksichtigen, wurde jedoch die große Deformation der spaltenden Kerne nicht berücksichtigt. Möglicherweise begünstigt die nichtsphärische Form eine asymmetrische Spaltung.

Wladimirski [5,47] zeigte auf der Grundlage einer qualitativen Untersuchung der Einzelteilchenzustände im axialsymmetrischen Kern, daß ein Überfluß an Nukleonen mit großen Projektionen des Drehimpulses auf die Symmetrieachse des Kerns zum Verlust der Stabilität bezüglich symmetrischer Deformationen im Umkehrpunkt führen kann.

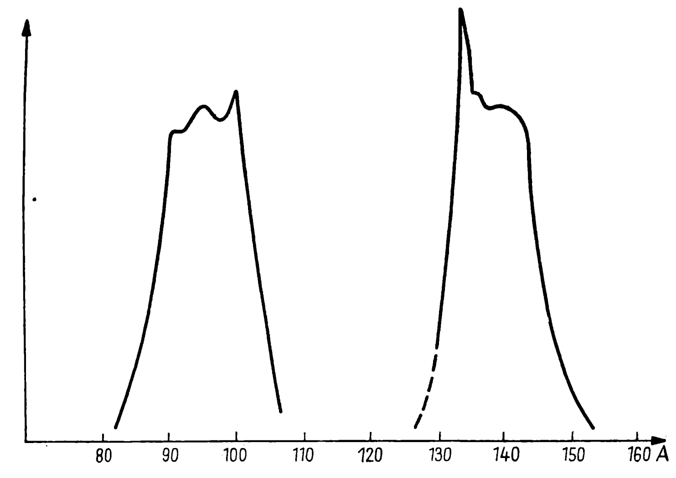


Abb. 34. Feinstruktur der Spaltausbeute

Massenspektroskopische Ausbeutebestimmungen für stabile Isotope zeigten das Vorhandensein einer Feinstruktur der Ausbeutekurve für die Spaltprodukte (Abb. 34). Offensichtlich ist die Feinstruktur der Ausbeutekurve unmittelbar mit der Schalenstruktur des Kerns verknüpft (große Bindungsenergie in Kernen mit Neutronenzahlen in der Nähe abgeschlossener Schalen: 50, 82, 126).

Betrachten wir nun Abschätzungen für die Spaltwahrscheinlichkeit. Wie schon bemerkt wurde, kann die Spaltung schwerer Kerne nur dann mit merklicher Wahrscheinlichkeit vor sich gehen, wenn die Anregungsenergie des Kerns die Schwellenenergie der Spaltung E_f überwiegt. In der Abb. 35

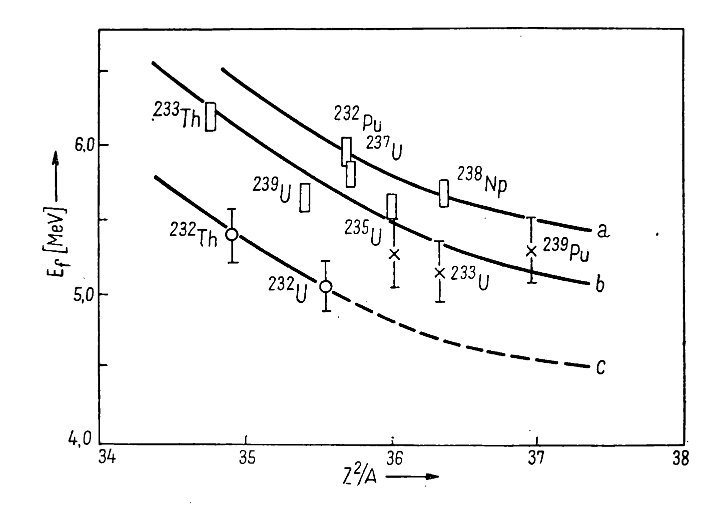


Abb. 35. Schwellenenergie der Spaltung in Abhängigkeit von Z^2/A
a uu-Kerne; *b* ungerade *A*; *c* gg-Kerne

ist die Abhängigkeit zwischen der Schwellenenergie und dem Parameter Z^2/A (vgl. [5,48]) dargestellt. Die Kreise und Kreuze beziehen sich auf Werte, die bei Untersuchungen der Photospaltung gewonnen wurden. Die Rechtecke deuten die Schwellenenergie für Spaltung durch Neutronen an. In diesem Fall ist die Schwellenenergie gleich der Summe aus der Neutronenenergie und der Bindungsenergie des Neutrons im Targetkern.

Da die Spaltung mit Anregungsenergien über dem Potentialwall und die Spaltung mit Anregungsenergien unter dem Potentialwall stetig ineinander übergehen, wird die experimentelle Messung der Energie der Spaltungsschwelle sehr kompliziert. Die Größe der zu bestimmenden Schwellenenergie hängt von der Empfindlichkeit der verwendeten Apparatur ab.

Der Spaltquerschnitt wächst, beginnend bei einer bestimmten Anregungsenergie, sehr stark und verläuft dann praktisch konstant (erstes Plateau). Bei weiterer Vergrößerung der Energie wächst der Wirkungsquerschnitt

erneut, übersteigt aber den Wirkungsquerschnitt im Gebiet des ersten Plateaus nicht mehr als zwei- bis dreimal. Um die Abhängigkeit der experimentell bestimmten Schwellenenergie von der Empfindlichkeit der Apparatur auszuschließen, wurde in der Arbeit [5,49] vorgeschlagen, die Schwellenenergie als diejenige Energie zu bestimmen, bei der der Spaltquerschnitt gleich der Hälfte seines Wertes im Gebiet des ersten Plateaus wird.

Sogar in Fällen, für die die Anregungsenergie des Kerns die Schwellenenergie der Spaltung E_f überwiegt, verläuft die Spaltung des Kerns nicht als einziger Prozeß. Die wesentlichsten Prozesse, die gleichzeitig mit der Spaltung verlaufen, sind die Emission von γ-Quanten und Neutronen. Die Emission eines Neutrons ist dann möglich, wenn die Anregungsenergie die Bindungsenergie des Neutrons überwiegt. Da die Anregungsenergie für die Spaltung relativ groß ist, kann man annehmen, daß die relative Wahrscheinlichkeit der oben angeführten konkurrierenden Prozesse durch das Verhältnis der partiellen Breiten dieser Prozesse (Γ_f, Γ_γ, Γ_n, ...) zur Gesamtbreite $\Gamma = \sum_i \Gamma_i$ bestimmt wird.

Ist die Anregungsenergie E kleiner als die Schwellenenergie der Spaltung (E_f), so wird der energetische Verlauf der Spaltungsbreite im wesentlichen durch die Durchdringungswahrscheinlichkeit für den Potentialwall bestimmt. Man kann also schreiben

$$\Gamma_f \approx \exp\left(-\frac{E_f - E}{\alpha}\right),$$

wobei $\alpha \approx 100\,\mathrm{keV}$ bedeutet. Bis zur Energie $E = E_f$ verhält sich die Spaltungsbreite wie eine exponentiell wachsende Funktion der Energie. In Energiegebieten, die die Schwellenenergie noch nicht sehr stark überschreiten, wird die Energieabhängigkeit der Spaltungsbreite durch die Besonderheiten der Energiezustände im Compoundkern bestimmt. Schließlich läßt sich im Gebiet hoher Anregungsenergien die statistische Theorie für eine Abschätzung der Spaltungsbreite verwenden.

Die Messung der Wirkungsquerschnitte für die Spaltung der Kerne ^{233}U, ^{235}U, ^{239}Pu und ^{241}Pu als Funktionen der Neutronenenergie weist auf dicht benachbarte Resonanzen für Neutronenenergien kleiner als einige 100 eV hin. Ein charakteristisches Beispiel einer solchen Abhängigkeit ist in der Abb. 36 dargestellt, in der der Wirkungsquerschnitt für die Spaltung des ^{235}U durch langsame Neutronen angeführt ist. Es erwies sich, daß innerhalb der Meßfehlergrenzen alle Resonanzen im totalen Wirkungsquerschnitt auch im Spaltquerschnitt vorhanden sind.

Der Spaltquerschnitt bei einem einzelnen Resonanzzustand wird durch die BREIT-WIGNER-Formel gegeben (s. Abschn. 8.6.):

$$\sigma_f(E) = \frac{2\pi\, \lambda\, \lambda_0}{1 + \dfrac{4(E - E_0)^2}{\Gamma^2}} \, \frac{2g\,\Gamma_n\,\Gamma_f}{\Gamma^2}.$$

Dabei bedeuten E und $2\pi\,\lambda$ Energie bzw. zugeordnete Wellenlänge des Neutrons, E_0 und $2\pi\,\lambda_0$ Energie und Wellenlänge der entsprechenden Reso-

nanz, Γ_f und Γ_n die Spaltungs- bzw. Neutronenbreite, $\Gamma = \Gamma_f + \Gamma_n + \Gamma_\gamma$ die Gesamtbreite und g einen statistischen Faktor.

Aus Messungen an nichtspaltbaren Kernen ist bekannt, daß sich Γ_γ von Kern zu Kern (mit Ausnahme magischer Kerne) schwach ändert und ungefähr gleich 0,03 · · · 0,04 eV ist. Die kleine Änderung von Γ_γ ist auf die große Anzahl von Möglichkeiten für die Emission von γ-Strahlung im Resultat

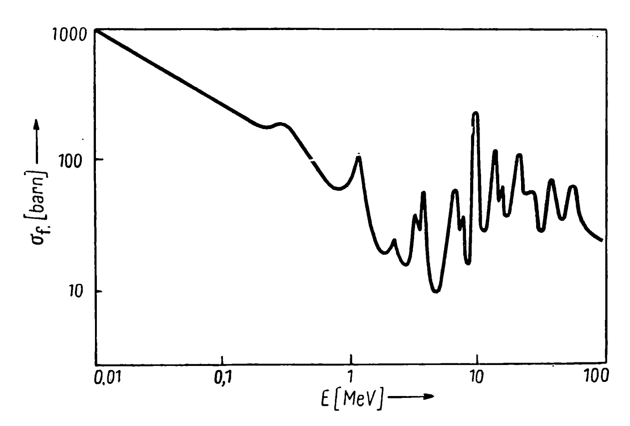


Abb. 36. Spaltquerschnitt von ^{235}U als Funktion der Neutronenenergie

von Übergängen auf eine Vielzahl von niedriger gelegenen Niveaus zurückzuführen. Die Neutronenbreite ändert sich von Niveau zu Niveau im gegebenen Kern sehr stark. Bei kleinen Energien der einfallenden Neutronen ist nur elastische Streuung möglich, es gilt $\Gamma_n \ll \Gamma_\gamma$; daher ist der totale Wechselwirkungsquerschnitt im wesentlichen eine Summe aus den Wirkungsquerschnitten für die Spaltung σ_f und für die γ-Strahlung σ_γ. Dabei gilt

$$\frac{\sigma_f}{\sigma_f + \sigma_\gamma} \approx \frac{\Gamma_f}{\Gamma}.$$

In der Tab. 20 sind Werte von Γ_f, Γ_n und Γ_f/Γ, gemittelt über einige Resonanzen, für 3 Kerne angeführt.

Tabelle 20

Spaltungsbreite (Γ_f), Strahlungsbreite (Γ_γ) und Neutronenbreite (Γ_n) einiger Kerne

Target	Γ_f [eV]	Γ_γ [eV]	Γ_n [10^{-3} eV]	Mittelwert Γ_f/Γ	Bindungsenergie des Neutrons	Spin
^{235}U	0,077	0,03	0,09	0,72	6,40	$^7/_2$
^{239}Pu	0,079	0,04	0,5	0,66	6,38	$^1/_2$
^{233}U	0,23	0,04	—	0,81	6,69	$^5/_2$

Aus der Tab. 20 ist ersichtlich, daß sich die Spaltungsbreiten von Kern zu Kern stark ändern. Offensichtlich hängen die Spaltungsbreiten vom Spin

des Kerns schwach ab, sind aber von der Bindungsenergie des Neutrons abhängig. Kerne, die unter dem Einfluß von thermischen Neutronen spalten, enthalten meist eine ungerade Zahl von Neutronen und sind daher durch eine große Bindungsenergie charakterisiert.

Der Wirkungsquerschnitt für die Spaltung von Kernen durch Neutronen mit Energien im MeV-Gebiet ändert sich stetig mit der Energie. Dabei entspricht die Neutronenenergie einer Anregungsenergie des Compoundkerns im Gebiet der dicht benachbarten, sich gegenseitig überdeckenden Niveaus. In diesem Fall ist das detaillierte Verhalten der individuellen Zustände im Compoundkern nicht mehr wesentlich. Man kann daher für die Untersuchung der Energieabhängigkeit der Spaltungsbreite statistische Methoden verwenden.

Die Spaltwahrscheinlichkeit ist proportional der Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Kern sich in einem Zustand befindet, in dem die Spaltung möglich ist. In einem solchen Zustand konzentriert sich eine Energie größer als E_f auf den Spaltungsfreiheitsgrad. Bezeichnet man mit $N(\varepsilon)$ die Anzahl der Niveaus im Compoundkern mit Anregungsenergien kleiner als ε, so wird die Wahrscheinlichkeit für die Konzentration einer Energie größer als E_f auf den Spaltungsfreiheitsgrad bei einer Anregungsenergie E des Kerns

$$W_f = \frac{N(E - E_f)}{N(E)}.$$

Damit kann man für die Spaltwahrscheinlichkeit schreiben

$$\frac{\Gamma_f}{\hbar} = \frac{\omega}{2\pi} W_f = \frac{\hbar\,\omega}{2\pi\,\hbar} \frac{N(E - E_f)}{N(E)}.$$

Dabei bedeutet ω die Kreisfrequenz der Schwingungen, die dem Spaltungsfreiheitsgrad zugeordnet sind. Wir erhalten für die Spaltungsbreite also die von Nossow [5,50] vorgeschlagene Formel

$$\Gamma_f \approx \frac{\hbar\,\omega}{2\pi} \frac{N(E - E_f)}{N(E)}. \tag{5.4.2}$$

Übersteigt die Anregungsenergie die Schwellenenergie der Spaltung sehr stark, so läßt sich schreiben, wenn man berücksichtigt, daß die Anzahl der Zustände $N(E)$ des Compoundkerns mit der Entropie $S(E)$ durch die einfache Beziehung

$$N(E) = \exp S(E) \tag{5.4.3}$$

verknüpft ist:

$$\frac{N(E - E_f)}{N(E)} = \exp\left\{-\frac{\partial S}{\partial E} E_f\right\}, \qquad E \gg E_f.$$

Da $\partial S/\partial E = 1/\Theta$ gilt, wobei Θ die Temperatur in Energieeinheiten ist, läßt sich die Gl. (5.4.2) in der folgenden Form schreiben:

$$\Gamma_f = \frac{\hbar\,\omega}{2\pi} \exp\left(-\frac{E_f}{\Theta}\right), \qquad E \gg E_f. \tag{5.4.4}$$

Übersteigt jedoch die Anregungsenergie die Schwellenenergie nicht sehr stark, so bleibt der Nenner in (5.4.2) wie vorher eine monoton wachsende

Funktion der Energie, während der Zähler zu einer Treppenfunktion der Energie wird. In unmittelbarer Nähe der Schwelle gilt $N(E - E_f) \approx 1$ und

$$\Gamma_f = \frac{\hbar\,\omega}{2\pi} \exp\{-S(E)\}, \qquad E \approx E_f.$$

Bei weiterer Vergrößerung der Energie, wenn in das Energieintervall $E - E_f$ das zweite Niveau mit den gegebenen Eigenschaften fällt, ändert sich die Größe $N(E - E_f)$ durch einen Sprung auf 2 usw. Man kann also eine nichtmonotone Abhängigkeit der Spaltungsbreite von der Energie in Energiegebieten, die die Schwellenenergie der Spaltung nicht wesentlich übersteigen, erwarten.

5.5. Photospaltung

Die Photospaltung wurde erstmals experimentell bei der Verwendung monochromatischer γ-Quanten beobachtet. Diese monochromatischen γ-Quanten wurden aus den Kernreaktionen $^{19}F(p, \gamma)$ und $Li(p, \gamma)$ erhalten. Bei der ersten beträgt die Energie der γ-Quanten 6,3 MeV, bei der zweiten 17,5 MeV. Die Untersuchungen im Gebiet großer Energien wurden mit Hilfe der Bremsstrahlung in Betatronen und Synchrotronen durchgeführt.

Die Mehrzahl der Resultate, die bisher bei der Untersuchung von Wirkungsquerschnitten der Photospaltung erhalten wurden, bezieht sich auf ein Energiegebiet von der Schwellenenergie bis zu 30 MeV. In der Tab. 21 sind experimentelle Werte für die Schwellenenergie aus der Arbeit von Koch, McElhinney und Gasteiger [5,51] angeführt.

Tabelle 21

Schwellenenergie für die Spaltung einiger Kerne

Kern	^{238}U	^{233}U	^{235}U	^{239}Pu	^{232}Th
E_f [MeV]	$5,08 \pm 0,15$	$5,18 \pm 0,27$	$5,31 \pm 0,25$	$5,31 \pm 0,27$	$5,40 \pm 0,22$

Schon in den ersten Arbeiten über die Photospaltung von Uran und Thorium [5,52] wurde festgestellt, daß sich der Wirkungsquerschnitt der Photospaltung, beginnend bei kleinen Werten der Photonenenergie, im Gebiet um 5 MeV bis zu Energiewerten um 15 MeV vergrößert und danach wieder abnimmt. Diese Änderung des Wirkungsquerschnitts mit der Energie ist der Veränderung des Wirkungsquerschnitts für andere Kernphotoreaktionen ähnlich (vgl. Abschn. 11.9.). Die Kurven für die Wirkungsquerschnitte der Photospaltung besitzen also Resonanzform mit großer Halbwertsbreite, sogenannte *Riesenresonanzen*.

Meist sind bei der Absorption von Photonen mit Energien in der Nähe der großen Resonanz Reaktionen vom Typ (γ, n) am wahrscheinlichsten. Die anderen konkurrierenden Reaktionen (γ, γ'), (γ, p) usw. sind relativ unwahrscheinlich. Beim Übergang zur Kernspaltung wird jedoch die Photospaltung vergleichbar mit dem (γ, n)-Prozeß.

Bezeichnet man mit $\sigma_c(\varepsilon)$ den Absorptionsquerschnitt für Photonen mit der Energie ε, so wird nach Abschn. 11.9. der Absorptionsquerschnitt, integriert über alle Energien,

$$\int \sigma_c(\varepsilon)\, d\varepsilon \approx 0{,}06 \frac{NZ}{A} \quad [10^{-24}\,\text{MeV cm}^2]. \tag{5.5.1}$$

Die experimentellen Werte für den Wirkungsquerschnitt der Photospaltung, integriert über alle Energien, sind wesentlich kleiner als der Wert nach (5.5.1). Zum Beispiel gilt für ^{238}U $\int \sigma_c(\varepsilon)\, d\varepsilon \approx 3{,}5$ MeV · barn; der Wirkungsquerschnitt für die Photospaltung, integriert von der Schwellenenergie bis 23 MeV, beträgt nach den Werten von DUFFIELD und HUIZENGA [5,53] 1,2 MeV · barn; für $\int \sigma_{\gamma,\mathrm{n}}(\varepsilon)\, d\varepsilon$, wobei $\sigma_{\gamma,\mathrm{n}}$ der Wirkungsquerschnitt der Reaktion (γ, n) ist, erhält man einen Wert von $\approx 2{,}6$ MeV · barn.

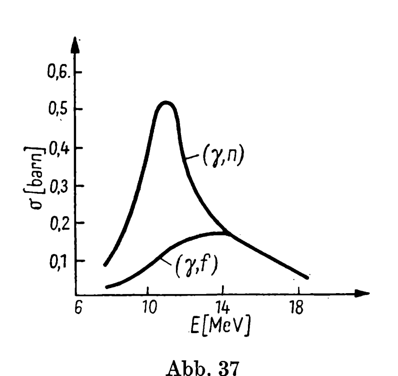


Abb. 37
Wirkungsquerschnitte für die Photokernreaktionen (γ, n) und (γ, f) am ^{238}U-Kern

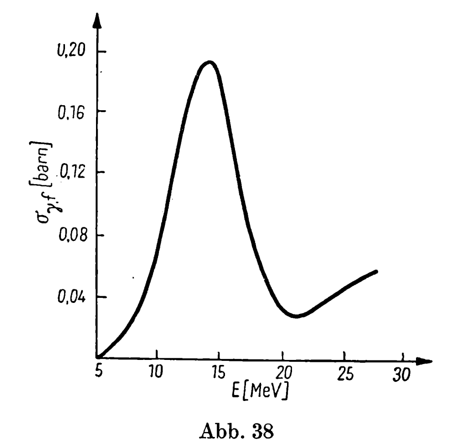


Abb. 38
Wirkungsquerschnitt für die ^{238}U-Photospaltung als Funktion der Photonenenergie

In der Abb. 37 sind Wirkungsquerschnitte für die Reaktionen (γ, n) und (γ, f) aus der Arbeit [5,53] angeführt. Bei Energien von 8 · · · 11 MeV sind nur diese beiden Reaktionen energetisch möglich. Das Verhältnis $\frac{\sigma_{\gamma,f}}{\sigma_{\gamma,f} + \sigma_{\gamma,\mathrm{n}}}$ charakterisiert die Spaltwahrscheinlichkeit bei gegebener Anregung des Kerns. Im Gebiet von 8 · · · 11 MeV ändert sich $\frac{\sigma_{\gamma,f}}{\sigma_{\gamma,f} + \sigma_{\gamma,\mathrm{n}}}$ nur schwach und besitzt im Mittel einen Wert von 0,2.

Eine Kurve für die Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts der Photospaltung für ^{238}U von der Energie der γ-Quanten wurde in der Arbeit von LASAREWA, GAWRILOW u. a. [5,54] angegeben; sie ist in der Abb. 38 dargestellt. Kurven für die Wirkungsquerschnitte der Photospaltung von anderen Kernen gleichen in ihren wesentlichen Zügen der Kurve für ^{238}U und unterscheiden sich nur nach ihrer absoluten Größe. Dies kann man z. B. aus der Abb. 39 ersehen. Diese Abbildung wurde der Übersichtsarbeit von LASAREWA

und Nikitina [5,55] entnommen. Es sind die Wirkungsquerschnitte der Photospaltung von ^{238}U, ^{233}U, ^{235}U und ^{232}Th nach I.W.Tschuwilo dargestellt.

Die Massenverteilung der Spaltprodukte bei der Photospaltung wurde in einer Reihe von Arbeiten untersucht [5,56]. Wie auch im Falle der Spaltung durch Neutronen und geladene Teilchen bei kleinen Anregungsenergien der Kerne ($E \leqq 10$ MeV) ist die Ausbeute der Bruchstücke durch eine Kurve mit 2 Maxima in der Nähe der Massenzahlen 99 und 138 und mit einem tiefen Einschnitt im Gebiet der Massenzahl 117 charakterisiert. Mit wachsender Energie der γ-Strahlung wächst die Wahrscheinlichkeit für symmetrische Spaltung.

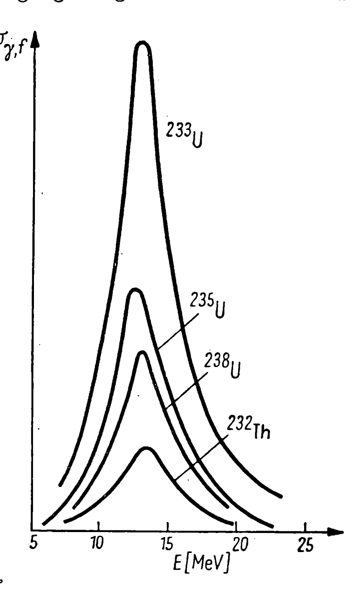


Abb. 39
Wirkungsquerschnitte für die Photospaltung verschiedener Kerne in Relativeinheiten

5.6. Kernspaltung bei großen Anregungsenergien

Der Spaltprozeß hängt wesentlich von der Anregungsenergie des Kerns ab. Der Wirkungsquerschnitt wächst in der Nähe der Schwellenenergie fast exponentiell und nimmt schon bald nach Übersteigen der Schwellenenergie einen konstanten Wert σ_{f0} an. Wird die Spaltung durch Neutronen hervor-

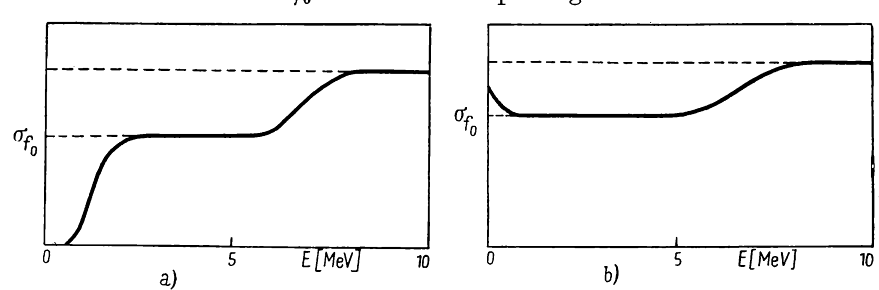


Abb. 40. Verlauf des Spaltquerschnitts in Abhängigkeit von der Neutronenenergie
a) für Kerne mit Spaltschwelle; *b)* für Kerne, die durch thermische Neutronen gespalten werden

gerufen, so läßt sich die Abhängigkeit des Spaltquerschnitts von der Neutronenenergie schematisch wie in Abb. 40 darstellen. Die Abb. 40*a* bezieht sich auf Kerne, die eine Bindungsenergie für Neutronen kleiner als die Schwellenenergie des entstehenden Compoundkerns besitzen (^{231}Pa, ^{234}U, ^{237}Np, ...). Der Fall *b* bezieht sich auf Kerne, die sich unter der Wirkung von thermischen Neutronen spalten (^{233}U, ^{235}U, ^{239}Pu).

In der Tab. 22 sind Werte für die Schwellenenergie der Spaltung und für die Bindungsenergie von Neutronen nach CAMERON [5,49] angeführt. Als Schwellenenergie in der Tab. 22 ist die Energie zu betrachten, bei der der Spaltquerschnitt $^1/_2\,\sigma_{f0}$ (s. Abschn. 5.4.) beträgt. Die Schwellenenergie ist daher um einige 100 keV größer als die Schwellenenergie in anderen Arbeiten. Die durch einen Stern bezeichneten Werte wurden aus Angaben über die Photospaltung erhalten.

Tabelle 22

Schwellenenergie der Spaltung und Bindungsenergie der Neutronen einiger Kerne

Compoundkern	^{233}Th	^{232}Pa	^{235}U	^{237}U	^{239}U	^{238}Np	^{232}Th	^{233}U	^{238}U	^{237}Np	^{239}Pu
E_f [MeV]	6,44	6,18	5,75	6,40	6,15	6,04	5,95*	5,49*	5,80*	5,49*	5,48*
Bindungsenergie der Neutronen [MeV]	5,09	5,65	5,18	5,42	4,70	5,43	6,34	5,94	6,07	6,78	5,53

Der konstante Wert des Spaltquerschnitts σ_{f0} (erstes Plateau) bleibt bis zu Energien von etwa $5 \cdots 6$ MeV erhalten. Danach beginnt er wieder anzusteigen. Das ist mit der energetischen Möglichkeit einer Spaltung nach einer vorhergehenden Neutronenverdampfung aus dem Compoundkern verknüpft. Die Neutronenenergien, die dem Beginn des weiteren Wachsens des Wirkungsquerschnitts nach dem ersten Plateau entsprechen, werden durch die Schwelle der Reaktion (n, n′ f) bestimmt. Das weitere Anwachsen des Wirkungsquerschnitts für Energien über der Schwelle der Reaktion (n, n′ f) muß wegen der großen Streuung der Energien, die von den Neutronen davongetragen werden, wesentlich glatter sein [5,57]. Eine Vergrößerung der Anregungsenergie führt nicht nur zur Änderung des Spaltquerschnitts, sondern macht sich auch in der Massenverteilung der Spaltprodukte bemerkbar. Die Ausbeutekurve mit den 2 Maxima deformiert sich auf Grund einer Erhöhung des Minimums zwischen den beiden Maxima. In der Abb. 41 wird die Form der Ausbeutekurve bei der Spaltung von ^{235}U durch Neutronen der Energie 14 MeV (ausgezogene Kurve) mit der Form für die Ausbeutekurve bei einer Spaltung durch thermische Neutronen (gestrichelte Kurve) verglichen. Genau denselben Charakter trägt auch die Veränderung der Ausbeutekurve für den Fall der Photospaltung bei Vergrößerung der

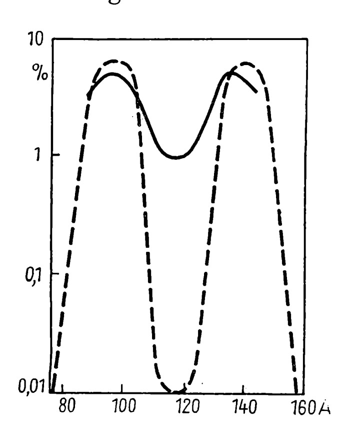


Abb. 41. Spaltausbeute des ^{235}U bei der Spaltung durch 14-MeV-Neutronen (ausgezogene Kurve) und durch thermische Neutronen (gestrichelte Kurve)

γ-Quantenenergie. Bei Änderung der Maximalenergie der Bremsstrahlung von 7 auf 300 MeV fällt das Ausbeuteverhältnis vom Maximum zum Minimum von 300 auf 4.

Mit Hilfe genügend schneller Neutronen, Protonen oder Deuteronen läßt sich, beginnend bei Wismut, eine Spaltung aller schweren Elemente hervorrufen [5,58]. Bei der Spaltung von Urankernen durch α-Teilchen mit einer Energie von 380 MeV [5,59] und von Wismut durch Deuteronen mit einer Energie von 190 MeV [5,60] wird eine Ausbeutekurve mit einem Maximum beobachtet. Radiochemische Analysen der Spaltprodukte führten zu dem Schluß, daß das Maximum dieser Kurve um $3 \cdots 6$ Einheiten in Richtung kleinerer Massenwerte bezüglich der halben Summe aus der Masse des Targetkerns und des einfallenden Teilchens verschoben ist. Diese Massenverkleinerung der Spaltprodukte ist mit der Neutronenemission bei der Spaltung stark angeregter Kerne verknüpft. Die Anwesenheit von neutronendefiziten Spaltprodukten, die ihre Anwesenheit durch Positronenzerfall und K-Einfang verraten, deutet darauf hin, daß die Neutronenemission im wesentlichen vor der Spaltung der stark angeregten Kerne erfolgt.

Die Kernspaltung, die nach einer vorhergehenden Neutronenemission des stark angeregten Kerns stattfindet, wird als *Emissionsspaltung* bezeichnet. Entsprechend der Neutronenemission verkleinert sich die Schwellenenergie der Spaltung, während sich die Bindungsenergie der Neutronen vergrößert. Wird die Anregungsenergie des zurückbleibenden Kerns kleiner als die Bindungsenergie der Neutronen und größer als die Schwellenenergie der Spaltung, so wächst die Wahrscheinlichkeit für Spaltung sehr stark. Die Spaltung konkurriert mit anderen Prozessen (z. B. mit der γ-Quantenemission). Je kleiner der Kern ist, desto größere Anregungsenergie muß er ursprünglich besitzen, damit die Neutronenemission zu einem Zustand führt, in dem die Wahrscheinlichkeit für die Spaltung groß wird. In schweren Kernen konkurriert die Emissionsspaltung mit der Kernspaltung für einen Kern in einem hochangeregten Zustand. Die Emissionsspaltung ist in mehreren Arbeiten untersucht worden (siehe z. B. [5,61; 5,62]). Die Arbeiten von PERFILOW, LOSHKIN, SCHAMOW, IWANOWA u. a. (siehe z. B. bei PERFILOW [5,63]) sind der Untersuchung der Besonderheiten der Kernspaltung bei großen Anregungsenergien gewidmet.

5.7. Kinetische Energie und Winkelverteilung der Spaltprodukte

Die mittlere kinetische Energie der Spaltprodukte des ^{235}U-Kerns durch langsame Neutronen beträgt $167{,}1 \pm 2$ MeV. Die mittlere kinetische Energie der Spaltprodukte ändert sich etwas bei Veränderung des Massenverhältnisses. Dies ist auch aus der Energieabschätzung für die COULOMB-Abstoßung zweier Tröpfchen zu erwarten, wenn man die Korrektion für den Schaleneffekt berücksichtigt, der die Gesamtenergie bei der symmetrischen Spaltung verkleinert. Die kinetische Energie der Spaltprodukte hängt relativ schwach von der Anregungsenergie des Kerns ab, da die überschüssige Energie meist

für die Anregung der inneren Zustände der Spaltprodukte aufgewendet wird. Wie bekannt, wird die Kernspaltung von einer Neutronenemission begleitet. Das Spektrum der schnellen Neutronen, die bei der ^{235}U-Spaltung durch langsame Neutronen emittiert werden, ist in der Abb. 42 dargestellt.

Die mittlere Zahl der emittierten Neutronen wächst bei der spontanen Spaltung in Abhängigkeit von der Massenzahl nahezu linear (für ^{236}Pu gilt $\bar{\nu} = 1{,}89$ für ^{252}Cf $\bar{\nu} = 3{,}52$). Sie nimmt auch mit wachsender Anregungsenergie des Kerns zu [5,64]. Die von FRASER [5,65] gemessene Winkelverteilung für die vom Kern emittierten Neutronen läßt sich mit der Annahme

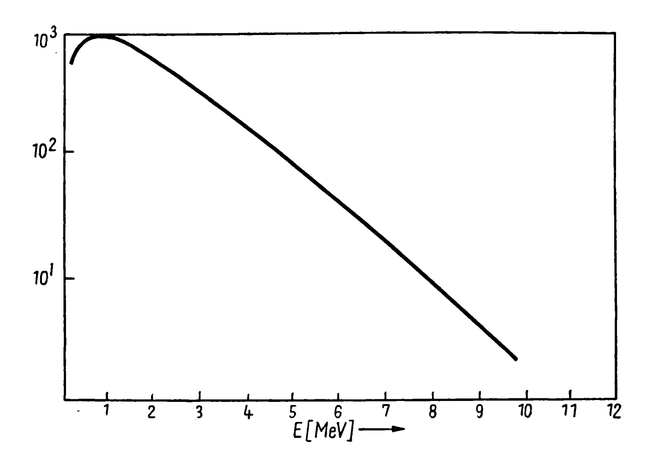


Abb. 42. Spektrum der schnellen Neutronen, die bei der ^{235}U-Spaltung durch thermische Neutronen entstehen

in Übereinstimmung bringen, daß die Neutronen von den auseinanderfliegenden Spaltprodukten verdampft werden. Im Mittel emittiert das leichtere Spaltprodukt um 30% mehr Neutronen als das schwere. Das Zeitintervall zwischen Spaltung und Neutronenemission beträgt ungefähr $4 \cdot 10^{-14}$ s.

Jedes der sich im Verlaufe des Spaltprozesses bildenden Spaltbruchstücke besitzt bezüglich der Protonenzahl einen Neutronenüberschuß. Daher unterliegt jedes Spaltprodukt im Mittel 3 β-Zerfällen, bis es stabil wird. Bei der Spaltung von ^{235}U tragen Elektronen, Neutrino und γ-Quanten ungefähr 20 MeV der frei werdenden Energie weg. Einige β-Zerfälle von Spaltprodukten im Gebiet abgeschlossener Schalen ergeben Tochterkerne in so hochangeregten Zuständen, daß Neutronenemission möglich wird. Diese Neutronen werden als *verzögerte Neutronen* bezeichnet, da ihre Emissionszeit mit der Lebensdauer des entsprechenden Spaltprodukts bezüglich β-Zerfall verknüpft ist. So werden z. B. beim β-Zerfall des ^{87}Br Neutronen mit einer Verzögerung von 55 s und beim β-Zerfall des ^{137}J Neutronen mit einer Verzögerung von 22 s emittiert.

Von Interesse ist die Untersuchung der Winkelverteilung von Spaltprodukten bezüglich der Einfallsrichtung der Teilchen oder Quanten, die die Spaltung hervorrufen. Erstmals wurde eine Anisotropie in der Winkelverteilung der Spaltprodukte in der Arbeit von WINHOLD, DEMOS und HALPERN [5,66] bei der Untersuchung der Photospaltung von Thorium festgestellt. Es erwies sich, daß die Spaltprodukte vorwiegend unter einem rechten Winkel zur Einfallsrichtung des γ-Quants emittiert werden. In den experimentellen Fehlergrenzen unterliegt die Winkelverteilung folgendem Gesetz:

$$a + b \sin^2 \vartheta . \tag{5.7.1}$$

Der Anisotropiefaktor b/a nimmt ein Maximum bei Photonenenergien in der Nähe der Spaltschwelle an und wird mit wachsender Energie kleiner. Die Anisotropie der Winkelverteilung der Spaltprodukte bei der Photospaltung von ^{238}U wurde von LASAREWA, BANNIK, KULIKOWA und JAKOWLEW [5,55; 5,67] untersucht.

Von Interesse ist der Zusammenhang zwischen der Massenasymmetrie der Spaltprodukte und der Winkelanisotropie bei der Spaltung. In der Abb. 43 sind Angaben aus der Arbeit [5,68] angeführt, in der der Anisotropiefaktor b/a für Fälle der Spaltung mit verschiedenen Massenzahlen bestimmt wurde. Das Verhältnis b/a wächst nahezu linear mit zunehmendem Massenverhältnis der Spaltprodukte.

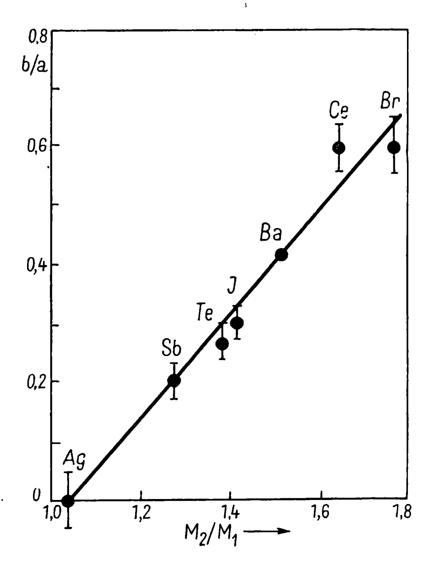


Abb. 43. Anisotropiefaktor für die Winkelverteilung der ^{232}Th-Photospaltprodukte in der Nähe der Schwelle in Abhängigkeit vom Massenverhältnis

Die Winkelverteilung der Spaltprodukte bei der Spaltung durch schnelle Teilchen ist ebenfalls anisotrop. In diesem Fall fällt die Austrittsrichtung der Spaltprodukte mit der Bewegungsrichtung der einfallenden Teilchen, die die Spaltung hervorrufen, zusammen. Die Winkelverteilung ist in bezug auf 90° symmetrisch und läßt sich durch die Formel

$$1 + A \cos^2 \vartheta + B \cos^4 \vartheta$$

ausdrücken. Auch in diesem Fall wächst die Anisotropie der Winkelverteilung mit der Vergrößerung des Massenverhältnisses der Spaltprodukte.

Im allgemeinen Fall hängt die Anisotropie der Winkelverteilung vom Typ des sich spaltenden Kerns, vom Massenverhältnis der Spaltprodukte und von der Energie des einfallenden Teilchens ab. Eine besonders scharfe Abhängigkeit der Anisotropie der Winkelverteilung von der Energie des einfallenden Teilchens wird in der Nähe der Schwellenenergie beobachtet. In

der Abb. 44 ist das Verhältnis $\sigma_f(0°)/\sigma_f(90°)$ als Funktion der Neutronenenergie im Gebiet der Schwellenenergie für die ^{238}U-Spaltung dargestellt. Die gestrichelte Linie stellt den Spaltquerschnitt dar. Wie aus der Abbildung ersichtlich, wächst die Anisotropie für Energien, die die Schwellenenergie um einige 100 keV übersteigen, sehr schnell und erreicht einen Maximalwert bei einer Neutronenenergie von etwa 1,5 MeV. Danach wird sie zunächst wieder kleiner, geht bei 3,5 MeV fast in die isotrope Verteilung über und nimmt dann mit wachsender Neutronenenergie monoton zu. In der Abb. 45 ist das Verhältnis $\sigma_f(0°)/\sigma_f(90°)$ als Funktion der Neutronenenergie bei der ^{232}Th-Spaltung dargestellt. Zum Unterschied vom ^{238}U wächst die Winkelanisotropie bei der Spaltung des ^{232}Th durch Neutronen oberhalb der Schwellenenergie sofort sehr stark. Dies entspricht der scharfen Resonanzlinie im Spaltquerschnitt des ^{232}Th. Im Resonanzgebiet fliegen die Spaltprodukte im wesentlichen senkrecht zur Richtung der Neutronen auseinander. Bei weiterer Vergrößerung der Neutronenenergie erreicht die Anisotropie ein

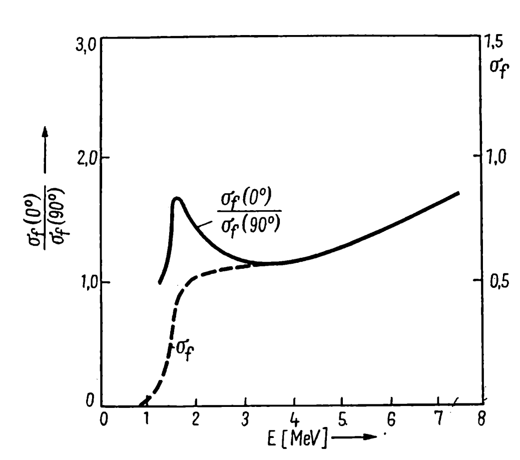


Abb. 44. Spaltquerschnitt und Anisotropie der Spaltproduktverteilung bei der ^{238}U-Spaltung durch Neutronen

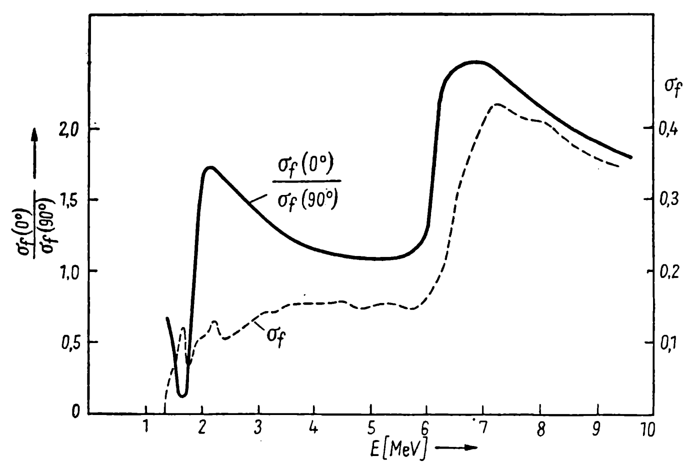


Abb. 45. Spaltquerschnitt und Anisotropie der Winkelverteilung der Spaltprodukte bei der ^{232}Th-Spaltung durch Neutronen

Maximum (in Richtung der Neutronenbewegung) und verläuft im weiteren analog wie bei der Spaltung des ^{238}U. Bei 5 MeV ist die Verteilung fast isotrop, bei 6 MeV nimmt die Anisotropie erneut sehr stark zu. Bei Energien > 7 MeV verkleinert sie sich wieder, bleibt jedoch noch relativ groß. Möglicherweise ist dies mit der Zunahme der Wahrscheinlichkeit für symmetrische Spaltung verknüpft. Die experimentellen Angaben über die Winkelanisotropie sind noch nicht vollständig, so daß die weitere Untersuchung dieser Frage besonderes Interesse besitzt.

Die Theorie der Winkelverteilung der Spaltprodukte ist noch sehr wenig entwickelt. Bemerkenswert ist die Arbeit von Strutinski [5,69], in der ohne Benutzung von Modellvorstellungen nur auf Grund der Erhaltungssätze für den Bahndrehimpuls gezeigt wurde, daß für spinlose Spaltprodukte die Winkelverteilung bei der Photospaltung ein Maximum bei 90° und bei der Spaltung durch Neutronen ein Maximum bei 0° besitzen muß. Der Unterschied ist darauf zurückzuführen, daß sich beim Einfang eines schnellen Nukleons der Spin des Compoundkerns bevorzugt senkrecht zum einfallenden Strahl einstellt. Werden Dipol-γ-Quanten eingefangen, so ist wegen der Transversalität der elektromagnetischen Wellen die Projektion des Bahndrehimpulses auf die Bewegungsrichtung gleich ± 1. Infolgedessen orientiert sich der Spin des Compoundkerns in Richtung des einfallenden Strahls. Da für spinlose Spaltprodukte die Flugrichtung senkrecht zur Richtung des Bahndrehimpulses liegt, muß diese Richtung mit der Spinrichtung des Compoundkerns einen rechten Winkel bilden. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Ist der Spin des Targetkerns von Null verschieden, so wird die Winkelverteilung von spinlosen Spaltprodukten infolge der großen Isotropie der Spinverteilung des Compoundkerns stärker isotrop.

5.8. Kombiniertes Modell des Kerns und Kernspaltung

Der Spaltprozeß ist durch die kollektive Bewegung der Nukleonen im Kern bedingt, deren Charakter im wesentlichen von den Einzelteilchenzuständen im Kern abhängt. Eine Theorie der Spaltung muß sowohl kollektive als auch individuelle Nukleonenzustände im Kern berücksichtigen. Man kann daher erwarten, daß das kombinierte Modell des Kerns, in dem sowohl kollektive als auch Einzelteilchenzustände berücksichtigt werden, eine detailliertere Erklärung für den Spaltprozeß liefert als das einfache Tröpfchenmodell, das sogar die nichtsphärische Form der Grundzustände vieler Kerne nicht erklären kann. Die Anwendung des kombinierten Modells auf die Beschreibung qualitativer Gesetzmäßigkeiten bei der Spaltung wurde von A. Bohr und Mottelson [5,70] vorgenommen.

Die Form aller spaltbaren Kerne (im Grundzustand) kann durch folgende Gleichung beschrieben werden:

$$R(\vartheta) = R_0\{1 + \beta_0\, Y_{20}(\vartheta)\}. \tag{5.8.1}$$

Dabei hat der Parameter die Größe $\beta_0 = 0{,}2 \cdots 0{,}3$. Die Kernspaltung besitzt dann eine merkliche Wahrscheinlichkeit, wenn die Anregungsenergie

des Kerns ungefähr von der Größe der Schwellenenergie ist ($5 \cdots 6$ MeV) und sich auf den Schwingungsfreiheitsgrad des Kerns konzentriert bzw. wenn bei Formschwingungen des Kerns der Wert von β überschritten wird, der dem Sattelpunkt auf der Energiefläche der potentiellen Energie entspricht. Überschreitet also die Anregungsenergie des Kerns die Schwellenenergie nicht sehr, so werden im Moment des Durchgangs durch die kritische Deformation keine Freiheitsgrade des Kerns angeregt außer der Deformation, die dem Glied $Y_{20}(\vartheta)$ entspricht. Mit anderen Worten, man kann sagen, daß der Kern beim Durchgang durch den Sattelpunkt als „kalt" zu betrachten ist.

Die Energie der Oberflächenschwingungen in schweren Kernen beträgt etwa $800 \cdots 900$ keV; das entspricht einer Schwingungsdauer von $\tau_\beta \approx 5 \cdot 10^{-21}$ s. Die Schwingungsdauer für ein Teilchen mit der kinetischen Energie von ≈ 20 MeV beträgt $\tau_\beta \approx 2 \cdot 10^{-22}$ s. Aus diesem Grund ist eine adiabatische Näherung möglich, bei der der Nukleonenzustand für jeden fixierten Wert der Deformation β betrachtet wird. Die Gesamtenergie E des Kerns wird in dieser Näherung eine Funktion der Deformation; man kann also $E = E(\beta)$ schreiben. Die Deformationsenergie des Kerns, die einer Formänderung $\beta_0 \to \beta$ entspricht, lautet

$$V(\beta) = E(\beta) - E(\beta_0). \tag{5.8.2}$$

Die Schwellenenergie $V(\beta_{\text{kr}})$ entspricht dem Wert von (5.8.2) bei der kritischen Deformation. Die Schwellenenergie muß eine Funktion der Nukleonenzustände im Kern bei einer Form, die der kritischen Deformation entspricht, sein.

Wir nehmen an, daß der Kern seine axialsymmetrische Form beim Durchgang durch die kritische Deformation beibehält. Diese ist der Form im Grundzustand ähnlich. Dann läßt sich der Zustand bei der kritischen Deformation durch folgende Wellenfunktion charakterisieren:

$$\psi = \Phi(\beta)\, \chi_\Omega\, D^J_{MK}(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3). \tag{5.8.3}$$

Dabei bedeutet $\Phi(\beta)$ die Wellenfunktion für die Schwingungen um die „Gleichgewichtslage" β_{kr}, χ_Ω bestimmt den inneren Zustand der Nukleonen im Kern, und D^J_{MK} ist die Wellenfunktion, die die Orientierung der Symmetrieachse des Kerns im Raum charakterisiert. Die Quantenzahl J bestimmt den Gesamtdrehimpuls des Compoundkerns, M ist die Projektion des Gesamtdrehimpulses auf eine im Raum gewählte Vorzugsrichtung und K die Projektion des Gesamtdrehimpulses auf die Symmetrieachse des Kerns.

Für gg-Kerne gilt im Grundzustand $\Omega = K = 0$; dabei lautet die entsprechende Energie

$$E_J(\beta) = \varepsilon_0(\beta) + A(\beta)\, J(J+1), \tag{5.8.4}$$

wenn ε_0 die innere Energie des Kerns bedeutet. $A(\beta)$ ist eine Größe, die von der Deformation des Kerns abhängt. Bei Deformationen, die dem Grundzustand schwerer Kerne entsprechen, beträgt $A(\beta_0) \approx 7$ keV. Bei der kritischen Deformation ist $A(\beta_{\text{kr}})$ wesentlich kleiner als 7 keV.

Man muß natürlich beachten, daß die Gl. (5.8.4) für die Charakterisierung des Kernzustandes im Gebiet der kritischen Deformation nur bedingt Sinn hat, da die Schwingungen im Gebiet der kritischen Deformation aperiodisch und die Energieniveaus nicht stationär sind.

Außer einer axialen Symmetrieachse besitzen gg-Kerne im Grundzustand auch ein Symmetriezentrum. Die Berücksichtigung der Symmetrieeigenschaften des Kerns (s. Abschn. 4.6.) führt dazu, daß im Grundzustand nur gerade Werte von J auftreten: $J = 0, 2, 4, \ldots$ Bei großen Deformationen, die sich den kritischen Werten nähern, kann der Kern kein Symmetriezentrum besitzen. Dann wird die Form des Kerns durch folgende Gleichung beschrieben:

$$R(\vartheta) = R_0\{1 + \beta\, Y_{20}(\vartheta) + \alpha\, Y_{30}(\vartheta)\}. \tag{5.8.5}$$

Hierbei sind β und α Werte, die dem Minimum der potentiellen Energie entsprechen. Besitzt die potentielle Energie bei einer bestimmten Form des Kerns (die dem vorgegebenen α entspricht) ein Minimum, so wird auch die Form des Kerns, die aus der ersten durch Spiegelung an einer Ebene senkrecht zur axialen Symmetrieachse entsteht, bei demselben Wert ein Minimum besitzen. Ist kein Symmetriezentrum vorhanden, so lautet die Energie des Kerns

$$E_J(\beta, \alpha) = \varepsilon_0(\beta, \alpha) + A\, J(J+1) + \Delta\varepsilon,$$

wobei die Zusatzenergie $\Delta\varepsilon$ der Frequenz für die „Tunnelbewegung" zwischen den beiden oben angeführten Spiegelformen des Kerns proportional ist. Je größer die Asymmetrie des Kerns ist, desto kleiner ist die Frequenz dieser Bewegung und desto kleiner folglich auch $\Delta\varepsilon$. Das Energiespektrum von Kernen ohne Symmetriezentrum muß auch Zustände mit ungeradem Bahndrehimpuls und ungerader Parität enthalten. Solche Zustände werden bei der Anregung von gg-Kernen beobachtet (s. Abschn. 4.9.). Besonders niedrig liegen die Zustände 1^- bei den geraden Isotopen des Radiums und des Thoriums. In Abb. 46 sind Werte für die Energie des Niveaus 1^- für einige Kerne angeführt. Außerdem ist die Größe $\left(\frac{M_2 - M_1}{A}\right)^2$ eingetragen, die die Asymmetrie der Spaltung durch langsame Neutronen charakterisiert. Zwischen der Veränderung der Spaltungsasymmetrie und der Lage des Niveaus 1^- besteht eine Korrelation: Je höher das Niveau 1^- liegt, desto kleiner ist die Asymmetrie der Spaltung.

Für Kerne mit ungeraden Massenzahlen ergibt sich K im Grundzustand aus der Projektion des Drehimpulses für das letzte unpaarige Nukleon im niedrigsten aller möglichen Zustände. Bei Veränderung der Kerndeformation verlagern sich die Einzelteilchenniveaus. Bei kritischer Deformation kann dem niedrigsten Zustand des Nukleons ein Ω^* entsprechen, das nicht mit dem Ω-Wert im Grundzustand des Kerns übereinstimmt. Beim Übergang von β_0 zu β_{kr} ist nicht nur Energie für die Vergrößerung der potentiellen Deformationsenergie, sondern auch Energie, die dem Energieunterschied zwischen den Einzelteilchenzuständen mit den Spinprojektionen Ω_0 und Ω^* entspricht, aufzuwenden.

Auf diese Weise kann man nach WHEELER [5,71] den höheren Potentialwall für die Spaltung eines ungeraden Kerns im Vergleich mit dem des benachbarten geraden Kerns (um 0,5 · · · 1 MeV) erklären. Das führt zu einer kleineren Wahrscheinlichkeit für die Spaltung von Kernen mit ungerader Massenzahl im Vergleich zur Wahrscheinlichkeit für die Spaltung von gg-Kernen.

Wir untersuchen nun die Winkelverteilung der Spaltprodukte, wenn die Spaltung durch Photonen ausgelöst wurde. Wird die Photospaltung durch elektrische Dipolstrahlung verursacht, so muß die Spaltung eines gg-Kerns

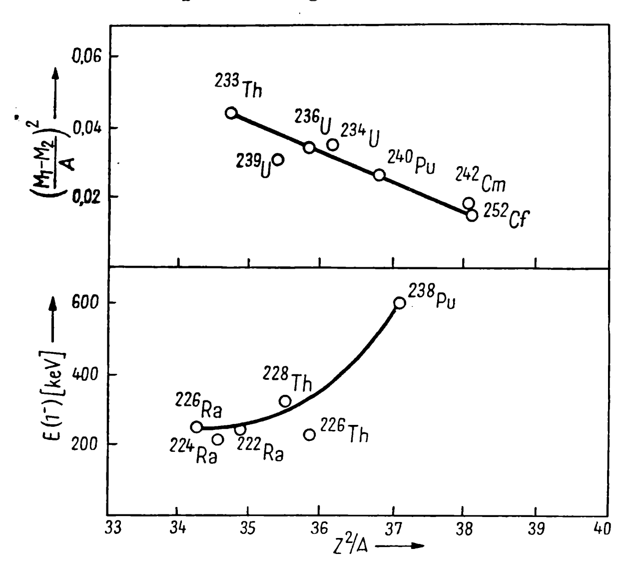


Abb. 46
Die Asymmetrie bei der Spaltung (*oben*) und die Energie des Zustandes 1^- (*unten*)

über einen Zwischenzustand mit dem Drehimpuls 1 und ungerader Parität verlaufen. Für Photonenenergien nahe der Schwellenenergie existiert nur ein Zustand 1^-, der $K = 0$ und einer Rotation des Kerns mit $J = 1$ entspricht. Natürlicherweise nimmt man an, daß die Flugrichtung der Spaltprodukte mit der Richtung der axialen Symmetrieachse des Kerns zusammenfällt. Dann wird die Winkelverteilung der Spaltprodukte bezüglich der Photonenrichtung durch die räumliche Verteilung der axialen Symmetrieachsen des Kerns bestimmt. Man kann die Winkelverteilung nach (5.8.3) in der Form

$$d\sigma(\vartheta) = A \sum_M |D^1_{M0}|^2 \tag{5.8.6}$$

schreiben. Wählt man die Quantelungsachse entlang der Bewegungsrichtung der Photonen, so kann M in (5.8.6) nur die Werte ± 1 annehmen. Dann erhält man unter Berücksichtigung von

$$D^1_{M0} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\, Y_{M1}(\vartheta, \varphi)$$

den Wert

$$d\sigma(\vartheta) \approx \sin^2 \vartheta. \tag{5.8 6a}$$

In diesem Fall fliegen also die Spaltprodukte im wesentlichen senkrecht zur Richtung der Photonen auseinander.

Ist die Photonenenergie groß genug, um höherliegende Zustände vom Typ 1^- anzuregen, die der inneren Anregung von Nukleonen mit $K = 1$ (≈ 1 MeV) entsprechen, so wird die Winkelverteilung durch folgende Formel gegeben:

$$d\sigma(\vartheta) = A \sum_M |D^1_{M1}|^2 = A \{|D^1_{11}|^2 + |D^1_{-1,1}|^2\}.$$

Benutzt man die im Anhang 1 angeführten Werte für die Funktionen D^1_{M1}, so wird

$$d\sigma(\vartheta) = \frac{1}{2} A (1 + \cos^2\vartheta).$$

Im allgemeinen Fall läßt sich also die Winkelverteilung der Spaltprodukte bei der Photospaltung durch die Gleichung

$$d\sigma(\vartheta) = a + b \sin^2\vartheta$$

beschreiben, wobei das Verhältnis b/a von der Anregungsenergie des Kerns abhängt.

Da die Rotationszustände vom Typ 1^- asymmetrischen Kernen entsprechen, muß die Winkelverteilung vom Typ (5.8.6a) bei der asymmetrischen Spaltung auftreten. Vergrößert sich der Einfluß der symmetrischen Spaltung, so verkleinert sich die Winkelanisotropie. Das kombinierte Modell gibt also eine natürliche qualitative Erklärung für den Zusammenhang zwischen Winkelanisotropie und Massenverteilung der Spaltprodukte.

Bei der Photospaltung von Kernen mit ungerader Massenzahl führt die Absorption eines Dipol-γ-Quants zu mehreren Spinzuständen. Außerdem liegen in diesem Fall die Quantenzustände dichter beieinander als bei gg-Kernen. Daher kann die Photospaltung in diesem Fall sogar bei Energien nahe der Schwellenenergie über verschiedene Kanäle verlaufen, und es ist auch keine bestimmte Anisotropie zu erwarten.

Bei der Photospaltung von gg-Kernen durch Absorption von Quadrupol-γ-Quanten, bei der sich die Quantenzahl K nicht ändert, muß die Winkelverteilung folgende Form besitzen:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = A \sum_{M=1,-1} |D^2_{M0}|^2 \approx \sum_{M=1,-1} |Y_{2M}|^2 \approx \sin^2\vartheta \cos^2\vartheta.$$

Bei der Spaltung von gg-Kernen durch schnelle Neutronen bildet sich ein Compoundkern mit verschiedenen Spinwerten J. Wir wählen die Quantelungsachse in Richtung des Neutronenstrahls. Dann kann im Anfangszustand die Projektion des Drehimpulses vom System Neutron–Kern (auf diese Achse) nur die beiden Werte $\pm {}^1/_2$ annehmen. Diese Projektion ist Bewegungsintegral, so daß sich der Compoundkern mit dem Drehimpuls J nur in den Zuständen mit $J_z = \pm {}^1/_2$ befinden kann. Ist der Spin des Compoundkerns J größer als ${}^1/_2$, so folgt aus der Ungleichung $J \gg J_z$, daß der Spin des Compoundkerns bevorzugt senkrecht zur Achse des Neutronenstrahls

orientiert sein wird. Andererseits ist für Zustände eines Kerns mit dem Drehimpuls J, die kleinen Werten von K (Projektion von J auf die Symmetrieachse des Kerns) entsprechen, die Symmetrieachse ebenfalls im wesentlichen senkrecht zum Drehimpuls. Aus diesem Grunde wird die Symmetrieachse (und daher auch die Flugrichtung der Spaltprodukte) vorzugsweise entlang der Achse des Neutronenstrahls gerichtet sein. Gilt für den Zustand des Compoundkerns mit dem Drehimpuls J vor der Spaltung $K \approx J$, dann hat die Symmetrieachse die Richtung des Gesamtdrehimpulses, d. h., sie bildet einen Winkel von 90° mit dem Neutronenstrahl.

Verläuft also die Spaltung über einen Zustand mit dem Drehimpuls J, so werden die Spaltprodukte im wesentlichen entweder in Vorwärtsrichtung (bei $K \ll J$) oder unter einem Winkel von 90° (bei $K \approx J$) emittiert. Im allgemeinen Fall wird sich das Maximum in der Winkelverteilung der Spaltprodukte aus der Bedingung $\sin\vartheta \approx K/J$ ergeben.

Ist der Targetkern ein gu-Kern (gerades Z, ungerades N), so wird der Compoundkern ein gg-Kern sein. Bei kleinen Anregungsenergien bedeutet das kleine Werte von K. In diesem Fall ist die Richtung der Symmetrieachse bei $J > K$ relativ gut bestimmt. Man hat eine ausgesprochene Winkelanisotropie bei kleinen Spinwerten des Targetkerns zu erwarten, wenn das Änderungsgebiet von M beschränkt ist. Eine kleine Anisotropie muß die Winkelverteilung der Spaltprodukte von ug- oder uu-Kernen bei Neutronenbeschuß aufweisen, da hier die der Größe M auferlegten Beschränkungen fortfallen und dasselbe auch für K gilt. Man hat also z. B. eine große Anisotropie beim ^{239}Pu ($J_0 = 1/2$) und eine kleinere Anisotropie beim ^{235}U ($J_0 = 7/2$) zu erwarten.

Verläuft die Spaltung durch Neutronen über einen Zwischenzustand mit dem Gesamtdrehimpuls J und der Projektion K auf die Symmetrieachse des Kerns, so läßt sich unter Benutzung der Wellenfunktion (5.8.3) für die Charakterisierung des Compoundkernzustandes vor der Spaltung folgende Beziehung für die Winkelverteilung finden:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = A \sum_{M=1/2}^{-1/2} |D^J_{MK}|^2. \tag{5.8.7}$$

Die Formel (5.8.7) kann auf eine Summe von LEGENDREschen Polynomen reduziert werden, wenn man die Gleichung

$$|D^J_{MK}|^2 = (-1)^{K-M} \sum_{l=0}^{2J} (J, J, -M, M \mid l\, 0)\, (J, J, -K, K \mid l\, 0)\, P_{l0}(\cos\vartheta)$$

(s. Anhang 1.5.) verwendet. Bezeichnet man mit $G(J\,K)$ die Bildungswahrscheinlichkeit für den Compoundkern $J\,K$, so läßt sich die Winkelverteilung der Spaltprodukte bei Spaltung durch Neutronen durch folgende Formel ausdrücken:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = A \sum_{M=1/2}^{-1/2} \sum_{J,K} G(J\,K)\, |D^J_{MK}|^2.$$

KAPITEL 6

GRUNDLAGEN DER THEORIE DES β-ZERFALLS

6.1. Neutrinotheorie des β-Zerfalls

Die Mehrzahl instabiler Kerne zerfällt unter Elektronen- (oder Positronen-) Emission mit entsprechender Vergrößerung (oder Verkleinerung) der Kernladungszahl um 1. Ein solcher Prozeß wird als Elektronen- (β^-) oder Positronen- (β^+) Zerfall bezeichnet, je nachdem, ob der Kern ein Elektron oder ein Positron emittiert. In einigen Fällen ändert der Kern durch den Einfang eines Hüllenelektrons durch ein Proton des Kerns seine Ladung. Diese Erscheinung wird als K-Einfang bezeichnet. Wir werden sie in Abschn. 6.7. näher betrachten.

Die Lebensdauer verschiedener Kerne hinsichtlich des β-Zerfalls ändert sich in sehr weiten Grenzen (von 0,01 s bis zu 10^{18} a). Die obere Grenze wird lediglich durch die experimentellen Möglichkeiten der Lebensdauerbestimmung gegeben. Im Vergleich zu den gewöhnlichen Zeitmaßstäben in der Kernphysik kann man die Lebensdauer eines Kerns in bezug auf β-Zerfall als unendlich groß betrachten.

Bei der experimentellen Untersuchung des β-Zerfalls wurde festgestellt,

1. daß die Zerfallselektronen (-positronen) ein kontinuierliches Energiespektrum besitzen; die Maximalenergie in diesem Spektrum ist gleich der Energiedifferenz zwischen Mutter- und Tochterkern,

2. daß sich die Drehimpulse von Mutter- und Tochterkern um ein ganzes Vielfaches von $\hbar$ unterschieden, obwohl das Elektron (Positron) einen Bahndrehimpuls $\hbar/2$ forträgt.

Die scheinbare Nichterfüllung des Energiesatzes und des Erhaltungssatzes für den Drehimpuls beim β-Zerfall wurde durch die PAULIsche Hypothese beseitigt. In dieser Hypothese wird die Existenz eines neutralen Teilchens — des Neutrinos — mit halbzahligem Spin und einer Ruhemasse nahe Null postuliert. Nach der Neutrinohypothese verteilt sich die Zerfallsenergie statistisch auf Elektron und Neutrino, die beim β-Zerfall beide gleichzeitig entstehen und emittiert werden. Die Ruhenergie des Neutrinos muß gleich der Differenz zwischen der maximalen Elektronenenergie und der Gesamtenergie des Kernübergangs sein. Das Experiment zeigt, daß die Ruhenergie des Neutrinos in den experimentellen Fehlergrenzen gleich Null ist ($m_\nu/m_e \leqq 10^{-3}$).

Durch den Erfolg der Neutrinotheorie des β-Zerfalls, durch experimentelle Resultate über die Untersuchung von Rückstoßkernen beim β-Zerfall sowie durch Versuche über die unmittelbare Rückwirkung des Neutrinos auf Nukleonen wurde die Neutrinohypothese auf eine feste Basis gestellt. Die Realität der Existenz des Neutrinos ist heute ohne Zweifel.

Die erste mathematische Beschreibung des β-Zerfalls auf Grund der Neutrinohypothese wurde 1934 von FERMI [6,1] in Analogie zur Theorie der elektromagnetischen Strahlung vorgeschlagen. Im weiteren erfuhr diese Theorie bis zum Jahre 1956 durch viele Forscher zahlreiche Verbesserungen; dabei wurden jedoch die von FERMI vorgeschlagenen Grundlagen nicht wesentlich verändert. Eine Übersicht über die Arbeiten dieser Zeit gibt [6,2].

1956 wurde festgestellt, daß bei schwachen Wechselwirkungen die Parität nicht erhalten bleibt. Der β-Zerfall ist ein solcher Prozeß mit schwacher Wechselwirkung. Aus diesem Grund wuchs das Interesse für den β-Zerfall sowohl von experimenteller als auch von theoretischer Seite sehr stark. Im Jahre 1957 erschien eine große Anzahl von experimentellen Arbeiten, die die Nichterhaltung der Parität beim β-Zerfall nachwiesen. Gleichzeitig zeigte sich jedoch im Zusammenhang mit der Verbesserung der experimentellen Methodik, daß eine Reihe der früher durchgeführten Arbeiten keine genügende Genauigkeit aufwies. Aus diesem Grunde stimmten die Resultate dieser Arbeiten auch miteinander nicht überein. Es besteht kein Zweifel, daß in der nächsten Zukunft die wesentlichen Gesetzmäßigkeiten des β-Zerfalls geklärt werden.

In diesem Kapitel betrachten wir nur die Grundlagen der Theorie des β-Zerfalls. Zunächst werden wir annehmen, daß die Parität beim β-Zerfall erhalten bleibt. Danach untersuchen wir, wie die Theorie zu verändern ist, damit die Nichterhaltung der Parität berücksichtigt werden kann.

Für den Aufbau der Theorie des β-Zerfalls ist es zunächst notwendig, die Form des Operators H' für die Wechselwirkung zwischen den Nukleonen und dem Elektron-Neutrino-Feld festzulegen. Auf Grund der Kleinheit dieser Wechselwirkung läßt sich die Untersuchung nach der Störungsrechnung in der ersten BORNschen Näherung durchführen. Dabei drückt sich die Wahrscheinlichkeit für den β-Zerfall je Zeiteinheit unmittelbar durch das Matrixelement vom Wechselwirkungsoperator zwischen den Wellenfunktionen des Anfangs- (a) und des Endzustandes (b) aus:

$$P_{ba} = \frac{2\pi}{\hbar} |(b|H'|a)|^2 \varrho(E). \tag{6.1.1}$$

Hierbei bedeutet $\varrho(E)$ die Anzahl der Endzustände je Einheitsintervall der Energieskala.

Bei der konkreten Wahl des Wechselwirkungsoperators H' für die Wechselwirkung zwischen dem Elektron-Neutrino-Feld und den Nukleonen ist zu berücksichtigen, daß der Elektronenzerfall durch Umwandlung eines Neutrons im Kern in ein Proton unter Emission eines Elektrons und eines Antineutrinos und der Positronenzerfall durch Umwandlung eines Protons in ein Neutron unter Emission eines Positrons und eines Neutrinos vor sich geht.

Prozesse, in denen eine Umwandlung von Teilchen ineinander erfolgt, lassen sich theoretisch bequem mit Hilfe des Formalismus der zweiten Quantelung beschreiben. Dabei werden die Zustände des Systems durch Funktionen beschrieben, in denen als unabhängige Veränderliche die Anzahlen

der Teilchen in bestimmten Zuständen (Besetzungszahlen) fungieren. Die Wellenfunktionen der Teilchen ψ und ψ^+ werden als Operatoren betrachtet, die auf Funktionen der Besetzungszahlen wirken. Der Operator ψ^+ wird als Erzeugungsoperator des Teilchens bezeichnet, da seine Wirkung auf eine Funktion der Besetzungszahlen auf die Vergrößerung der Teilchenzahl in einem Zustand um eine Einheit zurückgeführt werden kann. Der Operator ψ heißt Vernichtungsoperator, da seine Wirkung auf eine Funktion der Besetzungszahlen zu einer Verkleinerung der Teilchenzahl in einem Zustand um eine Einheit führt.

Proton, Neutron, Elektron, Positron, Neutrino und Antineutrino besitzen den Spin $^1/_2$ und werden durch die DIRAC-Gleichung beschrieben. Dabei bilden Elektron und Positron sowie Neutrino und Antineutrino Paare sogenannter ladungskonjugierter Teilchen. In der Theorie der zweiten Quantelung wird gezeigt, daß die Erzeugung von Teilchen der Vernichtung von Antiteilchen äquivalent ist und umgekehrt. Aus diesem Grund kann man den Prozeß des Elektronenzerfalls (β^--Zerfalls)

$$\mathrm{n} \rightarrow \mathrm{p} + \mathrm{e} + \tilde{\nu},$$

der in der Umwandlung eines Neutrons in ein Proton unter Emission von Elektron und Antineutrino besteht, als Prozeß betrachten, bei dem ein Neutron (beschrieben durch den Operator ψ_n) und ein Neutrino (beschrieben durch den Operator ψ_ν) vernichtet und ein Elektron und ein Proton (beschrieben durch die Operatoren ψ_e^+ bzw. ψ_p^+) erzeugt werden. Aus diesem Grund muß der Operator H' für den Prozeß des Elektronenzerfalls folgende Operatoren enthalten:

$$\psi_\mathrm{p}^+ \, \psi_\mathrm{n} \, \psi_\mathrm{e}^+ \, \psi_\nu .$$

Entsprechend muß der Operator H' für den Prozeß des Positronenzerfalls (β^+-Zerfalls) folgende Operatoren enthalten:

$$\psi_\mathrm{n}^+ \, \psi_\mathrm{p} \, \psi_\nu^+ \, \psi_\mathrm{e} .$$

Um die explizite Abhängigkeit des Wechselwirkungsoperators für die Wechselwirkung zwischen dem Elektron-Neutrino-Feld und den Nukleonen von den Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren aufzusuchen, geht man von den Forderungen der relativistischen Invarianz, der Invarianz bezüglich Zeitumkehr und der Invarianz bezüglich der Ladungskonjugation sowie vom Gesetz von der Erhaltung der Parität aus. Nimmt man an, daß der Operator H' nur die Operatoren ψ und ψ^+ und nicht ihre Ableitungen enthält,[1]) so kann man H' als Linearkombination aus fünf elementaren Wechselwirkungen schreiben:

$$H' = \sum_{i=1}^{5} C_i H_i = C_S H_S + C_V H_V + C_T H_T + C_A H_A + C_P H_P . \quad (6.1.2)$$

---

[1]) Versuche, die Ableitungen der Wellenfunktionen für die leichten Teilchen einzuführen [6,3], führten zu Resultaten, die mit dem Experiment nicht vereinbar sind [6,4].

Dabei gilt $\sum_{i=1}^{5} C_i^2 = 1$, und die elementaren Wechselwirkungen drücken sich durch die gewöhnlichen DIRAC-Matrizen $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \beta, \gamma_5 = i\,\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3$ mit Hilfe folgender Gleichung aus:

$$H_S = g \int \{(\psi_p^+ \beta \psi_n)(\psi_e^+ \beta \psi_\nu) + (\psi_n^+ \beta \psi_p)(\psi_\nu^+ \beta \psi_e)\}\, d\tau, \tag{6.1.3a}$$

$$H_V = g \int \{[(\psi_p^+ \psi_n)(\psi_e^+ \psi_\nu) - (\psi_p^+ \vec{\alpha} \psi_n)(\psi_e^+ \vec{\alpha} \psi_\nu)] + \text{h. k.}\}\, d\tau, \tag{6.1.3b}$$

$$H_T = g \int \{[(\psi_p^+ \beta \vec{\sigma} \psi_n)(\psi_e^+ \beta \vec{\sigma} \psi_\nu) + (\psi_p^+ \beta \vec{\alpha} \psi_n)(\psi_e^+ \beta \vec{\alpha} \psi_\nu)] + \text{h. k.}\}\, d\tau, \tag{6.1.3c}$$

$$H_A = g \int \{[(\psi_p^+ \vec{\sigma} \psi_n)(\psi_e^+ \vec{\sigma} \psi_\nu) - (\psi_p^+ \gamma_5 \psi_n)(\psi_e^+ \gamma_5 \psi_\nu)] + \text{h. k.}\}\, d\tau, \tag{6.1.3d}$$

$$H_P = g \int \{(\psi_p^+ \beta \gamma_5 \psi_n)(\psi_e^+ \beta \gamma_5 \psi_\nu) + \text{h. k.}\}\, d\tau. \tag{6.1.3e}$$

In (6.1.3a) bis (6.1.3e) ist über den Definitionsbereich der räumlichen Koordinaten, von denen alle Funktionen ψ abhängen, zu integrieren. g charakterisiert die Intensität der Wechselwirkung zwischen dem Elektron-Neutrino-Feld und den Nukleonen. Der Wert dieser Größe ergibt sich aus dem Vergleich von Theorie und Experiment (s. Abschn. 6.3.). Die Konstanten C_i in (6.1.2) bestimmen den relativen Einfluß der verschiedenen Wechselwirkungen (6.1.3) im Operator H' der Gesamtwechselwirkung. Die Buchstaben h. k. in (6.1.3b) bis (6.1.3e) bedeuten die zu den in den eckigen Klammern stehenden Ausdrücken hermitesch konjugierten Glieder. Diese Glieder entsprechen dem β-Zerfall mit Emission eines Positrons und Neutrinos.

Die elementaren Wechselwirkungen (6.1.3a) bis (6.1.3e) werden entsprechend als *skalare*, *vektorielle*, *tensorielle*, *pseudovektorielle* (oder *axiale*) und *pseudoskalare Wechselwirkung* bezeichnet. Diese Bezeichnungen drücken die Transformationsgesetze für die Ausdrücke aus, die sich entweder auf Nukleonen oder auf leichte Teilchen beziehen.[1])

Die Geschwindigkeit der Nukleonen im Kern ist ungefähr um eine Größenordnung kleiner als die Lichtgeschwindigkeit. Aus diesem Grund kann man

---

[1]) Mit Hilfe der Beziehungen im Anhang 3.1. und 3.3. kann man z. B. zeigen, daß die Wechselwirkung (6.1.3a) aus dem Produkt des Skalars $\psi_p^+ \beta \psi_n$ für die Funktionen der schweren Teilchen mit dem Skalar $\psi_e^+ \beta \psi_\nu$ für die Funktionen der leichten Teilchen gebildet ist. Die Wechselwirkung (6.1.3b) ist als Skalarprodukt des vierdimensionalen Vektors $\psi_p^+ \beta \gamma_i \psi_n$ für die schweren Teilchen mit dem vierdimensionalen Vektor $\psi_e^+ \beta \gamma_i \psi_\nu$ für die leichten Teilchen aufzufassen:

$$\sum_{i=1}^{4} (\psi_p^+ \beta \gamma_i \psi_n)(\psi_e^+ \beta \gamma_i \psi_\nu) = (\psi_p^+ \psi_n)(\psi_e^+ \psi_\nu) - (\psi_p^+ \vec{\alpha} \psi_n)(\psi_e^+ \vec{\alpha} \psi_\nu).$$

Die Wechselwirkung (6.1.3c) wird aus Produkten der entsprechenden tensoriellen Größen gebildet:

$$\sum_{\substack{i,k=1\\ i \neq k}}^{4} (\psi_p^+ \beta \gamma_i \gamma_k \psi_n)(\psi_e^+ \beta \gamma_i \beta_k \psi_\nu) = (\psi_p^+ \beta \vec{\sigma} \psi_n)(\psi_e^+ \beta \vec{\sigma} \psi_\nu) + (\psi_p^+ \beta \vec{\alpha} \psi_n)(\psi_e^+ \beta \vec{\alpha} \psi_\nu).$$

die Bewegung der Nukleonen in nichtrelativistischer Näherung betrachten und in (6.1.3) alle Glieder vernachlässigen, die die Matrizen $\vec{\alpha}$ und γ_5 enthalten und dabei auf die Nukleonenfunktionen wirken. Der Mittelwert der Operatoren $\vec{\alpha}$ und γ_5 ist gleich dem Verhältnis der Nukleonengeschwindigkeit im Kern zur Lichtgeschwindigkeit. Die nichtrelativistische Näherung (bezüglich der Nukleonen) enthält also nur noch folgende Wechselwirkungen:

$$H_S = g \int [(\psi_p^+ \beta \psi_n)(\psi_e^+ \beta \psi_\nu) + \text{h. k.}]\, d\tau, \tag{6.1.4a}$$

$$H_V = g \int [(\psi_p^+ \psi_n)(\psi_e^+ \psi_\nu) + \text{h. k.}]\, d\tau, \tag{6.1.4b}$$

$$H_T = g \int [(\psi_p^+ \beta \vec{\sigma} \psi_n)(\psi_e^+ \beta \vec{\sigma} \psi_\nu) + \text{h. k.}]\, d\tau, \tag{6.1.4c}$$

$$H_A = g \int [(\psi_p^+ \vec{\sigma} \psi_n)(\psi_e^+ \vec{\sigma} \psi_\nu) + \text{h. k}]\, d\tau. \tag{6.1.4d}$$

Die Wellenfunktionen des Neutrinos kann man als ebene Wellen wählen: $\psi_\nu = u_\nu \exp\{i\, \mathfrak{q}\, \mathfrak{r}\}$. Berücksichtigt man nicht die Wirkung des elektrischen Feldes des Kerns auf das Elektron, so lassen sich die Elektronenwellenfunktionen ebenfalls in der Form ebener Wellen schreiben: $\psi_e = u_e \exp\{i\, \mathfrak{k}\, \mathfrak{r}\}$. Dann enthalten alle Integranden in (6.1.4) den Faktor $\exp\{-i(\mathfrak{k} - \mathfrak{q})\, \mathfrak{r}\}$. Meist gilt für den β-Zerfall $|\mathfrak{k} - \mathfrak{q}|\, R \ll 1$; daher kann man den Exponentialausdruck in eine Reihe entwickeln:

$$\exp\{-i(\mathfrak{k} - \mathfrak{q})\, \mathfrak{r}\} = 1 - i(\mathfrak{k} - \mathfrak{q})\, \mathfrak{r} - \frac{1}{2}[(\mathfrak{k} - \mathfrak{q})\, \mathfrak{r}]^2 + \ldots, \tag{6.1.5}$$

und sich in erster Näherung auf das erste Glied dieser Entwicklung beschränken. Die Wahrscheinlichkeit für den β-Zerfall, berechnet in dieser Näherung, entspricht den sogenannten *erlaubten β-Übergängen.*

Werden infolge bestimmter Symmetrie der Wellenfunktionen die Matrixelemente (6.1.4a) bis (6.1.4d) mit Eins an Stelle der Entwicklung (6.1.5) gleich Null, während die Berücksichtigung des zweiten Gliedes in der Entwicklung auf einen Wert ungleich Null führt, so heißt der entsprechende β-Zerfall *einfach verboten* (Verbot 1. Ordnung). Gibt erst die Berücksichtigung des dritten Gliedes in der Entwicklung (6.1.5) ein von Null verschiedenes Resultat, so spricht man von einem *zweifach verbotenen* β-Zerfall (Verbot 2. Ordnung) usw.

Zu den verbotenen Übergängen rechnet man gewöhnlich auch die Fälle, in denen nur die relativistischen Matrixelemente etwas von Null Verschiedenes liefern. Diese Matrixelemente enthalten, wie schon gesagt, die Matrizen $\vec{\alpha}$ und γ_5, die auf die Nukleonenwellenfunktion wirken.

6.2. Auswahlregeln und Form des β-Spektrums für erlaubte Übergänge

Wir wollen nun die erlaubten β-Übergänge etwas näher untersuchen. Wie schon im vorigen Abschnitt erwähnt, entsprechen erlaubte Übergänge dem Fall, daß der Faktor $\exp\{i(\mathfrak{q} - \mathfrak{k})\, \mathfrak{r}\}$ durch Eins ersetzt werden kann.

Vom physikalischen Standpunkt aus bedeutet dies, daß Elektron und Neutrino keinen Drehimpuls forttragen ($l = 0$). Da Elektron und Neutrino den Spin $^1/_2$ besitzen, können sie in zwei verschiedenen Spinzuständen emittiert werden: im Singulett- und Triplettzustand. Daher kann der Gesamtdrehimpuls, der von Elektron und Neutrino fortgetragen wird, nur Null oder Eins sein.

Wir betrachten die Matrixelemente, die sich auf die Nukleonenwellenfunktion beziehen. Die Matrixelemente, die die skalare (6.1.4a) und die vektorielle (6.1.4b) Wechselwirkung enthalten, werden wir kurz durch die Symbole $\int \beta$ und $\int 1$ bezeichnen. Sie entsprechen Kernübergängen ohne Änderung der Parität und des Drehimpulses. Solche Übergänge werden daher durch die Emission von Elektronen und Neutrinos mit antiparallelen Spins und mit dem Bahndrehimpuls Null begleitet. Die Auswahlregel: $\Delta J = 0$ und „Parität ändert sich nicht" (für den Fall der skalaren oder vektoriellen Wechselwirkung), wird als FERMI-*Auswahlregel* bezeichnet.

Die Matrixelemente mit den Kernwellenfunktionen bei der tensoriellen und der pseudovektoriellen Wechselwirkung bezeichnen wir kurz durch die Symbole $\int \beta \vec{\sigma}$ und $\int \vec{\sigma}$. Diese Matrixelemente führen zu Kernübergängen ohne Änderung der Parität, aber mit Änderung des Drehimpulses: $\Delta J = \pm 1$ oder 0 (unter Ausschluß der 0-0-Übergänge). Die Auswahlregel, die der tensoriellen und pseudovektoriellen Wechselwirkung entspricht, heißt GAMOW-TELLER*sche Auswahlregel*. In diesem Fall werden Elektron und Neutrino mit parallelem Spin emittiert.

Beim β-Zerfall verteilt sich die Zerfallsenergie auf 3 Teilchen: das Elektron, das Neutrino und den Kern. Infolge der großen Kernmasse ist die vom Kern aufgenommene Energie (Rückstoßenergie) sehr klein. Aus diesem Grund kann man angenähert annehmen, daß sich die Energie E des Übergangs nur auf Elektron und Neutrino verteilt:

$$E = \varepsilon + \varepsilon_\nu . \tag{6.2.1}$$

Zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit für den Kernübergang mit gleichzeitiger Emission von Elektron und Neutrino muß die Zahl der möglichen Endzustände, die der Emission eines Elektrons mit dem Impuls p_e im Impulsintervall dp_e in das Raumwinkelintervall $d\Omega_e$ und der Emission eines Neutrinos in den Raumwinkel $d\Omega_\nu$ unter der Bedingung des Energieerhaltungssatzes (6.2.1) entspricht, berechnet werden. Nach der grundlegenden Annahme von FERMI über die statistische Verteilung der Energie zwischen Neutrino und Elektron und unter Berücksichtigung dessen, daß $\varepsilon_\nu = c\, p_\nu$ gilt, wenn die Masse des Neutrinos gleich Null gesetzt wird, läßt sich für die Zahl der möglichen Endzustände schreiben

$$\varrho(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{d\Omega_e d\Omega_\nu p_e^2 dp_e \int \delta(E - \varepsilon - c\, p_\nu)\, p_\nu^2\, dp_\nu}{(2\pi\hbar)^6} = \frac{p_e^2\, dp_e (E-\varepsilon)^2}{(2\pi\hbar)^6 c^3}\, d\Omega_e\, d\Omega_\nu .$$

Beachtet man noch die Beziehung $p_e\, dp_e = \frac{\varepsilon\, d\varepsilon}{c^2}$, so gilt schließlich

$$\varrho(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{(E-\varepsilon)^2 p_e\, \varepsilon\, d\varepsilon\, d\Omega_e\, d\Omega_\nu}{(2\pi\hbar)^6 c^5} . \tag{6.2.2}$$

Mit Hilfe von (6.1.1) bis (6.1.4) und (6.2.2) erhält man nach der Integration über alle Emissionsrichtungen von Elektron und Neutrino und Summation über alle ihre Polarisationszustände die Wahrscheinlichkeit für die Emission des Elektrons im Energieintervall ε, $\varepsilon + d\varepsilon$ bei einem erlaubten Übergang:

$$dP(\varepsilon) = g^2 F(Z, \varepsilon) \sum_i C_i^2 |M_i|^2 \left(1 + \frac{A\,m\,c^2}{\varepsilon}\right) \frac{(E-\varepsilon)^2 \varepsilon\, p_e\, d\varepsilon}{2\pi^3 \hbar^7 c^5}; \qquad (6.2.3)$$

dabei bedeuten

$$p_e = \frac{1}{c}\sqrt{\varepsilon^2 - m^2 c^4}$$

und

$$A = 2\left[1 - \left(\frac{e^2 Z}{\hbar c}\right)^2\right]^{1/2} \frac{C_S C_V \left|\int 1\right|^2 + C_T C_A \left|\int \vec{\sigma}\right|^2}{(C_S^2 + C_V^2)\left|\int 1\right|^2 + (C_T^2 + C_A^2)\left|\int \vec{\sigma}\right|^2}. \qquad (6.2.3\text{a})$$

In nichtrelativistischer Näherung gilt für den Mittelwert des Operators $\beta\sqrt{1-(v/c)^2} \approx 1$; daher setzt man bei der Berechnung von (6.2.3)

$$|M_S|^2 \equiv \left|\int \beta\right|^2 = |M_V|^2 \equiv \left|\int 1\right|^2,$$

$$|M_T|^2 \equiv \left|\int \beta\vec{\sigma}\right|^2 = |M_A|^2 \equiv \left|\int \vec{\sigma}\right|^2.$$

Die Funktion $F(Z, \varepsilon)$ in (6.2.3) berücksichtigt die Korrektion bezüglich der COULOMB-Wechselwirkung zwischen Elektron und Kern. Sie ist Eins für kleine Ordnungszahlen und große Elektronenenergien, da sich in diesem Fall die Wellenfunktion des Elektrons von einer ebenen Welle kaum unterscheidet. Mit guter Genauigkeit [6,5] kann man $F(Z, \varepsilon)$ gleich dem Quadrat des Betrags der Elektronenwellenfunktion (bzw. der Positronenwellenfunktion) im COULOMB-Feld des Kerns setzen, wenn diese im Unendlichen auf Eins normiert ist. Dann gilt

$$F(Z, \varepsilon) = \frac{2(1+\delta)}{[(2\delta)!]^2}\left(\frac{2kR}{c}\right)^{2\delta-2} e^{\pi\eta}\,|(\delta - 1 + i\eta)!|^2$$

mit $\delta = \sqrt{1 - \left(\frac{Z e^2}{\hbar c}\right)^2}$ und $\eta = \frac{Z e^2}{\hbar v}$ für das Elektron, $\eta = -\frac{Z e^2}{\hbar v}$ für das Positron. Z bedeutet die Ordnungszahl des Endkerns, R den Radius des Kerns, k die Wellenzahl des Elektrons.

Der Ausdruck (6.2.3) bestimmt die Energieverteilung (Form des β-Spektrums) der emittierten Elektronen. Meist bestimmt man bei der Interpretation der experimentellen Werte die Energieabhängigkeit des folgenden Ausdrucks, den man aus (6.2.3) erhalten kann:

$$\sqrt{\frac{dP(\varepsilon)}{p_e F(Z, \varepsilon)\,\varepsilon\, d\varepsilon}} = a(E - \varepsilon)\sqrt{1 + \frac{A\,m\,c^2}{\varepsilon}} \qquad (6.2.4)$$

mit

$$a = \left(\frac{g^2 \sum_i C_i^2 |M_i|^2}{2\pi^3 \hbar^7 c^5}\right)^{1/2}.$$

Die Kurve, die die Abhängigkeit der linken Seite der Gl. (6.2.4) von der Elektronenenergie darstellt, wird als FERMI-*Plot* oder KURIE-*Plot* bezeichnet.

Das FERMI-Plot, das man aus den experimentellen Werten für erlaubte Übergänge [6,6] erhält, ergibt eine Gerade, d. h., daß in (6.2.4) $A = 0$ zu setzen ist. Mit anderen Worten, um eine Übereinstimmung mit den experimentellen Werten zu erreichen, muß angenommen werden

$$C_S\, C_V = C_T\, C_A = 0. \tag{6.2.5}$$

Die Gl. (6.2.5) zeigt, daß Interferenzeffekte (FIERZ-Glieder [6,7]) zwischen den einzelnen Arten der Wechselwirkung, die sich auf gleiche Nukleonenmatrixelemente beziehen, nicht vorhanden sind. Interferenzeffekte zwischen den Wechselwirkungen, die sich auf die verschiedenen Matrixelemente $\int 1$ und $\int \vec{\sigma}$ beziehen, sind deshalb nicht vorhanden, weil der Mittelwert des Produkts aus den Matrixelementen $\left\langle \int 1 \int \vec{\sigma} \right\rangle$ gleich Null ist.

Um die Bedingung (6.2.5) erfüllen zu können, muß der bei $\left| \int 1 \right|^2$ stehende Koeffizient C_S oder C_V gleich Null sein. Beim Matrixelement $\left| \int \vec{\sigma} \right|^2$ muß entweder der Koeffizient C_T oder C_A verschwinden. Die genauesten Werte erhält man jedoch für GAMOW-TELLER-Übergänge, bei denen das Matrixelement $\int 1$ gleich Null ist. Damit folgt für diese Übergänge aus der Beziehung $A = 0$, daß $C_T C_A$ gleich Null sein muß. Die Energieverteilungen der Elektronen in 0-0-Übergängen, die den FERMI-Auswahlregeln unterworfen sind, sind bisher nur sehr wenig bekannt. Daher mußte man für die Abschätzung des Produkts $C_V\, C_S$ Werte für die mittleren Übergangszeiten benutzen. Mit Hilfe solcher Werte zeigten GERHART und SHERR [6,8; 6,9], daß

$$\frac{C_S\, C_V}{C_S^2 + C_V^2} = 0{,}00 \pm 0{,}15$$

gilt. Im weiteren nehmen wir die Beziehungen (6.2.5) als richtig an.

6.3. Bestimmung der Wechselwirkungskonstanten beim β-Zerfall. Erlaubte Übergänge

In der Theorie des β-Zerfalls wird angenommen, daß die Konstanten C_S, C_V, C_T und C_A für alle Kerne gleich sind, da sie die Wechselwirkung von Nukleonen mit dem Elektron-Neutrino-Feld charakterisieren. Die individuellen Besonderheiten der Kerne zeigen sich in den Werten der Matrixelemente

$$M_V \equiv \int 1, \quad M_S \equiv \int \beta, \quad M_T \equiv \int \beta \vec{\sigma} \quad \text{und} \quad M_A \equiv \int \vec{\sigma}.$$

Man kann also die Konstanten C_i durch Untersuchung einzelner Beispiele von β-Zerfällen bestimmen. Im Abschn. 6.2. wurde bereits erwähnt, daß die Untersuchung der Form erlaubter β-Spektren zu der Schlußfolgerung führt, daß die Bedingungen

$$C_S\, C_V = C_T\, C_A = 0 \tag{6.3.1}$$

erfüllt sein müssen. Dies ist der Fall, wenn 2 der 4 Konstanten verschwinden. Um zu klären, welche Konstanten C_i gleich Null sind, können Angaben

über die Winkelkorrelationen zwischen den Emissionsrichtungen von Elektron und Neutrino beim β-Zerfall benutzt werden.

Führt man die Integration über alle Flugrichtungen von Elektronen und Neutrinos nicht aus, so enthält die Wahrscheinlichkeit für den β-Zerfall die Quadrate der Matrixelemente von den Wellenfunktionen der leichten Teilchen. Im Anhang 3.2. wird gezeigt, daß die Matrixelemente der erlaubten β-Übergänge nach Mittelung über alle Spinzustände der leichten Teilchen entsprechend lauten:

$$2\langle|(\psi_e^+ \beta \psi_\nu)|^2\rangle_{\mathrm{Spin}} = 1 - \frac{v}{c}\cos\vartheta, \qquad (S)$$

$$2\langle|(\psi_e^+ \psi_\nu)|^2\rangle_{\mathrm{Spin}} = 1 + \frac{v}{c}\cos\vartheta, \qquad (V)$$

$$2\langle|(\psi_e^+ \beta \vec{\sigma} \psi_\nu)|^2\rangle_{\mathrm{Spin}} = 1 + \frac{v}{3c}\cos\vartheta, \qquad (T)$$

$$2\langle|(\psi_e^+ \vec{\sigma} \psi_\nu)|^2\rangle_{\mathrm{Spin}} = 1 - \frac{v}{3c}\cos\vartheta. \qquad (A)$$

Berücksichtigt man diese Resultate, so wird die Wahrscheinlichkeit für den β-Zerfall bei Emission eines Elektrons und eines Neutrinos, deren Richtungen untereinander den Winkel ϑ bilden, proportional

$$1 + \alpha\frac{v}{c}\cos\vartheta \qquad (6.3.2)$$

mit

$$\alpha = \frac{(C_V^2 - C_S^2)\left|\int 1\right|^2 + \frac{1}{3}(C_T^2 - C_A^2)\left|\int\vec{\sigma}\right|^2}{(C_V^2 + C_S^2)\left|\int 1\right|^2 + (C_T^2 + C_A^2)\left|\int\vec{\sigma}\right|^2}. \qquad (6.3.3)$$

Aus (6.3.2) folgt, daß bei Mittelung über alle Flugrichtungen des Neutrinos die Anisotropie in der Verteilung der Flugrichtungen der Elektronen verschwindet. Fixiert man also nicht die Rückstoßrichtung des Kerns, die mit der Flugrichtung von Elektron und Neutrino verknüpft ist, so wird die Winkelverteilung der Elektronen bei erlaubten β-Übergängen isotrop. Ist α positiv, so folgt aus (6.3.2), daß Elektron und Neutrino hauptsächlich in der gleichen Richtung emittiert werden. Ist dagegen α negativ, so werden Elektron und Neutrino bevorzugt in entgegengesetzten Richtungen emittiert. Die Winkelkorrelation zwischen der Flugrichtung von Elektron und Neutrino ist dem Produkt aus der Größe α und dem Verhältnis der Elektronengeschwindigkeit zur Lichtgeschwindigkeit proportional. Daher wird die Winkelkorrelation bei Verkleinerung der Elektronengeschwindigkeit Null.

Die Winkelkorrelation zwischen der Flugrichtung von Elektron und Neutrino wird durch Messung der Flugrichtung des Elektrons und des Kernimpulses, der beim Zerfall auftritt, bestimmt. Durch solche Messungen für den β-Zerfall des ^{6}He zeigten RUSTAD und RUBY [6,10], daß der Wert des Koeffizienten für die Winkelkorrelation innerhalb der Grenzen $0{,}325 < \alpha < 0{,}340$ liegt. Der β-Zerfall des ^{6}He ($^6\mathrm{He} \to {}^6\mathrm{Li} + e + \tilde{\nu}$) gehört zum erlaubten Typ

und entspricht einem Übergang von $J = 1$ zu $J = 0$ ohne Änderung der Parität [6,11]. Daher gilt für diesen Übergang $\left|\int 1\right|^2 = 0$, und nach (6.3.3) muß der Koeffizient der Winkelkorrelation $\pm 1/3$ sein. Das Pluszeichen bezieht sich auf den Fall $C_A = 0$, das Minuszeichen auf den Fall $C_T = 0$. Der oben angeführte experimentelle Wert für α zeigt, daß der Fall $C_A = 0$ realisiert ist. Mit anderen Worten, die Wechselwirkung des Nukleons mit dem Elektron-Neutrino-Feld, die zu den Gamow-Teller-Auswahlregeln führt, ist eine rein tensorielle Wechselwirkung. In der letzten Zeit tauchten jedoch Zweifel an dem experimentellen Wert von α für den β-Zerfall des ^{6}He auf. Daher darf man die Schlußfolgerung $C_A = 0$ noch nicht als endgültig ansehen, um so mehr, als es experimentelle Hinweise für die Möglichkeit $C_T = 0$ gibt.

Die Winkelkorrelation zwischen der Elektronen- und Neutrinorichtung wurde auch bei der Untersuchung des β-Zerfalls vom ^{19}Ne gemessen. Dabei erhielten die verschiedenen Autoren folgende Ergebnisse:

$\alpha = -0{,}8 \pm 0{,}4$ (Alford und Hamilton [6,12]),

$\alpha = 0{,}21 \pm 0{,}08$ (Maxson, Allen und Jentschke [6,13]),

$\alpha = -0{,}15 \pm 0{,}2$ (Alford und Hamilton [6,14]),

$\alpha = 0{,}14 \pm 0{,}13$ (Good und Lauer [6,15]).

Der β-Zerfall von ^{19}Ne entspricht einem Übergang $1/2 \to 1/2$; daher können beide Matrixelemente $\int 1$ und $\int \vec{\sigma}$ von Null verschieden sein. Führt man die Bezeichnung $\chi = \dfrac{\left|\int 1\right|^2}{\left|\int \vec{\sigma}\right|^2}$ ein, so erhält man aus (6.3.3)

$$\alpha = \frac{\frac{1}{3} C_T^2 + \chi(C_V^2 - C_S^2)}{C_T^2 + \chi(C_V^2 + C_S^2)} \quad \text{für} \quad C_A = 0,$$

$$\alpha = \frac{-\frac{1}{3} C_A^2 + \chi(C_V^2 - C_S^2)}{C_A^2 + \chi(C_V^2 + C_S^2)} \quad \text{für} \quad C_T = 0.$$

In Abhängigkeit von χ muß also der Koeffizient α in folgende Grenzen eingeschlossen sein:

$$-1 \leqq \alpha \leqq \frac{1}{3} \quad \text{für} \quad C_A = C_V = 0, \tag{A}$$

$$\frac{1}{3} \leqq \alpha \leqq 1 \quad \text{für} \quad C_A = C_S = 0, \tag{B}$$

$$-\frac{1}{3} \leqq \alpha \leqq 1 \quad \text{für} \quad C_T = C_S = 0, \tag{C}$$

$$-1 \leqq \alpha \leqq -\frac{1}{3} \quad \text{für} \quad C_T = C_V = 0. \tag{D}$$

Die angeführten experimentellen Werte von α für den β-Zerfall des ^{19}Ne schließen nur den Fall $C_A = C_S = 0$ aus. Setzt man, wie das früher meist getan wurde, auf Grund der Experimente am ^{6}He $C_A = 0$, so muß auch $C_V = 0$ gesetzt werden. Es wurde also angenommen, daß der β-Zerfall nur durch skalare und tensorielle Wechselwirkung bedingt ist.

Um zu klären, welche der Konstanten C_S oder C_V verschwindet, könnte man β-Zerfälle benutzen, die nur nach den FERMIschen Auswahlregeln erfolgen, da diese die Konstanten C_T und C_A nicht enthalten. Erlaubte β-Übergänge, die nur den FERMIschen Auswahlregeln genügen, müssen bei 0-0-Übergängen ohne Änderung der Parität auftreten. Zu diesen Übergängen gehören der Positronenzerfall des ^{14}O in den angeregten Zustand ^{14}N (2,3 MeV) [6,16; 6,17] und die 3 Positronenzerfälle [6,18]

$$^{10}C \to {}^{10}B + \tilde{e} + \nu,$$
$$^{34}Cl \to {}^{34}S + \tilde{e} + \nu,$$
$$^{26}Al \to {}^{26}Mg + \tilde{e} + \nu.$$

Leider sind in allen diesen Fällen die Messungen der Winkelkorrelation zwischen den emittierten leichten Teilchen wesentlich komplizierter als für den β-Zerfall der Edelgase ^6He und ^{19}Ne. Aus diesem Grund sind auch die entsprechenden Messungen noch nicht durchgeführt worden.

Auf Grund der vorhandenen experimentellen Werte über die Winkelkorrelation läßt sich keine eindeutige Aussage über den Wert der Konstanten C_S, C_V, C_T und C_A machen. Bisher nahm man an, daß $C_A = C_V = 0$ ist. In diesem Fall wird die Emissionswahrscheinlichkeit für ein Elektron mit der Energie ε im Energieintervall $d\varepsilon$ durch folgende Formel gegeben:

$$dP(\varepsilon) = g_S^2 F(Z, \varepsilon)\left(\left|\int 1\right|^2 + R\left|\int \vec{\sigma}\right|^2\right)\frac{(E-\varepsilon)\,\varepsilon(\varepsilon^2 - m^2c^4)^{1/2}}{2\pi^3\hbar^7c^6}\,d\varepsilon; \tag{6.3.4}$$

dabei sind $R = C_T^2/C_S^2$ und $g_S = g\,C_S$.

Ist dagegen $C_S = C_T = 0$,[1]) so muß man in (6.3.4) g_S durch $g_V = g\,C_V$ ersetzen und gleichzeitig $R = C_A^2/C_V^2$ annehmen.

Integriert man (6.3.4) über alle Energien des emittierten Elektrons, so findet man die totale Wahrscheinlichkeit für den β-Zerfall und damit auch die Halbwertzeit τ:

$$P(E) = \frac{\ln 2}{\tau} = \frac{m^5c^4g_S^2}{2\pi^3\hbar^7}\left(\left|\int 1\right|^2 + R\left|\int \vec{\sigma}\right|^2\right)f(Z, E) \tag{6.3.5}$$

mit

$$f(Z, E) = (m c^2)^{-5}\int_{mc^2}^{E} F(Z, \varepsilon)\,(E-\varepsilon)^2\,(\varepsilon^2 - m^2c^4)^{1/2}\,\varepsilon\,d\varepsilon \tag{6.3.5a}$$

als sogenannter dimensionsloser FERMI-Funktion, die von der Ordnungszahl des Kerns und von der Maximalenergie des emittierten Elektrons abhängt.

Die Halbwertzeit für erlaubte β-Übergänge hängt sehr stark von der Übergangsenergie E ab. Bei kleinen Kernladungen gilt $f(Z, E) \sim E^7$, wenn $E > 5mc^2$ ist. Daher verändert sich die Lebensdauer für erlaubte Übergänge in einem sehr breiten Intervall und kann nicht als direkte Charakteristik für erlaubte Übergänge gelten. Eine charakteristischere Größe, die

---

[1]) Nach den neuesten Untersuchungen sind diese Werte sehr wahrscheinlich. SOSNOWSKI, SPIWAK und DOBRYNIN konnten zeigen, daß die vektorielle und pseudovektorielle Wechselwirkung mit verschiedenen Vorzeichen in Gl. (6.1.2) eingehen und dabei $C_A = -(1{,}25 \pm 0{,}04)\,C_V$ ist.

die Eigenschaften der β-Übergänge bestimmt, ist durch das Produkt $\tau f(Z, E)$ gegeben. Aus (6.3.5) folgt

$$\tau f(Z, E) = \frac{D}{\left(\left|\int 1\right|^2 + R\left|\int \vec{\sigma}\right|^2\right)}, \tag{6.3.6}$$

wobei D eine universelle Konstante ist, die von der Kopplungskonstanten $C_S^2 g^2 = g_S^2$ abhängt und die Dimension einer Zeit hat:

$$D = \frac{2\pi^3 \hbar^7 \ln 2}{m^5 c^4 g_S^2}. \tag{6.3.7}$$

Zur Bestimmung des Zahlenwerts der Konstanten D benutzt man den β-Zerfall ohne Änderung des Spins und der Parität ($0^+ \to 0^+$). In diesem Fall ist nur das Matrixelement $\int 1$ für den Übergang verantwortlich, und es gilt $D = \tau f \left|\int 1\right|^2$. Mißt man die Halbwertzeit und die Maximalenergie der Elektronen, so kann man D durch Abschätzung des Ausdrucks $\left|\int 1\right|^2$ berechnen. Solche Messungen wurden von GERHART [6,17] für die β-Übergänge $0^+ \to 0^+$, wie z. B. den β-Zerfall $^{14}O \to {}^{14}N^*$, durchgeführt. Mit der Annahme $\left|\int 1\right|^2 = 2$ (s. unten) ergab sich $D = 6550 \pm 150$ s. Damit folgt aus (6.3.7)

$$g_S = (1{,}374 \pm 0{,}016) \cdot 10^{-49} \text{ erg cm}^3.$$

Aus (6.3.6) folgt, daß das Produkt aus der Halbwertzeit und der dimensionslosen FERMI-Funktion, die von der Maximalenergie der Elektronen abhängt, für alle erlaubten β-Übergänge konstant sein muß [mit einer Genauigkeit bis zur Konstanz von $\left(\left|\int 1\right|^2 + R\left|\int \vec{\sigma}\right|^2\right)$]. Das Experiment bestätigt dies, und zwar unabhängig davon, daß sich in einzelnen Fällen die Halbwertzeit τ und $f(Z, E)$ bei erlaubten Übergängen um Faktoren bis zu 10^9 unterscheiden können.

Der Wert der Kernmatrixelemente, die in (6.3.6) eingehen, hängt von den Wellenfunktionen der Nukleonen im Kern ab und kann nur für einige leichte Kerne berechnet werden. Zum Beispiel läßt sich das Matrixelement $\left|\int 1\right|^2$ für β-Zerfälle berechnen, die durch den Übergang eines aus einem Paar von Spiegelkernen stammenden Kerns in den anderen entstehen, wenn man die Vorstellungen über die Ladungsunabhängigkeit der Kernkräfte benutzt.

Die in die Kernmatrixelemente beim β-Zerfall eingehenden Operatoren ($\psi_p^+ \hat{O}_i \psi_n$) „verwandeln" ein Neutron in ein Proton. Mit anderen Worten, sie verändern den Wert der dritten Komponente des Isospins T_3 bei gleichzeitiger Erhaltung des totalen Isospins. Aus der Erhaltung des totalen Isospins T bei Übergängen mit dem Matrixelement $\int 1$ folgt die Gleichheit (mit einer Genauigkeit bis auf COULOMB-Korrektionen) der Wellenfunktionen von Anfangs- und Endkern. In diesem Fall gilt nach WIGNER [6,19]

$$\left|\int 1\right|^2 = T(T+1) - T_3^a T_3^e,$$

wobei T_3^a und T_3^e die Projektionen des Isospins für Anfangs- und Endkern bedeuten. Zum Beispiel erhält man für $T = 1/2$, $T_3^a = \pm 1/2$, $T_3^e = \pm 1/2$

$\left|\int 1\right|^2 = 1$ und für $T = 1$, $T_3^a = \pm 1$, $T_3^e = 0$ $\left|\int 1\right|^2 = 2$. Insbesondere entspricht beim β-Zerfall $^{14}O \to {}^{14}N^*$ ($T = 1$) der Übergang $T_3 = -1 \to T_3 = 0$, und es gilt $\left|\int 1\right|^2 = 2$, wie es bereits bei der Berechnung von D berücksichtigt wurde.

Die Berechnung des Matrixelementes $\left|\int \vec{\sigma}\right|^2$ wird meist mit Hilfe des Schalenmodells vorgenommen. Seine Abschätzung ist im Falle des Neutronenzerfalls am genauesten: $\left|\int \vec{\sigma}\right|^2 = 3$. Berücksichtigt man weiter, daß für ein Neutron $\left|\int 1\right|^2 = 1$ gilt und $\tau f = 1260 \pm 200$ [6,20][1]) ist, so läßt sich eine Abschätzung für R erhalten: $R = 1{,}37 \pm 0{,}40$. Man kann also bis auf das Vorzeichen auch die zweite Konstante des β-Zerfalls bestimmen: $g_T = \pm \sqrt{R g_S^2}$. Eine Abschätzung von $\left|\int \vec{\sigma}\right|^2$ kann auch für Übergänge zwischen den Grundzuständen von Spiegelkernen mit einem überschüssigen Nukleon über einer abgeschlossenen Schale oder mit einem Loch in einer abgeschlossenen Schale vorgenommen werden. Diese Übergänge kann man in guter Näherung als Einzelteilchenübergänge betrachten. Benutzt man die Abschätzung für $\left|\int \vec{\sigma}\right|^2$ in der Einzelteilchennäherung, so läßt sich, wie FINKELSTEIN und MOSZKOWSKI [6,21] zeigten, R bestimmen. Diese Autoren bestimmten R für einige β-Übergänge mit sehr gut bekannten $f\tau$-Werten ($^3H \to {}^3He$, $^{15}O \to {}^{15}N$, $^{17}F \to {}^{17}O$). Eine ähnliche Analyse für die möglichen Werte von R wurde durch SMORODINSKI [6,22] vorgenommen. Er kam zu dem Schluß, daß für R der Wert 1,7 angenommen werden kann. Unter Benutzung dieses Wertes, der Bedingung $C_S^2 + C_T^2 = C_S^2(1 + R) = 1$ und des Wertes $g_S = C_S\, g = 1{,}374 \cdot 10^{-49}$ erg cm^3 läßt sich die Konstante des β-Zerfalls zu $g = 2{,}26 \cdot 10^{-49}$ erg cm^3 bestimmen.

Eine Zusammenstellung der $f\tau$-Werte für verschiedene β-Zerfälle ist in der Arbeit [6,23] angeführt. Den kleinsten $f\tau$-Wert besitzt eine Gruppe leichter Kerne ($A < 43$), in der der Übergang zwischen den Grundzuständen von Spiegelkernen vor sich geht. In der Tab. 23 sind einige β-Übergänge angeführt, für die die Werte $\lg f\tau$ in den Grenzen von 2,9 $\cdots$ 3,7 eingeschlossen sind.

Tabelle 23

$f\tau$-Werte für supererlaubte β-Übergänge

β-Übergang	Kernzustände	$\lg f\tau$
$n \to {}^1H$	$s_{1/2} \to s_{1/2}$	3,1
$^3H \to {}^3He$	$s_{1/2} \to s_{1/2}$	3,05
$^7Be \to {}^7Li$	$p_{3/2} \to p_{3/2}$	3,36
$^{13}N \to {}^{13}C$	$p_{1/2} \to p_{1/2}$	3,67
$^6He \to {}^6Li$	$^1S_0 \to {}^1S_0$	2,92
$^{18}F \to {}^{18}O$	$^3S_1 \to {}^3S_1$	3,57
$^{19}Ne \to {}^{19}F$	$(d_{5/2})^3 \to (d_{5/2})^3$	3,29
$^{11}C \to {}^{11}B$	$p_{3/2} \to p_{3/2}$	3,09

[1]) In der letzten Zeit wurde die Lebensdauer des Neutrons von SOSNOWSKI, SPIWAK und DOBRYNIN genauer gemessen. Sie fanden $f\tau = 1170 \pm 35$. Dann wird $R = 1{,}55 \pm 0{,}08$.

β-Übergänge mit solchen Werten von $\lg f\tau$ werden als *erleichterte* oder *supererlaubte β-Übergänge* bezeichnet.

Offensichtlich besitzen die Kernmatrixelemente für den Fall erleichterter Übergänge den größten Wert, da die Wellenfunktionen von Mutter- und Tochterkern für Zustände aus einem Ladungsmultiplett fast gleich sind.

Als *normalerlaubte Übergänge* bezeichnet man Übergänge, die den GAMOW-TELLER-Auswahlregeln oder der FERMI-Auswahlregel genügen und für die $\lg f\tau$ zwischen 4,1 und 5,8 liegt. In der Tab. 24 sind Werte von $\lg f\tau$ für einige normalerlaubte β-Übergänge zusammengestellt.

Tabelle 24

$\lg f\tau$-Werte für einige normalerlaubte β-Übergänge

β-Übergang	Kernzustände	$\lg f\tau$
$^{12}N \to {}^{12}C$	$p_{1/2} \to p_{3/2}$	4,1
$^{23}Ne \to {}^{23}Na$	$d_{5/2} \to D_{3/2}$	5,09
$^{69}Zn \to {}^{69}Ga$	$p_{1/2} \to p_{3/2}$	4,37
$^{81}Se \to {}^{81}Br$	$p_{1/2} \to p_{3/2}$	4,72
$^{127}Te \to {}^{127}In$	$d_{3/2} \to d_{5/2}$	5,66
$^{121}Sn \to {}^{121}Sb$	$d_{3/2} \to d_{5/2}$	5,00

Das Schalenmodell des Kerns ist für die Klassifizierung von β-Übergängen sehr günstig. Mit seiner Hilfe lassen sich nämlich in einigen Fällen aus den Kernspins die Parität und die Konfiguration der entsprechenden Zustände feststellen. Um jedoch quantitative Werte zu erhalten, ist eine detailliertere Theorie notwendig. Das Schalenmodell kann z. B. den Unterschied der $f\tau$-Werte für erleichterte ($f\tau \approx 2 \cdot 10^3$) und für normale ($f\tau \approx 10^5$) β-Übergänge nicht erklären. Zur Erläuterung dieser Schwierigkeit betrachten wir zwei β-Übergänge zwischen gleichen Nukleonenzuständen. Dem ersten Übergang $^{19}Ne \to {}^{19}F$ entspricht eine Transformation der äußeren Nukleonenschalen der Art

$$\begin{array}{|c|c|}\hline n & p \\ \hline d_{5/2}^2 & d_{5/2}^1 \\ \hline\end{array} \to \begin{array}{|c|c|}\hline n & p \\ \hline d_{5/2}^1 & d_{5/2}^2 \\ \hline\end{array}. \qquad \text{(I)}$$

Dem zweiten Übergang $^{19}O \to {}^{19}F$ entspricht eine Transformation der äußeren Schalen

$$\begin{array}{|c|c|}\hline n & p \\ \hline d_{5/2}^0 & d_{5/2}^3 \\ \hline\end{array} \to \begin{array}{|c|c|}\hline n & p \\ \hline d_{5/2}^1 & d_{5/2}^2 \\ \hline\end{array}. \qquad \text{(II)}$$

Vom Standpunkt des Schalenmodells können sich die Matrixelemente der Übergänge (I) und (II) nicht wesentlich voneinander unterscheiden. Experimentell zeigt sich jedoch, daß $f\tau$ beim Übergang $^{19}Ne \to {}^{19}F$ gleich $10^{3,29}$,

beim Übergang $^{19}O \rightarrow {}^{19}F$ aber etwa gleich $10^{5,57}$ ist. Offensichtlich werden beim zweiten Übergang alle Nukleonenzustände wesentlich stärker verändert.

Zum dritten Typ von erlaubten Übergängen gehören schließlich Übergänge, die den Auswahlregeln $\Delta J = 0, \pm 1$ bei unveränderter Parität genügen und die ebenso wie die erleichterten und die normalen Übergänge die charakteristische Form des Spektrums für erlaubte Übergänge besitzen, deren $\lg f\tau$-Werte jedoch zwischen 6 und 7 liegen. Mit Hilfe des Schalenmodells wurde festgestellt, daß diese Übergänge von einer Änderung des Bahndrehimpulses der Nukleonen begleitet werden. So entspricht z. B. der β-Zerfall $^{14}C \rightarrow {}^{14}N$ einem Übergang $S_0 \rightarrow D_1$, der β-Zerfall des ^{31}Si dem Übergang $d_{3/2} \rightarrow S_{1/2}$, der β-Zerfall des ^{65}Zn dem Übergang $f_{5/2} \rightarrow p_{3/2}$ usw. Solche Übergänge werden als *erschwerte* oder *l-verbotene Übergänge* bezeichnet.

6.4. Verbotene β-Übergänge

Die Matrixelemente $\int 1$ und $\int \vec{\sigma}$, die die Auswahlregeln für erlaubte β-Übergänge liefern, werden Null, wenn die Bedingungen: $\Delta J = 0, \pm 1$, Parität ändert sich nicht, nicht erfüllt sind. In diesem Fall sind Matrixelemente zu berücksichtigen, die von Gliedern höherer Ordnung stammen. Bei der Entwicklung der Wellenfunktionen für die leichten Teilchen in eine Reihe hatten wir diese Glieder zunächst weggelassen. Ebenso sind die Glieder zu berücksichtigen, in die die Geschwindigkeit der Nukleonen eingeht. Die Größenordnung solcher Matrixelemente ist wesentlich kleiner als die der Matrixelemente $\int 1$ und $\int \vec{\sigma}$, wenn diese von Null verschieden sind. Die Übergänge mit $\int 1 = \int \vec{\sigma} = 0$ werden als *verbotene Übergänge* bezeichnet.

Wir nehmen an, daß der β-Zerfall durch das $(n+1)$-te Glied in der Zerlegung der Elektron-Neutrino-Funktion $\exp\{-i(\mathfrak{k} - \mathfrak{q})\,\mathfrak{r}\}$ bestimmt wird. Dann bestimmt sich die Wahrscheinlichkeit des β-Zerfalls aus folgenden Matrixelementen:

$$\alpha_n \equiv \left|\int (\mathfrak{k} - \mathfrak{q})\,\mathfrak{r}\right|^{2n} \quad \text{und} \quad \beta_n \equiv \left|\int \{(\mathfrak{k} - \mathfrak{q})\,\mathfrak{r}\}\,\vec{\sigma}\right|^{2n}.$$

Die β-Übergänge, die den Matrixelementen α_n und β_n entsprechen, werden als *n-fach verbotene Übergänge* bezeichnet. Dem Matrixelement α_n entspricht die skalare und die vektorielle Wechselwirkung mit der Auswahlregel $|\Delta J| \leqq n$ bei Änderung der Parität, wenn n ungerade ist. Dem Matrixelement β_n entspricht die tensorielle und die pseudovektorielle Wechselwirkung mit der Auswahlregel $|\Delta J| \leqq n + 1$ bei Änderung der Parität, wenn n ungerade ist.

β-Übergänge mit der Auswahlregel $|\Delta J| = n + 1$ und Änderung der Parität bei ungeradem n werden als *unique-verbotene Übergänge* bezeichnet. Gegenwärtig ist bekannt, daß viele verbotene Übergänge zu diesem Typ gehören.

Aus der Form des Matrixelements β_n folgt, daß in den Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit von n-fach unique-verbotenen β-Übergängen, gemittelt über alle Elektronen-Neutrino-Emissionsrichtungen, ein „Formfaktor" des Spektrums eingehen muß:

$$S_n(\varepsilon) = \langle |k - q|^{2n} \rangle. \tag{6.4.1}$$

Der Formfaktor $S_n(\varepsilon)$ nimmt für $n = 0, 1, 2$ folgende Werte an: $S_0 = 1$, $S_1 = k^2 + q^2$, $S_2 = k^4 + q^4 + {}^{10}/_3\, k^2 q^2$. Berücksichtigt man den Einfluß des COULOMB-Feldes, so ändert sich der Wert des Formfaktors:

$$S_n(\varepsilon) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(2n+1)!\,(2\nu+1)!}{2^{2\nu}(\nu!)^2\,(2n-2\nu+1)!}\, q^{2(n-\nu)}\, L_\nu(p, \mp Z), \qquad (6.4.1a)$$

wobei $L_\nu(p, \mp Z)$ eine Funktion bedeutet, die den Einfluß des COULOMB-Feldes berücksichtigt [6,24].

Bei Elektronenenergien, die die Bindungsenergie des Elektrons im Atom übersteigen, geht $L_\nu(p, \mp Z) \to p^{2\nu}$, und (6.4.1a) geht in (6.4.1) über.

Die Anwesenheit des Formfaktors $S_n(\varepsilon)$ führt zu einer Form des β-Spektrums für unique-verbotene Übergänge, die sich wesentlich von der für erlaubte Übergänge unterscheidet. Um die Theorie mit dem Experiment vergleichen zu können, wird das FERMI-Plot konstruiert, und zwar unter Berücksichtigung von $S_n(\varepsilon)$. Diese Kurve muß eine Gerade sein:

$$\left\{\frac{dP(\varepsilon)}{d\varepsilon}\left(p_e F(Z, \varepsilon)\, \varepsilon\, S_n(\varepsilon)\right)^{-1}\right\}^{1/2} = a(E - \varepsilon). \qquad (6.4.2)$$

Bei kleinen Elektronenenergien ist in (6.4.2) der Formfaktor nach (6.4.1a) zu wählen, um den Einfluß des COULOMB-Feldes zu berücksichtigen.

Experimentelle Untersuchungen beweisen die Richtigkeit dieser theoretischen Vorstellungen. Zum Beispiel entspricht der β-Zerfall ${}^{91}\mathrm{Y} \to {}^{91}\mathrm{Zr}$ dem Übergang $p_{1/2} \to d_{5/2}$ mit $\Delta J = 2$ und Änderung der Parität. Die Form des Spektrums unterscheidet sich in diesem Fall sehr stark von der bei erlaubten Übergängen. Berücksichtigt man jedoch in (6.4.2) den Formfaktor

$$S_1 = k^2 + q^2 = (\hbar c)^{-2}\left[(E - \varepsilon)^2 + \varepsilon^2 - m^2 c^4\right],$$

so erhält man eine Gerade. Einen ebensolchen Charakter besitzt auch das Spektrum für den Übergang ${}^{137}\mathrm{Cs} \to {}^{137}\mathrm{Ba}$. In den Arbeiten [6,23] wird an Hand des Schalenmodells eine große Anzahl von Übergängen mit $|\Delta J| = 2$ und Änderung der Parität angeführt, die zum Typ der einfach unique-verbotenen Übergänge zu zählen sind. Für diese Übergänge ändert sich der $f\tau$-Wert im Intervall $7{,}3 \leqq \lg f\tau \leqq 10{,}1$, wenn f nach der Formel für erlaubte Übergänge berechnet wird. Die Anwesenheit des Formfaktors $S_n(\varepsilon)$ im Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit von unique-verbotenen β-Übergängen führt dazu, daß nicht — wie im Fall erlaubter Übergänge — $f\tau$ konstant sein muß, sondern $\langle S_n(\varepsilon)\rangle f\tau$. Nach groben Abschätzungen ist dabei [6,24]

$$\langle S_n(\varepsilon)\rangle \approx \left(\frac{E^2 - m^2 c^4}{2}\right)^n.$$

Beim β-Zerfall des ${}^{10}\mathrm{Be}$ wird ein zweifach unique-verbotener Übergang mit $\Delta J = 3$ und $\lg f\tau = 13{,}7$ beobachtet. Berücksichtigt man den Formfaktor $S_2(\varepsilon) = k^4 + q^4 + {}^{10}/_3\, k^2 q^2$, so wird das FERMI-Plot eine Gerade. Dem β-Zerfall des ${}^{40}\mathrm{K}$ entspricht ein dreifach unique-verbotener Übergang mit $\Delta J = -4$ und $\lg f\tau = 17{,}6$. Die Übereinstimmung zwischen der Theorie der unique-verbotenen β-Übergänge und dem Experiment bekräftigt die Richtigkeit der grundlegenden Vorstellungen über den β-Zerfall.

Die Interpretation von verbotenen β-Spektren, die nicht zu den unique-verbotenen Übergängen gehören, bereitet Schwierigkeiten, da bei solchen Übergängen offensichtlich eine Kombination von Wechselwirkungen verschiedener Art (unter Berücksichtigung der relativistischen Matrixelemente) wesentlich ist, die wahrscheinlich von der relativen Größe der Matrixelemente abhängt und sich vorläufig sehr schwer abschätzen läßt. Die einzelnen Komponenten in einer derartigen Kombination entsprechen verschiedenen Formen des Spektrums, wodurch die Interpretation noch komplizierter wird. Eine ausführliche Übersicht über die verbotenen β-Spektren ist von KONOPINSKI [6,24] gegeben worden.

Bisher existieren keine zuverlässigen Angaben, die das Vorhandensein der pseudoskalaren Wechselwirkung bestätigen. Dieser Wechselwirkung entspricht das Matrixelement $\left|\int \gamma_5\right|^2$ mit den Auswahlregeln $\Delta J = 0$ und Änderung der Parität. Verschiedentlich wurde der β-Zerfall des RaE zu diesem Typ gezählt, da man annahm [6,25], daß ein Übergang vom Typ $0^- \to 0^+$ stattfindet. Diese Interpretation erwies sich jedoch als falsch. Es konnte gezeigt werden [6,26], daß beim β-Zerfall des RaE ein Übergang $1^- \to 0^+$ vor sich geht. Ein solcher Übergang gestattet eine Kombination zwischen skalarer und tensorieller Wechselwirkung und führt zu einer guten Übereinstimmung mit dem Experiment.

6.5. Nichterhaltung der Parität bei β-Übergängen

Die Wechselwirkung zwischen verschiedenen Elementarteilchen kann man im wesentlichen in 3 Typen einteilen: starke Wechselwirkungen, schwache Wechselwirkungen und elektromagnetische Wechselwirkungen.

Starke Wechselwirkungen treten zwischen Nukleonen, zwischen Nukleonen und π-Mesonen sowie in Prozessen auf, die zur Erzeugung schwerer (K-) Mesonen und Hyperonen usw. führen. Die starken Wechselwirkungen werden durch eine dimensionslose Wechselwirkungskonstante von der Größenordnung $G^2/\hbar c \approx 14$ charakterisiert. Zu den elektromagnetischen Wechselwirkungen gehören die Wechselwirkungen zwischen elektrischen Ladungen. Solche Wechselwirkungen werden durch eine dimensionslose Wechselwirkungskonstante $e^2/\hbar c \approx {}^1/_{137}$ charakterisiert. Zu den schwachen Wechselwirkungen gehören schließlich die Wechselwirkungen zwischen dem Elektron-Neutrino-Feld und den Nukleonen sowie Wechselwirkungen, die zum Zerfall von μ-, π- und schweren (K-) Mesonen und Hyperonen führen. Schwache Wechselwirkungen werden durch eine dimensionslose Wechselwirkungskonstante der Größenordnung 10^{-12} charakterisiert. Im Falle des β-Zerfalls gilt

$$\frac{G^2}{\hbar c} = \frac{g}{m c^2 \left(\frac{\hbar}{m c}\right)^2} \approx 4{,}77 \cdot 10^{-12}.$$

Starke und elektromagnetische Wechselwirkungen sind invariant bezüglich Zeitumkehr, Rauminversion und Ladungskonjugation.

Nach den Arbeiten von LÜDERS [6,27] und PAULI [6,28] ist jede lokale Wechselwirkung, wenn sie in bezug auf eigentliche LORENTZ-Transformationen invariant ist, auch invariant bezüglich der kombinierten Transformation: Zeitumkehr (T), räumliche Inversion (I) und Ladungskonjugation (C), d. h.

$$T\,I\,C = \text{inv.}$$

Diese Gleichung wird als LÜDERS-PAULI-Theorem bezeichnet. Nach diesem Theorem gilt also: Bei invarianter Wechselwirkung bezüglich der Zeitumkehr T ist die Wechselwirkung auch invariant bezüglich der kombinierten Transformation $I\,C$.

Bisher wurde angenommen, daß die Parität bei allen, also auch bei den schwachen, Wechselwirkungen erhalten bleibt. Im Jahre 1956 tauchten jedoch Zweifel an der Richtigkeit der Paritätserhaltung für schwache Wechselwirkungen auf.

Eine Analyse der Folgerungen aus der Theorie des β-Zerfalls unter der Annahme, daß die Parität bei Wechselwirkungen des Elektron-Neutrino-Feldes mit Nukleonen nicht erhalten bleibt, haben LEE und YANG [6,29] durchgeführt. Sie zeigten, daß die Klassifizierung des β-Zerfalls nach erlaubten und verbotenen Übergängen, die Energieverteilung der Zerfallselektronen (Form des Spektrums) und die Korrelation zwischen Emissionsrichtung von Elektron und Neutrino sowie Elektronen und γ-Quanten nicht von der Erhaltung der Parität abhängig sind.

Wenn die Parität beim β-Zerfall nicht erhalten bleibt, läßt sich die skalare Wechselwirkung bei Emission von einem Elektron und einem Antineutrino in folgender Form schreiben:

$$H_S = g \int (\psi_p^+ \beta\, \psi_n) \{C_S(\psi_e^+ \beta\, \psi_\nu) + C_S'(\psi_e^+ \beta\, \gamma_5\, \psi_\nu)\}\, d\tau. \tag{6.5.1}$$

Entsprechend lautet die tensorielle Wechselwirkung in nichtrelativistischer Näherung

$$H_T = g \int (\psi_d^+ \beta \vec{\sigma} \psi_n) \{C_T(\psi_e^+ \beta \vec{\sigma}\, \psi_\nu) + C_T'(\psi_e^+ \beta\, \vec{\sigma} \gamma_5\, \psi_\nu)\}\, d\tau. \tag{6.5.2}$$

Ähnlich verändern sich auch die anderen Wechselwirkungsarten. Die Quadrate des Betrags der Matrixelemente können keine Interferenzglieder zwischen Teilen mit und ohne Matrix γ_5 enthalten. Daher lautet die Emissionswahrscheinlichkeit für Elektronen mit Energien im Intervall $\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon$ unter dem Winkel ϑ zur Emissionsrichtung des Neutrinos

$$P(\varepsilon)\, d\varepsilon\, d\Omega = g^2 F(Z, \varepsilon) \left(\xi + \frac{\eta\, p_e\, c}{\varepsilon}\right) \frac{(E-\varepsilon)^2\, \varepsilon\, p_e\, d\varepsilon\, d\Omega}{2\pi^3\, \hbar^7\, c^5} \tag{6.5.3}$$

mit

$$\xi = (|C_S|^2 + |C_S'|^2) \left|\int \beta\right|^2 + (|C_T|^2 + |C_T'|^2) \left|\int \vec{\sigma} \beta\right|^2, \tag{6.5.3a}$$

$$\eta = \frac{1}{3} (|C_T|^2 + |C_T'|^2) \left|\int \beta\, \vec{\sigma}\right|^2 - (|C_S|^2 + |C_S'|^2) \left|\int \beta\right|^2, \tag{6.5.3b}$$

$$|C_S|^2 + |C_S'|^2 + |C_T|^2 + |C_T'|^2 = 1. \tag{6.5.3c}$$

Wird der β-Zerfall durch vektorielle und pseudovektorielle Wechselwirkungen hervorgerufen, so nehmen die Größen (6.5.3a) bis (6.5.3c) folgende Werte an:

$$\xi = (|C_V|^2 + |C'_V|^2)\left|\int \beta\right|^2 + (|C_A|^2 + |C'_A|^2)\left|\int \vec{\sigma}\beta\right|^2, \qquad (6.5.3\text{a}')$$

$$\eta = (|C_V|^2 + |C'_V|^2)\left|\int \beta\right|^2 - \frac{1}{3}(|C_A|^2 + |C'_A|^2)\left|\int \vec{\sigma}\beta\right|^2, \qquad (6.5.3\text{b}')$$

$$|C_V|^2 + |C'_V|^2 + |C_A|^2 + |C'_A|^2 = 1. \qquad (6.5.3\text{c}')$$

Aus (6.5.3) folgt, daß Experimente über die Form des β-Spektrums und über die Winkelkorrelationen zwischen Elektronen- und Neutrinoemissionsrichtung nicht klären können, ob eine Wechselwirkung C'_i vorhanden ist oder nicht. Diese Frage kann nur durch Messung von pseudoskalaren Größen geklärt werden. Man muß z. B. den Emissionswinkel des Elektrons bezüglich der Spinrichtung des Kerns

$$\frac{\vec{\sigma}\mathfrak{k}}{|\vec{\sigma}|\,|\mathfrak{k}|}$$

messen.

Ende 1956 zeigten Wu, Ambler, Hayward, Hoppes und Hudson [6,31] experimentell, daß beim β-Zerfall orientierter ^{60}Co-Kerne die Emissionswahrscheinlichkeit der Elektronen von der gegenseitigen Orientierung zwischen Kernspin und Emissionsrichtung der Elektronen abhängt. Eine solche Abhängigkeit ist nur möglich, wenn die Wechselwirkung zwischen dem Elektron-Neutrino-Feld und den Nukleonen gleichzeitig von Null verschiedene C und C' für den entsprechenden Wechselwirkungstyp enthält.

Die Winkelverteilung der Elektronen beim β-Zerfall orientierter Kerne wird nach Lee und Yang [6,29] durch folgende Formel gegeben:¹)

$$W(\vartheta)\,d\Omega = \text{const}\cdot(1 + \alpha\cos\vartheta)\sin\vartheta\,d\vartheta.$$

Für erlaubte β-Übergänge mit $J \to J - 1$ ohne Änderung der Parität ist α durch folgende Formel definiert:²)

$$\alpha = \frac{v}{c}\,\frac{C_T^* C'_T + C_T C'^*_T}{|C_T|^2 + |C'_T|^2}\,\frac{\langle J_z\rangle}{J} \quad \text{für} \quad C_A = 0, \qquad (6.5.4)$$

$$\alpha = -\frac{v}{c}\,\frac{C_A^* C'_A + C_A C'^*_A}{|C_A|^2 + |C'_A|^2}\,\frac{\langle J_z\rangle}{J} \quad \text{für} \quad C_T = 0. \qquad (6.5.5)$$

Dabei bedeuten $\langle J_z\rangle$ den Mittelwert der Spinprojektion des Anfangskerns, v die Elektronengeschwindigkeit und c die Lichtgeschwindigkeit.

---

¹) Eine allgemeine Theorie der Winkelverteilung und der Polarisation von Elektronen (und Positronen) für erlaubte Übergänge beim β-Zerfall orientierter Kerne unter Berücksichtigung der Nichterhaltung der Parität wurde von Schmuschkewitsch [6,47] entwickelt.

²) Hier wird zur Verallgemeinerung zugelassen, daß die Konstanten C_i und C'_i komplexe Zahlen bedeuten. Fordert man Invarianz des Wechselwirkungsoperators bezüglich der Zeitumkehr, so läßt sich zeigen, daß die Konstanten C_i und C'_i (bis auf einen unwesentlichen allgemeinen Phasenfaktor, der auf Eins normiert werden kann) reelle Zahlen sind [6,30].

Für erlaubte Übergänge $J \rightarrow J+1$ ohne Änderung der Parität gilt

$$\alpha = \frac{\langle J_z \rangle}{J} \frac{v}{c} \frac{C_T^* C_T' + C_T C_T'^*}{|C_T|^2 + |C_T'|^2} \quad \text{für} \quad C_A = 0 .$$

Berücksichtigt man, daß aus der Forderung nach Invarianz bezüglich Zeitumkehr für die Koeffizienten C_T folgt $C_T =$ reell, so gilt bei $J \rightarrow J-1$

$$\alpha = \frac{\langle J_z \rangle}{J} \frac{v}{c} \frac{2 C_T C_T'}{C_T^2 + C_T'^2} \quad \text{für} \quad C_A = 0, \tag{6.5.4a}$$

$$\alpha = -\frac{\langle J_z \rangle}{J} \frac{v}{c} \frac{2 C_A C_A'}{C_A^2 + C_A'^2} \quad \text{für} \quad C_T = 0. \tag{6.5.5a}$$

In den Experimenten von Wu u. a. [6,31] wurde die Winkelverteilung der Elektronen beim β-Zerfall orientierter ^{60}Co-Kerne untersucht (die Orientierung der Kerne wurde durch ein Magnetfeld bei niedriger Temperatur vorgenommen). Der β-Zerfall $^{60}\mathrm{Co} \rightarrow {}^{60}\mathrm{Ni}$ entspricht dem Übergang $J = 5^+ \rightarrow J = 4^+$ nach den Gamow-Teller-Auswahlregeln und gehört zum erlaubten Typ. Der Mittelwert von v/c für die emittierten Elektronen betrug 0,6. Der Mittelwert für die Polarisation der Kerne betrug $\langle J_z \rangle / J = 0{,}6$. Daher hat man nach (6.5.4a) bei $|C_T| = |C_T'|$ zu erwarten, daß $|\alpha| = 0{,}36$ ist.

Experimentell fand man, daß die Elektronen hauptsächlich in einer Richtung entgegengesetzt zur Spinorientierung emittiert wurden. Dabei ergab sich $\alpha = -0{,}4$. Die Versuche über den β-Zerfall des ^{60}Co bestätigten also die Nichterhaltung der Parität beim β-Zerfall und zeigten, daß in den experimentellen Fehlergrenzen $C_T' = -C_T$ bei $C_A = 0$ oder $C_A = C_A'$ bei $C_T = 0$ zu setzen ist.

Man könnte annehmen, daß die Nichterhaltung der Parität mit einer Asymmetrie des Raumes bezüglich der räumlichen Inversion verknüpft ist. Wie jedoch Landau [6,32] zeigte, braucht die Nichterhaltung der Parität beim β-Zerfall die Symmetrie des Raumes nicht zu berühren, wenn man nämlich annimmt, daß bei schwachen Wechselwirkungen das Gesetz von der Erhaltung der Parität und die Invarianz bezüglich Ladungskonjugation nicht einzeln erfüllt sind.

Wenn auch bei starken und elektromagnetischen Wechselwirkungen jedes dieser Gesetze einzeln erfüllt ist, so ist bei schwachen Wechselwirkungen Invarianz nur bezüglich des Produktes beider Operationen vorhanden. Das Produkt aus räumlicher Inversion und Ladungskonjugation wurde von Landau als „*kombinierte Inversion*“ (kombinierte Parität) bezeichnet. Bei der kombinierten Inversion geht die Spiegelung der räumlichen Koordinaten gleichzeitig mit einem Übergang von Teilchen in Antiteilchen vor sich. Die Invarianz schwacher Wechselwirkungen bezüglich der kombinierten Inversion erhält die Symmetrie des Raumes vollständig, asymmetrisch werden die Ladungen der Teilchen.

Teilchen, die mit ihren Antiteilchen identisch sind (d. h. wirklich neutrale Teilchen), gehen bei der kombinierten Inversion in sich selbst über. Aus diesem Grund fällt für solche Teilchen die kombinierte Inversion mit der gewöhnlichen räumlichen Inversion zusammen. In diesem Fall sind das

Gesetz von der Erhaltung der kombinierten Inversion und das Gesetz von der Erhaltung der Parität gleichbedeutend.

Im nächsten Abschnitt betrachten wir die grundlegenden Eigenschaften des Neutrinos, die sich aus dem β-Zerfall ergeben. Insbesondere werden wir die Eigenschaften untersuchen, die mit der Nichterhaltung der Parität beim β-Zerfall verbunden sind.

6.6. Grundeigenschaften des Neutrinos

Die Eigenschaften des von FERMI in die Theorie des β-Zerfalls eingeführten Neutrinos lassen sich unmittelbar nur mit sehr komplizierten experimentellen Mitteln nachweisen. Die elektrische Ladung des Neutrinos ist gleich Null, Masse und magnetisches Moment sind ebenfalls Null (oder sehr klein); daher kann die Wechselwirkung von Neutrinos mit Materie nur auf Grund schwacher Wechselwirkungen vor sich gehen (bei Prozessen des β-Zerfalls). Ein Neutrino kann beim Eindringen in einen Kern Prozesse hervorrufen, die dem β-Zerfall reziprok sind. Dabei werden Elektronen oder Positronen freigesetzt. Auf die Möglichkeit eines solchen Prozesses wiesen BETHE und PEIERLS unmittelbar nach der Veröffentlichung der FERMIschen Arbeiten hin [6,33]. Auf Grund des außerordentlich kleinen Wirkungsquerschnitts dieser Reaktion ($\approx 10^{-44}$ cm^2) konnte man jedoch schwerlich hoffen, daß sie experimentell beobachtbar sind. Die Verhältnisse änderten sich aber in den letzten Jahren, als leistungsstarke Kernreaktoren gebaut wurden, deren Betrieb mit der Emission einer größeren Anzahl von Neutrinos verbunden ist.

Die praktische Durchführung der Reaktion des umgekehrten β-Zerfalls ist mit der Frage verknüpft, ob Neutrino und Antineutrino identische Teilchen sind. Wir hatten vereinbart, daß als Antineutrino das beim Elektronenzerfall des Neutrons

$$\mathrm{n} \rightarrow \mathrm{p} + \mathrm{e} + \tilde{\nu} \tag{6.6.1}$$

entstehende Teilchen bezeichnet wird. Dann muß beim Positronenzerfall ein Neutrino entstehen:

$$\mathrm{p} \rightarrow \mathrm{n} + \tilde{\mathrm{e}} + \nu. \tag{6.6.2}$$

Da die Emission eines Teilchens der Absorption des entsprechenden Antiteilchens und die Emission eines Antiteilchens der Absorption eines Teilchens äquivalent sind, kann man schreiben:

$$\nu + \mathrm{n} \rightarrow \mathrm{p} + \mathrm{e}, \tag{6.6.3}$$

$$\tilde{\nu} + \mathrm{p} \rightarrow \mathrm{n} + \tilde{\mathrm{e}}. \tag{6.6.4}$$

Die Reaktion (6.6.3) besagt, daß ein Neutron bei Absorption eines Neutrinos in ein Proton bei gleichzeitiger Emission eines Elektrons übergehen kann. Nach (6.6.4) geht ein Proton bei Absorption eines Antineutrinos unter Positronenemission in ein Neutron über.

Mit Hilfe der Reaktionen (6.6.1) bis (6.6.4) läßt sich die Frage der Identität von Neutrino und Antineutrino klären. Wenn sich das Neutrino vom Anti-

neutrino unterscheidet, so kann das Antineutrino aus der Reaktion (6.6.1) beim Elektronenzerfall des Elektrons zum umgekehrten β-Zerfall nur bei Wechselwirkung mit einem Proton führen. Sind jedoch Neutrino und Antineutrino identisch, so werden die bei der Reaktion (6.6.1) entstehenden Teilchen zum umgekehrten β-Prozeß sowohl bei Wechselwirkung mit einem Neutron als auch mit einem Proton führen.

Kernreaktoren strahlen beim β-Zerfall der Spaltprodukte Antineutrinos aus [Reaktion (6.6.1)]. Mit Hilfe der auf diese Weise erhaltenen Antineutrinos untersuchten REINES und COWAN [6,34] die Reaktion $\tilde{\nu} + \mathrm{p} \rightarrow \mathrm{n} + \tilde{\mathrm{e}}$. In diesen Experimenten wurden die Koinzidenzen zwischen den bei der Annihilation von Positronen entstehenden γ-Quanten und den γ-Quanten der Neutroneneinfangstrahlung des Cadmiums gemessen.

Die Experimente wurden unter günstigeren Bedingungen 1956 [6,35] und 1957 [6,36] wiederholt. Dabei wurden entsprechend für den Wirkungsquerschnitt der Reaktion (6.6.4) folgende Werte erhalten: $(12 \pm 6) \cdot 10^{-44}\,\mathrm{cm}^2$ und $6 \cdot 10^{-44}\,\mathrm{cm}^2$. Diese Versuche kann man als unmittelbaren Beweis für die Existenz des Neutrinos ansehen.

Wären Neutrino und Antineutrino identisch ($\nu = \tilde{\nu}$), so würden die im Reaktor erzeugten Antineutrinos zu einer Reaktion vom Typ (6.6.3) führen. Als Beispiel einer solchen Reaktion kann

$$\tilde{\nu} + {}^{37}\mathrm{Cl} \rightarrow {}^{37}\mathrm{Ar} + \mathrm{e} \tag{6.6.5}$$

dienen. Diese Reaktion wurde 1946 von PONTECORVO vorgeschlagen. Über ihr Vorhandensein könnte man an Hand des frei werdenden radioaktiven Edelgases Argon (Elektroneneinfang) urteilen. Experimente zum Nachweis der Reaktion (6.6.5) mit Hilfe von Antineutrinos aus Reaktoren wurden von DAVIS [6,37] durchgeführt. Das Auftreten der Reaktion (6.6.5) würde die Identität von Neutrino und Antineutrino beweisen, konnte aber innerhalb der experimentellen Fehlergrenzen nicht nachgewiesen werden.

Eine zweite Möglichkeit zur Klärung der Identität von Neutrino und Antineutrino besteht in der Untersuchung des doppelten β-Zerfalls. Ein doppelter β-Zerfall muß bei der Umwandlung eines Kerns in einen Kern mit einer um 2 Einheiten größeren Ladung erfolgen, wenn der entsprechende Übergang (infolge energetischer Verhältnisse oder eines sehr starken Verbots) nicht über zwei aufeinanderfolgende β-Zerfälle über einen isobaren Zwischenkern vor sich gehen kann. Die Wahrscheinlichkeit für den doppelten β-Zerfall ist sehr gering, da sie der vierten Potenz der Wechselwirkungskonstanten g des Elektron-Neutrino-Feldes mit den Nukleonen proportional ist. Der Zahlenwert für die Wahrscheinlichkeit des doppelten β-Zerfalls hängt sehr stark davon ab, ob Neutrino und Antineutrino verschiedene Teilchen sind oder nicht.

Sind Neutrino und Antineutrino verschiedene Teilchen, so werden beim doppelten β-Zerfall 4 Teilchen emittiert: 2 Elektronen und 2 Antineutrinos. Die Übergangsenergie E verteilt sich zwischen diesen 4 Teilchen; daher wird sich die Gesamtenergie der beiden Elektronen von Null bis zur Übergangsenergie ändern können. Sind dagegen Neutrino und Antineutrino iden-

tische Teilchen, so kann das beim Zerfall eines Neutrons emittierte Neutrino beim Zerfall des zweiten Neutrons absorbiert werden. Dann wird der doppelte β-Zerfall durch die Emission von 2 Elektronen begleitet, deren Gesamtenergie gleich der Übergangsenergie ist. Würde man also die Summe der Energien der beiden Elektronen beim doppelten β-Zerfall messen, so ließe sich die Frage der Identität von Neutrino und Antineutrino klären. Die praktische Durchführung solcher Messungen gelang bisher wegen der außerordentlich kleinen Zerfallswahrscheinlichkeit noch nicht.

Außer dem Unterschied in der Gesamtenergie der emittierten Elektronen unterscheiden sich die beiden Möglichkeiten des doppelten β-Zerfalls wesentlich durch ihre Lebensdauer. Wenn Neutrino und Antineutrino identisch wären, so müßte der doppelte β-Zerfall ohne Emission von Neutrinos wahrscheinlicher sein als der doppelte β-Zerfall mit Emission von 2 Antineutrinos. Beim ersten Zerfallstyp erscheint das Neutrino nur im Zwischenzustand; daher ist die Anzahl der möglichen Zustände, die beim Zerfall mitwirken, wesentlich größer als für den Fall des Übergangs unter Emission von 2 Antineutrinos, da sich deren Energie aus dem Energieerhaltungssatz bestimmt.

Die Lebensdauer eines Kerns bezüglich des doppelten β-Zerfalls bei Emission von 2 Antineutrinos wurde von GOEPPERT-MAYER [6,38] berechnet. Sie hängt von der Größe des Übergangsmatrixelements ab; grobe Abschätzungen führen auf einen Wert $10^{19} \cdots 10^{20}$ a. Die Lebensdauer des doppelten β-Zerfalls ohne Neutrinoemission beträgt $\approx 10^{15} \cdots 10^{16}$ a [6,39] (für ^{48}Ca). Die letzten Lebensdauermessungen am doppelten β-Zerfall von $^{48}\mathrm{Ca} \to {}^{48}\mathrm{Ti}$ und $^{96}\mathrm{Zr} \to {}^{96}\mathrm{Mo}$ durch AWSCHALLOM [6,40] zeigten, daß die Halbwertzeit des ^{48}Ca größer als $2 \cdot 10^{18}$ a und die des ^{96}Zr größer als $0{,}5 \cdot 10^{18}$ a ist. Diese Werte bestätigen die Schlußfolgerung, die aus den Experimenten mit Neutrinos an Kernreaktoren gezogen wurde und nach denen sich die Eigenschaften von Neutrino und Antineutrino unterscheiden.

Die Nichterhaltung der Parität beim β-Zerfall führt, wie LANDAU [6,41] und unabhängig davon SALAM [6,42] sowie LEE und YANG [6,43] zeigten, zur Möglichkeit neuer Eigenschaften des Neutrinos.

Die DIRAC-Gleichung für alle Teilchen mit dem Spin $^1/_2$ und der Ruhemasse Null zerfällt in zwei voneinander unabhängige Gleichungspaare, die verschiedenen Polarisationszuständen der Teilchen entsprechen. Diese Gleichungen gehen jedoch bei der Ladungskonjugation ineinander über. Fordert man Invarianz bezüglich der kombinierten Inversion, so kommt man zu dem Schluß, daß das Neutrino nur durch ein Gleichungspaar beschrieben wird. In diesem Fall ist das Neutrino durch einen bestimmten Polarisationszustand charakterisiert: Polarisation in (bzw. entgegen) der Bewegungsrichtung. Solche Neutrinos wurden von LANDAU als *longitudinal polarisiert* (*Zweikomponentenneutrinos*) bezeichnet. Ihre Ruhemasse ist Null. Das Antineutrino ist immer entgegengesetzt zum Neutrino polarisiert.

Stellt man sich den Spin anschaulich als Rotation vor, so deutet die longitudinale Polarisation des Neutrinos darauf hin, daß die Rotationsrichtung des Neutrinos immer mit der Bewegungsrichtung verknüpft ist. In diesem Sinne entspricht die Bewegung des Neutrinos der Bewegung einer Schraube.

Eine stetige Kopplung zwischen Rotations- und Translationsbewegung ist nur für Objekte möglich, die sich immer mit Lichtgeschwindigkeit bewegen. Wäre die Neutrinogeschwindigkeit v kleiner als die Lichtgeschwindigkeit, so würde in Koordinatensystemen mit größerer Geschwindigkeit als v der Zusammenhang zwischen Rotation und Translationsbewegung umgekehrt zu dem Zusammenhang in Koordinatensystemen mit kleinerer Geschwindigkeit als v dargestellt. Da die inneren Eigenschaften des Neutrinos nicht von der Wahl des Koordinatensystems abhängen können, muß sich das Neutrino mit Lichtgeschwindigkeit bewegen und daher die Ruhemasse 0 besitzen.

Wie im Abschn. 6.5. zur Erklärung der Versuche von Wu u. a. gezeigt wurde, muß man $C'_T = -C_T$ annehmen, wenn der β-Zerfall mit den Gamow-Teller-Auswahlregeln nur durch tensorielle Wechselwirkung ($C_A = 0$), oder $C'_A = C_A$, wenn er nur durch pseudoskalare Wechselwirkung ($C_T = 0$) hervorgerufen wird. Der Wechselwirkungsoperator muß also folgende Form besitzen:

$$H'_T = g\, C_T \int (\psi_p^+ \beta \vec{\sigma}\, \psi_n)\, (\psi_e^+ \beta \vec{\sigma}\, [\psi_\nu - \gamma_5 \psi_\nu])\, d\tau \quad \text{für} \quad C_A = 0, \tag{6.6.6}$$

$$H'_A = g\, C_A \int (\psi_p^+ \vec{\sigma} \psi_n)\, (\psi_e^+ \vec{\sigma}\, [\psi_\nu + \gamma_5 \psi_\nu])\, d\tau \quad \text{für} \quad C_T = 0. \tag{6.6.7}$$

Da die Wirkung des Operators $-\gamma_5$ (s. Anhang 3) auf die Neutrinowellenfunktion der Wirkung des Operators $\vec{\sigma}\mathfrak{n}$ mit $\mathfrak{n} = c\,\mathfrak{p}/\varepsilon$ als Einheitsvektor, $\mathfrak{p}$ als Impuls und ε als Neutrinoenergie äquivalent ist, läßt sich schreiben

$$\psi_\nu + \gamma_5 \psi_\nu = (1 - \vec{\sigma}\mathfrak{n})\, \psi_\nu \equiv F_\nu,$$

$$\psi_\nu - \gamma_5 \psi_\nu = (1 + \vec{\sigma}\mathfrak{n})\, \psi_\nu \equiv \Phi_\nu.$$

Die Ausdrücke (6.6.6) und (6.6.7) enthalten also die Wellenfunktionen F_ν und Φ_ν, die die Emission eines Antineutrinos (Absorption eines Neutrinos) charakterisieren. Wie im Anhang 3.1. gezeigt wird, genügen die Funktionen F_ν und Φ_ν folgenden Gleichungen:

$$\vec{\sigma}\mathfrak{n}\, F_\nu = -F_\nu, \tag{6.6.8}$$

$$\vec{\sigma}\mathfrak{n}\, \Phi_\nu = \Phi_\nu. \tag{6.6.9}$$

Die Gln. (6.6.8) und (6.6.9) bestimmen die Eigenwerte des Operators der Spinprojektion auf die Bewegungsrichtung des Antineutrinos. Die emittierten Antineutrinos haben positive Energie. Folglich müssen der Funktion F_ν die Fälle einer Spinorientierung des Antineutrinos entgegen dem Impuls und der Funktion Φ_ν diejenigen der Spinorientierung in Richtung des Impulses entsprechen.

Wäre der Wechselwirkungstyp beim Zerfall (tensoriell oder pseudovektoriell) bekannt, so könnte man angeben, welche der beiden Funktionen F_ν oder Φ_ν in Wirklichkeit das Antineutrino beschreibt. Wäre umgekehrt die Spinorientierung in bezug auf den Impuls für das Antineutrino bekannt, so ließe

sich die Art der Wechselwirkung des β-Zerfalls mit GAMOW-TELLER-Auswahlregeln feststellen. Da die Spinorientierungen von Neutrino und Antineutrino einander entgegengesetzt sind, könnte man die Frage des Wechselwirkungstyps auch durch Polarisationsmessungen bezüglich der Impulsrichtung des Neutrinos feststellen.

Mit Hilfe nichtveröffentlichter Werte von M. GOLDHABER und Mitarb. gelang es, die Neutrinopolarisation zu messen. Die Neutrinos wurden vom Kern ^{152}Eu beim Einfang eines Hüllenelektrons (K-Einfang, s. Abschn. 6.7.) emittiert. Es wurde festgestellt, daß der Neutrinospin entgegengesetzt zum Impuls gerichtet ist (der Spin des Antineutrinos liegt in der Richtung des Impulses). Wenn die Resultate dieser Versuche bestätigt werden, so bedeutet dies, daß der β-Zerfall nach den GAMOW-TELLER-Auswahlregeln durch pseudovektorielle Wechselwirkung verursacht wird.

Die Hypothese über das longitudinale Neutrino gestattet eine sehr anschauliche Interpretation der in den Versuchen von WU u. a. festgestellten bevorzugten Elektronenemission in einer Richtung entgegengesetzt zur Spinrichtung des radioaktiven ^{60}Co-Kerns. Beim erlaubten β-Zerfall mit der GAMOW-TELLER-Auswahlregel werden Elektron und Neutrino mit parallelen Spins emittiert. Da beim Zerfall des ^{60}Co der Spin um eine Einheit kleiner wird, muß der von Elektron und Neutrino weggetragene Gesamtspin dieselbe Richtung besitzen wie der Spin des ^{60}Co-Kerns. Ist der β-Zerfall des ^{60}Co durch tensorielle Wechselwirkung bedingt, so bewegt sich das Antineutrino entgegengesetzt zu seiner Spinrichtung. Wenn also der Spin des ^{60}Co-Kerns, wie in der Abb. 47a dargestellt, nach oben gerichtet ist, so muß sich das Antineutrino nach unten bewegen. Infolge der Winkelkorrelation zwischen der Elektronen- und der Neutrinoemissionsrichtung (s. Abschn. 6.3.) werden sich die Elektronen bei tensorieller Wechselwirkung ebenfalls nach unten bewegen.

Ist jedoch der β-Zerfall des ^{60}Co durch pseudovektorielle Wechselwirkung bedingt, dann bewegt sich das Antineutrino in Richtung seines Spins (Abbildung 47b). In diesem Fall werden sich jedoch die Elektronen bevorzugt ebenfalls nach unten bewegen, da sich der Koeffizient der Winkelkorrelation zwischen den Emissionsrichtungen der leichten Teilchen durch das Vorzeichen vom entsprechenden Koeffizienten bei tensorieller Wechselwirkung unterscheidet.

Abb. 47 gibt außerdem eine anschauliche Vorstellung über die Polarisation der Elektronen beim β-Zerfall. Infolge der Winkelkorrelation ist die Bewegungsrichtung der Elektronen mit der Bewegungsrichtung des Antineutrinos verknüpft; der Spin der Elektronen ist dem Spin des Antineutrinos parallel und daher ebenfalls mit der Bewegungsrichtung des Antineutrinos verknüpft. Die maximale Elektronenpolarisation wird durch das Verhältnis der Elektronengeschwindigkeit zur Lichtgeschwindigkeit bestimmt.[1]

---

[1]) ALICHANOW, JELISSEJEW und LJUBIMOW zeigten, daß die Elektronenpolarisation beim β-Zerfall von ^{170}Tm, ^{186}Re, ^{153}Sm, ^{177}Lu, ^{186}Au und ^{90}Zr mit einer Genauigkeit von 4 bis 10% gleich v/c ist.

Messungen an orientierten Kernen wurden auch mit ^{58}Co durchgeführt [6,44]. Der β-Zerfall des ^{58}Co verläuft auf das erste angeregte Niveau des ^{58}Fe mit nachfolgendem Übergang in den Grundzustand durch Emission eines γ-Quants mit der Energie 0,805 MeV. Die Anisotropie bei der γ-Emission wurde für die Bestimmung des Polarisationsgrades der Kerne benutzt. Beim β-Zerfall des ^{58}Co werden Positronen emittiert; der Übergang geht zwischen den Spinzuständen $2^+ \to 2^+$ vor sich. Einem solchen Übergang können sowohl die GAMOW-TELLER-Auswahlregeln als auch die FERMI-Auswahlregel entsprechen. Bei den Experimenten wurde eine merkliche Anisotropie in der Emissionsrichtung der Positronen festgestellt: Der größere Teil der Positronen wird in der Spinrichtung des ^{58}Co-Kerns emittiert. Der die Anisotropie

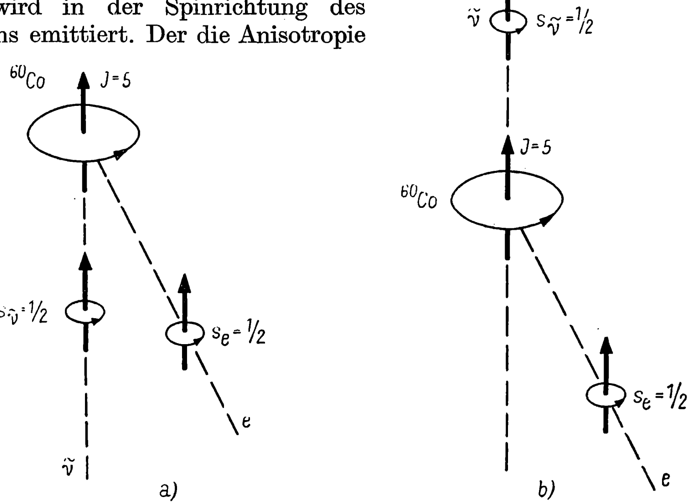


Abb. 47. β-Zerfall des orientierten ^{60}Co-Kerns
a) tensorielle Wechselwirkung; b) pseudovektorielle Wechselwirkung

in der Emissionsrichtung der Positronen bestimmende Koeffizient α erwies sich etwa dreimal kleiner als der entsprechende Koeffizient für den β-Zerfall der orientierten ^{60}Co-Kerne. Die bevorzugte Positronenemission in Spinrichtung des Kerns entspricht dem negativen Vorzeichen des Koeffizienten α. Diese Asymmetrie bei der Positronenemission durch orientierte ^{58}Co-Kerne läßt sich leicht mit Hilfe der Zweikomponententheorie des Neutrinos verstehen, wenn man annimmt, daß nur eine Wechselwirkung nach den GAMOW-TELLER-Auswahlregeln vorhanden ist. Bei Positronenemission werden Rechtsschraubenneutrinos emittiert, wenn der β-Zerfall durch tensorielle Wechselwirkung hervorgerufen wird. Solche Neutrinos müssen in Spinrichtung des Kerns fliegen, und daher müssen auch die Positronen im wesentlichen in dieser Richtung emittiert werden. Wird der β-Zerfall durch pseudovektorielle Wechselwirkung hervorgerufen, so muß die Positronenemission durch das

Auftreten von Linksschraubenneutrinos entgegengesetzt zur Spinrichtung des Kerns begleitet werden. Die Positronen müssen infolge der Winkelkorrelation in einer Richtung entgegengesetzt zur Flugrichtung des Neutrinos, d. h. in Spinrichtung des Kerns, emittiert werden.

In den Experimenten von GARWIN, LEDERMAN und WEINRICH [6,45] sowie FRIEDMAN und TELEGDI [6,46] wurde die Nichterhaltung der Parität beim Zerfall des π-Mesons in ein μ-Meson und ein Neutrino und beim Zerfall des μ-Mesons in ein Elektron und zwei Neutrinos festgestellt. Die Diskussion dieser Experimente führt über den Rahmen unserer Darlegung hinaus, da wir uns hier nicht mit Prozessen unter Beteiligung von Mesonen befassen wollen.

Man überzeugt sich leicht, daß die Theorie des β-Zerfalls mit Zweikomponentenneutrinos bezüglich räumlicher Inversion nicht invariant ist und daher dem Fall der Nichterhaltung der Parität entspricht. Bei räumlicher Inversion ändert sich nämlich die Impulsrichtung (polarer Vektor!), die Spinrichtung jedoch nicht (axialer Vektor!). Die räumliche Inversion stört also den Zusammenhang zwischen Impulsrichtung und Spinorientierung des Neutrinos. Diese Theorie ist weiterhin auch bezüglich der Ladungskonjugation nicht invariant. Die Ladungskonjugation, die Teilchen durch Antiteilchen ersetzt, ändert weder die Impulsrichtung noch die Spinorientierung. Die Theorie ist jedoch invariant bezüglich der kombinierten Inversion, d. h. bezüglich der gleichzeitigen Anwendung von Ladungskonjugation und räumlicher Inversion. Die kombinierte Inversion ersetzt gleichzeitig das Neutrino durch das Antineutrino und ändert die Impulsrichtung, während die Spinrichtung ungeändert bleibt.

6.7. Einfang von Hüllenelektronen (K-Einfang)

Der β-Zerfall mit Elektronen- oder Positronenemission kann dann vor sich gehen, wenn die Übergangsenergie (E) die Ruhenergie der Elektronen übersteigt. Da das Positron als Antiteilchen des Elektrons zu betrachten ist, muß die Positronenemission der Elektronenabsorption äquivalent sein. Aus diesem Grund ist neben dem Positronenzerfall

$$\mathrm{p} \rightarrow \mathrm{n} + \tilde{\mathrm{e}} + \nu$$

auch der β-Zerfall durch Absorption eines Elektrons möglich:

$$\mathrm{e} + \mathrm{p} \rightarrow \mathrm{n} + \nu. \tag{6.7.1}$$

Bei diesem Prozeß geht das Proton unter Neutrinoemission in ein Neutron über. Da Elektronen immer den Kern umkreisen, konkurriert der Prozeß (6.7.1) meist mit dem Prozeß des Positronenzerfalls. Dem Kern am nächsten befinden sich die beiden Elektronen der K-Schale des Atoms. Sie befinden sich im Zustand 1s. Daher ist der Einfang von Elektronen aus der K-Schale am wahrscheinlichsten, und man bezeichnet den Prozeß des Einfangs von Hüllenelektronen durch den Kern deshalb als *K-Einfang*. Die Wahrschein-

lichkeit für den Elektroneneinfang aus der L-Schale (L-Einfang) des Atoms ist etwa 100mal geringer als die Wahrscheinlichkeit für den K-Einfang.

Betragen die Übergangsenergie des Kerns beim Übergang eines Protons in ein Neutron E, die Energie des emittierten Positrons ε_e und die Energie des Neutrinos ε_ν, so ist der Positronenzerfall bei Erfüllung der Ungleichung

$$E = \varepsilon_e + \varepsilon_\nu \geqq m c^2 \tag{6.7.2}$$

möglich. Die Bindungsenergie eines Elektrons auf der K-Schale des Atoms beträgt $\varepsilon_K = \frac{m e^4 Z^2}{2 \hbar^2}$. Die Möglichkeit des Elektroneneinfangs aus der K-Schale wird durch folgende Ungleichung gegeben:

$$E + m c^2 - \varepsilon_K = \varepsilon_\nu \geqq 0. \tag{6.7.3}$$

Aus (6.7.2) und (6.7.3) folgt, daß bei der Bedingung für die Übergangsenergie

$$\varepsilon_K - m c^2 \leqq E < m c^2$$

Elektroneneinfang möglich ist. Gilt $E \geqq m c^2$, so ist neben dem Einfang eines Hüllenelektrons auch Positronenemission möglich.

Beim Einfang von Hüllenelektronen werden monochromatische Neutrinos mit der Energie

$$\varepsilon_\nu = E + m c^2 - \varepsilon_K$$

emittiert. Die Untersuchung des K-Einfangs ist möglich durch Messung des Impulses vom Rückstoßkern. Wird der Übergang nicht durch Positronenemission begleitet, dann kann man die Messung des Impulses und der Energie des Rückstoßkerns stets als direkte Methode für die Messung der Übergangsenergie beim K-Einfang betrachten. Außer durch die Registrierung von Rückstoßkernen kann man den K-Einfang auch aus der Röntgenstrahlung ermitteln, die infolge der Umordnung in der Elektronenhülle nach dem Einfang eines K-Elektrons des Atoms durch den Kern auftritt.

Die Wahrscheinlichkeit für einen erlaubten β-Übergang durch Einfang eines Hüllenelektrons wird durch die allgemeine Beziehung

$$P_{ba} = \frac{2\pi}{\hbar} |(b|H'|a)|^2 \varrho(\varepsilon) \tag{6.7.4}$$

bestimmt. Da sich das Elektron vor dem Einfang in einem bestimmten Quantenzustand befand, wird $\varrho(\varepsilon)$ nur durch die Energie des emittierten Neutrinos bestimmt:

$$\varrho(\varepsilon) = \frac{4\pi \varepsilon_\nu^2}{(2\pi \hbar)^3 c^3} = \frac{(E + m c^2 - \varepsilon_K)^2}{2\pi^2 \hbar^3 c^3}. \tag{6.7.5}$$

Mit (6.7.4) erhält man dann

$$P = \frac{\ln 2}{\tau} = g_S^2 \frac{(E + m c^2 - \varepsilon_K)^2}{\pi \hbar^4 c^4} \left(\left|\int 1\right|^2 + R \left|\int \vec{\sigma}\right|^2\right) |\psi_e(R_0)|^2,$$

wobei $\psi_e(R_0)$ den Wert der Elektronenwellenfunktion für den Zustand $1s$ an der Kernoberfläche bedeutet. Da auf der K-Schale 2 Elektronen vorhanden sind, wird die Halbwertzeit für einen erlaubten Einfang

$$\frac{\ln 2}{\tau} = 2 g_S^2 \frac{(E + m c^2 - \varepsilon_K)^2}{\pi \hbar^4 c^4} \left(\frac{2 e^2 Z R_0}{\hbar c}\right)^{2\delta - 2} \left(\frac{e^2 Z}{\hbar c}\right)^3 \frac{(\delta + 1)\left(\left|\int 1\right|^2 + R\left|\int \vec{\sigma}\right|^2\right)}{\Gamma(1 + 2\delta)} \tag{6.7.6}$$

mit

$$\delta = \sqrt{1 - \left(\frac{Z e^2}{\hbar c}\right)^2}.$$

Aus (6.7.6) folgt, daß die Wahrscheinlichkeit für den K-Einfang mit wachsender Ordnungszahl sehr schnell wächst, da sich die Aufenthaltswahrscheinlichkeit für ein K-Elektron im Kern vergrößert. Das Wachstum der Wahrscheinlichkeit für den K-Einfang mit zunehmender Ordnungszahl führt dazu, daß der konkurrierende Prozeß (Positronenzerfall) für Kerne mit $Z > 40$ praktisch nicht beobachtet wird.

KAPITEL 7

ELEMENTE DER ALLGEMEINEN THEORIE DER STREUUNG VON TEILCHEN IN EINEM POTENTIALFELD

7.1. Laborsystem und Schwerpunktsystem

Will man die Erscheinungen untersuchen, die bei der Streuung zweier Teilchen aneinander auftreten, so benutzt man in der Regel zwei Koordinatensysteme: das Laborsystem (L-System), in dem eines der Teilchen vor der Streuung ruht, während sich das andere relativ zu diesem Teilchen bewegt, und das Schwerpunktsystem (S-System), in dem der Massenmittelpunkt der beiden stoßenden Teilchen ruht. Im Schwerpunktsystem bewegen sich beide Teilchen vor der Streuung aufeinander zu und fliegen nach der Streuung in entgegengesetzten Richtungen auseinander. Experimentell werden alle Größen im Laborsystem gemessen. Die theoretische Untersuchung der Streuprozesse wird jedoch vorteilhafter im Schwerpunktsystem durchgeführt. Man muß deshalb den Übergang der Größen des einen Systems in die entsprechenden des anderen kennen.

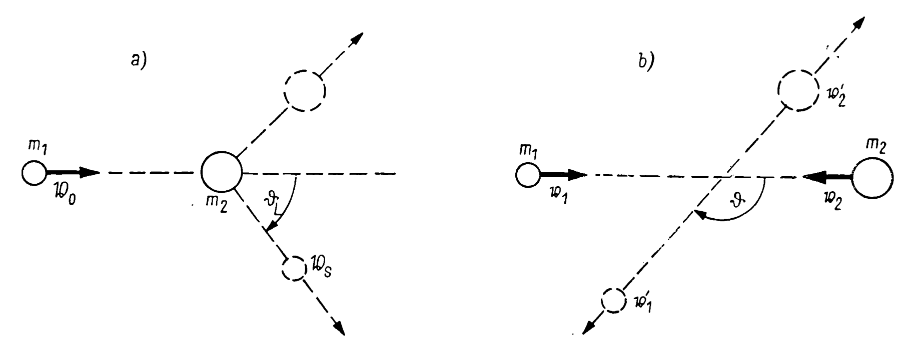


Abb. 48. Stoß zweier Teilchen der Masse m_1 und m_2 im Laborsystem (a) und im Schwerpunktsystem (b)

In Abb. 48 ist der Stoß zweier Teilchen mit den Massen m_1 und m_2 im Laborsystem (a) und im Schwerpunktsystem (b) dargestellt.

Im Laborsystem bewegt sich das Teilchen mit der Masse m_1 vor dem Stoß mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{V}_0$, das Teilchen m_2 ruht. Nach dem Stoß bewegt sich das Teilchen mit der Masse m_1 unter dem Winkel ϑ_L zur An-

fangsrichtung. Der Schwerpunkt der beiden Teilchen bewegt sich mit der Geschwindigkeit

$$\mathfrak{V}_S = \frac{m_1 \mathfrak{V}_0}{m_1 + m_2}. \tag{7.1.1}$$

Im Schwerpunktsystem bewegen sich die Teilchen m_1 und m_2 vor dem Stoß mit den Geschwindigkeiten

$$\mathfrak{v}_1 = \frac{m_2 \mathfrak{V}_0}{m_1 + m_2}, \quad \mathfrak{v}_2 = -\frac{m_1 \mathfrak{V}_0}{m_1 + m_2} \tag{7.1.2}$$

aufeinander zu. Ihre Relativgeschwindigkeit ist $\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_2 = \mathfrak{V}_0$. Nach dem Stoß bewegen sich die Teilchen mit den Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_1'$ und $\mathfrak{v}_2'$ in entgegengesetzte Richtungen, wobei $|\mathfrak{v}_1'| = |\mathfrak{v}_1|$ und $|\mathfrak{v}_2'| = |\mathfrak{v}_2|$ sind. Die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_1'$ bildet mit der anfänglichen Richtung der Bewegung den Winkel ϑ.

Der Zusammenhang zwischen ϑ und ϑ_L ergibt sich aus der Bedingung, daß die Geschwindigkeit $\mathfrak{V}_L$ des Teilchens mit der Masse m_1 nach dem Stoß im Laborsystem gleich der Summe der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_1'$ des Teilchens m_1 im Schwerpunktsystem und der Geschwindigkeit des Schwerpunkts $\mathfrak{V}_S$ sein muß, d. h., es gilt

$$\mathfrak{V}_L = \mathfrak{v}_1' + \mathfrak{V}_S \tag{7.1.3}$$

oder

$$\left.\begin{aligned} V_L \cos\vartheta_L &= v_1' \cos\vartheta + V_S, \\ V_L \sin\vartheta_L &= v_1' \sin\vartheta, \\ \varphi_L &= \varphi. \end{aligned}\right\} \tag{7.1.3a}$$

Eliminieren wir aus diesen Beziehungen V_L, so finden wir

$$\tan\vartheta_L = \frac{\sin\vartheta}{\gamma + \cos\vartheta}, \tag{7.1.4}$$

wobei

$$\gamma = \frac{V_S}{v_1'} = \frac{m_1}{m_2}\,^{1)} \tag{7.1.4a}$$

gesetzt wurde. Aus der Beziehung (7.1.4) ergibt sich, daß bei $\gamma < 1$ der Streuwinkel ϑ_L im Laborsystem monoton von 0 bis π wächst, wenn der Winkel ϑ im Schwerpunktsystem von 0 bis π vergrößert wird (Abb. 49). Bei $\gamma = 1$ ist der Streuwinkel im Laborsystem immer gleich der Hälfte des Streuwinkels im Schwerpunktsystem: $\vartheta_L = \vartheta/2$. Bei $\gamma > 1$ ist der Streuwinkel ϑ_L im Laborsystem immer kleiner als $\pi/2$. Er wächst monoton von 0 bis zu seinem Maximalwert, der durch die Gleichung $(\sin\vartheta_L)_{\max} = 1/\gamma = m_2/m_1$ bestimmt

---

[1]) Wenn die Streuung unelastisch ist, d. h. zwei neue Teilchen mit den Massen m_1' und m_2' entstehen und die Energie Q frei ($Q > 0$) oder absorbiert wird ($Q < 0$), so ist $\gamma = \left(\frac{m_1 m_1'}{m_2 m_2'} \frac{\varepsilon}{\varepsilon + Q}\right)^{1/2}$, wobei $\varepsilon = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} V_0^2$ die Energie der Relativbewegung ist.

wird, wenn ϑ von 0 bis $\arccos(-1/\gamma)$ vergrößert wird. Bei weiterer Vergrößerung von ϑ bis π fällt ϑ_L auf Null ab (Abb. 49).

Der Zusammenhang zwischen den Wirkungsquerschnitten in den beiden Koordinatensystemen kann aus der Bedingung erhalten werden, daß die

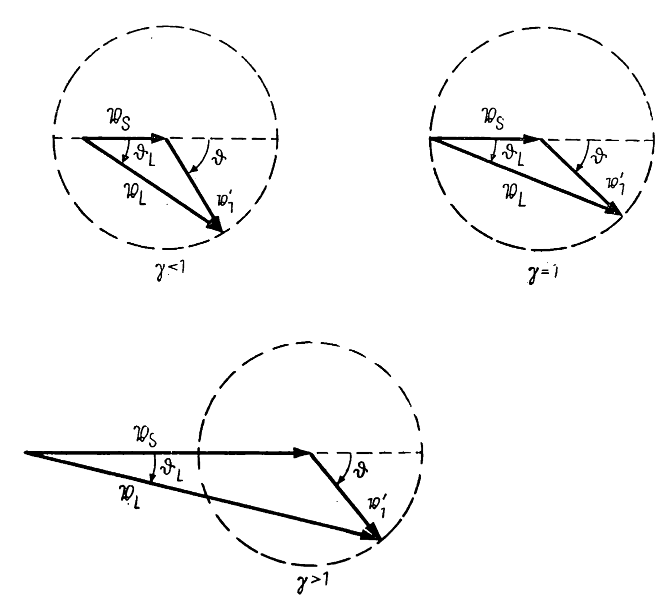


Abb. 49. Zusammenhang zwischen den Streuwinkeln ϑ_L im Laborsystem und ϑ im Schwerpunktsystem in Abhängigkeit vom Verhältnis $\gamma = m_1/m_2$ der Massen der stoßenden Teilchen

Zahlen der in ein und denselben Raumwinkel gestreuten Teilchen gleich sein müssen. Diese Bedingung hat die Form

$$\sigma_L(\vartheta_L, \varphi_L)\sin\vartheta_L\, d\vartheta_L\, d\varphi_L = \sigma(\vartheta, \varphi)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi. \qquad (7.1.5)$$

Aus (7.1.4) folgt

$$\cos\vartheta_L = \frac{\gamma + \cos\vartheta}{\sqrt{1 + 2\gamma\cos\vartheta + \gamma^2}}$$

und daraus

$$\sin\vartheta_L\, d\vartheta_L = \frac{1 + \gamma\cos\vartheta}{(1 + \gamma^2 + 2\gamma\cos\vartheta)^{3/2}}\sin\vartheta\, d\vartheta.$$

Setzen wir dies in (7.1.5) ein und berücksichtigen, daß $\varphi_L = \varphi$ ist, so erhalten wir

$$\sigma_L(\vartheta_L, \varphi_L) = \frac{(1 + \gamma^2 + 2\gamma\cos\vartheta)^{3/2}}{|1 + \gamma\cos\vartheta|}\sigma(\vartheta, \varphi). \qquad (7.1.6)$$

Der totale Streuquerschnitt muß natürlich in beiden Koordinatensystemen gleich sein.

Im speziellen Fall $\gamma = 1$ folgt aus (7.1.6)

$$\sigma_L(\vartheta_L, \varphi_L) = 2^{3/2}(1 + \cos\vartheta)^{1/2}\,\sigma(\vartheta, \varphi). \tag{7.1.7}$$

Wegen $\vartheta_L = \vartheta/2$ erhalten wir aus (7.1.7)

$$\sigma_L(\vartheta_L, \varphi_L) = 4\sigma(\vartheta, \varphi)\cos\vartheta_L. \tag{7.1.8}$$

Wenn $E_0 = \frac{m_1 V_0^2}{2}$ die Energie des Teilchens der Masse m_1 im Laborsystem vor dem Stoß ist, so ist die Energie der Relativbewegung des Teilchens mit der reduzierten Masse $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ im Schwerpunktsystem

$$E = \frac{\mu V_0^2}{2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} E_0. \tag{7.1.9}$$

Mit (7.1.1) und (7.1.2) erhalten wir aus (7.1.3) das Quadrat der Geschwindigkeit des Teilchens m_1 im Laborsystem (nach dem Stoß):

$$V_L^2 = V_0^2 \frac{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \cos\vartheta}{(m_1 + m_2)^2}.$$

Die Energie des Teilchens m_1 nach dem Stoß beträgt im Laborsystem folglich

$$E_L^{(1)} = \frac{m_1 V_L^2}{2} = E_0 \frac{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \cos\vartheta}{(m_1 + m_2)^2}. \tag{7.1.10}$$

Diese Energie liegt demnach innerhalb der Grenzen

$$\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 E_0 \leqq E_L^{(1)} \leqq E_0.$$

Die Energie des Teilchens m_2 im Laborsystem ist vor dem Stoß gleich Null, nach dem Stoß besitzt es die Energie

$$E_L^{(2)} = \frac{4\, m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} E_0 \sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right).$$

Nach dem Stoß liegt also die Energie des Teilchens m_2 innerhalb folgender Grenzen:

$$0 \leqq E_L^{(2)} \leqq \frac{4\, m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} E_0.$$

Alle hier angegebenen Formeln gelten für den Fall der nichtrelativistischen Bewegung, d. h., sie sind nur bei Relativenergien gültig, die klein gegen die Ruhenergien der Teilchen sind. Die Ruhenergie eines Nukleons beträgt etwa 931 MeV. Die abgeleiteten Formeln kann man deshalb bei der Nukleonenstreuung bis zu Energien von etwa 100 MeV benutzen.

Wenn kein besonderer Hinweis erfolgt, so wird in den weiteren Darlegungen immer das Schwerpunktsystem benutzt.

7.2. Elastische Streuung im Potentialfeld

Als elastisch bezeichnet man die Streuung, bei der sich der innere Zustand und die Zusammensetzung der stoßenden Teilchen nicht verändern.

In der nichtrelativistischen Näherung kann die Streuung eines Teilchens (Masse m_1) an einem anderen (Masse m_2) auf die Streuung eines fiktiven

Teilchens der reduzierten Masse $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ in einem Potentialfeld zurückgeführt werden, wobei das Potential eine Funktion der Relativkoordinaten und der Spins der stoßenden Teilchen ist.[1]) Der Übergang von der Streuung zweier Teilchen aneinander zur Streuung eines fiktiven Teilchens mit der reduzierten Masse in einem Potentialfeld wird durch den Übergang zum Schwerpunktsystem der stoßenden Teilchen vorgenommen, das wir im weiteren benutzen wollen. Wir setzen der Einfachheit halber voraus, daß die stoßenden Teilchen den Spin Null besitzen.

Im Anfangsstadium des Streuprozesses bewegen sich die beiden unendlich weit voneinander entfernten Teilchen aufeinander zu. Bei ihrer Annäherung verändert die Wechselwirkung zwischen den Teilchen ihren Bewegungszustand. Danach fliegen die Teilchen auseinander. Im Endstadium des Streuprozesses bewegen sich die Teilchen voneinander fort.

Es ist oft vorteilhaft, an Stelle der zeitlichen Beschreibung des Streuprozesses die äquivalente stationäre Aufgabe zu betrachten (s. Kap. 9). Bei der stationären Beschreibung des Streuprozesses wird angenommen, daß ein ununterbrochener, aus dem Unendlichen kommender Teilchenstrom vorliegt, der nach der Wechselwirkung mit dem Streuzentrum in einen Strom auseinanderfliegender (gestreuter) Teilchen übergeht. Die Aufgabe besteht darin, bei vorgegebenem Kraftfeld den Strom der gestreuten Teilchen in unendlich großer Entfernung vom Streuzentrum als Funktion des Stromes der einfallenden Teilchen zu berechnen.

In der stationären Formulierung wird die Streuung eines Teilchens mit der Masse μ und der positiven Energie ε in einem Potentialfeld $V(\mathfrak{r})$ durch die SCHRÖDINGER-Gleichung

$$(\Delta + k^2)\,\psi(\mathfrak{r}) = u(\mathfrak{r})\,\psi(\mathfrak{r}) \tag{7.2.1}$$

beschrieben. Dabei sind Δ der LAPLACE-Operator, $k^2 = 2\mu\,\varepsilon/\hbar^2$, ε die Energie der Relativbewegung der beiden stoßenden Teilchen und $u(\mathfrak{r}) = 2\mu\, V(\mathfrak{r})/\hbar^2$.

Wir nehmen an, daß $u(\mathfrak{r})$ nur in einem bestimmten begrenzten Teil des Raumes $|\mathfrak{r}| \leqq d$ verschieden von Null ist. Von diesem Teil des Raumes sagen wir, daß er das Gebiet der Kraftwirkung darstellt. Außerhalb des Gebietes der Kraftwirkung bewegen sich die Teilchen frei, und ihr Zustand kann durch eine ebene Welle

$$\varphi_a(\mathfrak{r}) = \exp(i\,\mathfrak{k}_a\,\mathfrak{r}), \qquad \mathfrak{k}_a^2 = \mathfrak{k}^2 \tag{7.2.2}$$

beschrieben werden, die der Wellengleichung (7.2.1) mit der rechten Seite 0 genügt. Der Wellenvektor $\mathfrak{k}_a$ hängt mit dem Impuls $\mathfrak{p}$ der Relativbewegung durch die einfache Beziehung $\mathfrak{p} = \hbar\,\mathfrak{k}_a$ zusammen. Die Funktion (7.2.2) ist so normiert, daß die Stromdichte $\mathfrak{j}$ der Teilchen zahlenmäßig gleich der Teilchengeschwindigkeit ist:

$$\mathfrak{j} = \frac{\hbar}{2\mu i}\,(\varphi_a^* \nabla \varphi_a - \varphi_a \nabla \varphi_a^*) = \frac{\hbar\,\mathfrak{k}_a}{\mu}. \tag{7.2.3}$$

---

[1]) In einigen Streuaufgaben muß die Spin-Bahn-Kopplung berücksichtigt werden.

Die allgemeine Lösung der Gl. (7.2.1) drücken wir durch die GREENsche Funktion $G(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}')$ aus, die der Gl. (7.2.1) für die punktförmige Einheitsquelle genügt:

$$(\Delta + k^2)\, G(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}') = \delta(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'). \tag{7.2.4}$$

Uns interessieren nur diejenigen Lösungen von (7.2.1), welche die gestreuten (d. h. vom Zentrum weglaufenden) Wellen enthalten. Die diesen Lösungen entsprechende GREENsche Funktion hat die Form

$$G(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}') = -\frac{1}{4\pi}\, \frac{\exp(i\, k\, |\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|)}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|}. \tag{7.2.5}$$

Nachdem wir die GREENsche Funktion (7.2.5), d. h. die Lösung der Gl. (7.2.4) mit punktförmiger Quelle, bestimmt haben, können wir die allgemeine Lösung der Gl. (7.2.1), welche die einfallende Welle (7.2.2) mit dem Wellenvektor $\mathfrak{k}_a$ und die gestreuten weglaufenden Wellen enthält, aufschreiben:[1])

$$\psi_a(\mathfrak{r}) = \varphi_a(\mathfrak{r}) - \frac{1}{4\pi} \int \frac{\exp(i\, k\, |\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|)}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|}\, u(\mathfrak{r}')\, \psi_a(\mathfrak{r}')\, d\mathfrak{r}'. \tag{7.2.6}$$

Die Gl. (7.2.6) ist eine Integralgleichung bezüglich der unbekannten Funktion $\psi_a(r)$.

In großen Entfernungen vom Streuzentrum ($r \gg d,\ k\, r \gg 1$) kann man $k\, |\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'| \approx k\, r - \mathfrak{k}_b\, \mathfrak{r}'$ setzen, wobei $\mathfrak{k}_b = k \frac{\mathfrak{r}}{r}$ ist. Für (7.2.6) erhalten wir deshalb den asymptotischen Ausdruck

$$\psi_a(\mathfrak{r}) = \varphi_a(\mathfrak{r}) + A_{ba} \frac{e^{i\mathfrak{k}\mathfrak{r}}}{r}, \quad k\, r \gg 1, \tag{7.2.7}$$

wobei gesetzt wurde

$$A_{ba} = -\frac{1}{4\pi} \int e^{-i\mathfrak{k}_b\mathfrak{r}'}\, u(\mathfrak{r}')\, \psi_a(\mathfrak{r}')\, d\mathfrak{r}'. \tag{7.2.8}$$

Berücksichtigt man, daß der Ausdruck $e^{-i\mathfrak{k}_b\mathfrak{r}'} = \varphi_b^*(\mathfrak{r}')$ als ebene Welle mit dem Wellenvektor $\mathfrak{k}_b$ angesehen werden kann, so läßt sich Gl. (7.2.8) in der Form

$$A_{ba} = -\frac{1}{4\pi}\, (\varphi_b, u\, \psi_a) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\, (\varphi_b, V\, \psi_a) \tag{7.2.8a}$$

schreiben, wobei die Bezeichnung $(\varphi, \psi) \equiv \int \varphi^*\, \psi\, d\tau$ benutzt wurde. Die Funktion A_{ba} wird *Streuamplitude* genannt. Wie man aus (7.2.8a) ersieht, ist die Streuamplitude proportional der reduzierten Masse μ und hängt von

---

[1]) Der Ausdruck (7.2.6), der die Lösung der Gl. (7.2.1) darstellt, kann in der kurzen symbolischen Form

$$\psi_a(\mathfrak{r}) = \varphi_a(\mathfrak{r}) + D^{-1}\, u(\mathfrak{r})\, \psi_a(\mathfrak{r}) \tag{7.2.6a}$$

geschrieben werden, wobei

$$D \equiv (k^2 + \Delta + i\,\eta) \tag{7.2.6b}$$

ist; η bedeutet einen kleinen positiven Parameter, der garantiert, daß in (7.2.6a) nur auslaufende gestreute Wellen vorhanden sind. Nach der Berechnung der Integrale in (7.2.6a) muß man den Grenzübergang $\eta \to 0$ durchführen.

der Energie und dem Streuwinkel ϑ, d. h. dem Winkel zwischen den Vektoren $\mathfrak{k}_a$ und $\mathfrak{k}_b$, ab.

Der differentielle Wirkungsquerschnitt $d\sigma(\vartheta, \varphi)$ der elastischen Streuung in das Raumwinkelelement $d\Omega = \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$ wird als Verhältnis der Zahl der in dieses Element in der Zeiteinheit gestreuten Teilchen zur Stromdichte der einfallenden Teilchen definiert. Berechnet man dieses Verhältnis, so bekommt man

$$d\sigma = |A_{ba}|^2\, d\Omega. \tag{7.2.9}$$

Um den Streuquerschnitt (7.2.9) zu erhalten, muß somit die Integralgleichung (7.2.6) gelöst und danach nach (7.2.8) die Streuamplitude berechnet werden.

Wenn man die Wechselwirkungsenergie $u(\mathfrak{r})$ als kleine Störung betrachten kann, so läßt sich die Gl. (7.2.6) nach dem Iterationsverfahren lösen. Als Ergebnis erhalten wir

$$\psi_a(\mathfrak{r}) = \varphi_a(\mathfrak{r}) - \frac{1}{4\pi}\int \frac{e^{ik|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}'|}}{|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}'|}\, u(\mathfrak{r}')\, \varphi_a(\mathfrak{r}')\, d\mathfrak{r}' + \dots$$

Setzt man diesen Ausdruck für ψ_a in (7.2.8) ein, so erhält man die Streuamplitude in Form einer Reihe:

$$A_{ba} = -\frac{1}{4\pi}\int \varphi_b^*(\mathfrak{r})\, u(\mathfrak{r})\, \varphi_a(\mathfrak{r})\, d\mathfrak{r} + \\ + \frac{1}{(4\pi)^2}\int \varphi_b^*(\mathfrak{r})\, \frac{e^{ik|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}'|}}{|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}'|}\, u(\mathfrak{r})\, u(\mathfrak{r}')\, \varphi_a(\mathfrak{r}')\, d\mathfrak{r}\, d\mathfrak{r}' + \dots$$

Wenn diese Reihe konvergiert und man nur die ersten N Glieder berücksichtigt, so bezeichnet man diese Näherung als *N-te* Born*sche Näherung*. So ist z. B. in der ersten BORNschen Näherung

$$A_{ba}^{(1)} = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}(\varphi_b, V\varphi_a). \tag{7.2.10}$$

Bei der elastischen Streuung von spinlosen Teilchen ist die Streuamplitude eine komplexe Funktion der Wellenvektoren $\mathfrak{k}_a$ und $\mathfrak{k}_b$ von Anfangs- und Endzustand:

$$A_{ba} = F(\mathfrak{k}_b, \mathfrak{k}_a), \qquad |\mathfrak{k}_b| = |\mathfrak{k}_a|.$$

Der differentielle Querschnitt (7.2.9) wird durch das Quadrat des Betrags der Streuamplitude bestimmt. Deshalb kann die Messung von $d\sigma/d\Omega$ bei gegebener Energie und gegebenem Streuwinkel keine Information über die Phase der komplexen Funktion $F(\mathfrak{k}_b, \mathfrak{k}_a)$ liefern. Wie wir jedoch noch sehen werden, gestattet die Untersuchung der elastischen Streuung bei allen Winkeln, auch die Phase der Funktion $F(\mathfrak{k}_b, k_a)$ zu bestimmen. Das hängt damit zusammen, daß die Amplitude der elastischen Streuung allgemeinen Unitaritätsbeziehungen genügt. Wir wollen diese Beziehungen ableiten, wobei wir einer Arbeit von GLAUBER und SCHOMAKER [7,18] folgen.

Wir betrachten drei Funktionen, die der Gl. (7.2.1) genügen und die bei hinreichend großem r folgendes asymptotisches Verhalten zeigen:

$$\left.\begin{aligned} \psi_a &= \exp(i\,\mathfrak{k}_a\,\mathfrak{r}) + F(\mathfrak{k}_b,\mathfrak{k}_a)\,\frac{\exp(i\,k\,r)}{r}, \\ \psi_{-b} &= \exp(-i\,\mathfrak{k}_b\,\mathfrak{r}) + F(-\mathfrak{k}_a,-\mathfrak{k}_b)\,\frac{\exp(-i\,k\,r)}{r}, \\ \psi_b^* &= \exp(-i\,\mathfrak{k}_b\,\mathfrak{r}) + F^*(\mathfrak{k}_a,\mathfrak{k}_b)\,\frac{\exp(-i\,k\,r)}{r}. \end{aligned}\right\} \tag{7.2.11}$$

Hierbei ist $\mathfrak{k}_a^2 = \mathfrak{k}_b^2 = k^2$. Unter Benutzung von (7.2.1) ist leicht zu sehen, daß die Funktionen (7.2.11) den Beziehungen

$$\psi_{-b}\,\Delta\,\psi_a - \psi_a\,\Delta\,\psi_{-b} = 0,$$
$$\psi_b^*\,\Delta\,\psi_a - \psi_a\,\Delta\,\psi_b^* = 0$$

genügen müssen. Werden diese Gleichungen über das Volumen integriert, welches das Kraftzentrum umgibt, so erhalten wir mit dem GREENschen Satz folgende Oberflächenintegrale:

$$\oint\limits_S \left(\psi_{-b}\,\frac{\partial\psi_a}{\partial r} - \psi_a\,\frac{\partial\psi_{-b}}{\partial r}\right) df = 0, \tag{7.2.12a}$$

$$\oint\limits_S \left(\psi_b^*\,\frac{\partial\psi_a}{\partial r} - \psi_a\,\frac{\partial\psi_b^*}{\partial r}\right) df = 0, \tag{7.2.12b}$$

wobei df das Flächenelement einer Kugel mit dem Radius R ist. Bei hinreichend großem R kann man die Wellenfunktionen auf der Oberfläche der Kugel durch ihre asymptotischen Werte (7.2.11) ersetzen. Dann folgt aus (7.2.12a), daß die Amplituden der elastischen Streuung bei Zeitumkehr gleich sein müssen:

$$F(\mathfrak{k}_b,\mathfrak{k}_a) = F(-\mathfrak{k}_a,-\mathfrak{k}_b), \tag{7.2.13}$$

da die Streuung aus dem Zustand $-\mathfrak{k}_b$ in den Zustand $-\mathfrak{k}_a$ der in der Zeit umgekehrten Streuung $\mathfrak{k}_a \to \mathfrak{k}_b$ entspricht (vgl. Abschn. 8.3.). Damit folgt aus der Gl. (7.2.12b)

$$2\pi\left[F(\mathfrak{k}_b,\mathfrak{k}_a) - F^*(\mathfrak{k}_a,\mathfrak{k}_b)\right] = i\,k\int F^*(\mathfrak{k},\mathfrak{k}_b)\,F(\mathfrak{k},\mathfrak{k}_a)\,d\Omega_{\mathfrak{k}}, \tag{7.2.14}$$

wobei auf der rechten Seite über alle Richtungen des Vektors $\mathfrak{k}$ zu integrieren ist.

Wird in (7.2.14) $\mathfrak{k}_a = \mathfrak{k}_b$ gesetzt, so finden wir eine Beziehung zwischen dem Imaginärteil der Streuamplitude für die Vorwärtsstreuung und dem totalen Wirkungsquerschnitt:

$$\mathfrak{Im}\,F(\mathfrak{k}_a,\mathfrak{k}_a) = \frac{k}{4\pi}\int |F(\mathfrak{k},\mathfrak{k}_a)|^2\,d\Omega_k = \frac{k}{4\pi}\,\sigma, \tag{7.2.15}$$

wobei $\sigma = \int |F|^2\,d\Omega$ der Gesamtquerschnitt der Streuung ist. Die Beziehung (7.2.15) wird *optischer Satz* genannt.

Die Streuamplitude für die Streuung beliebiger spinloser Teilchen in einem beliebigen Kraftfeld muß also den allgemeinen Beziehungen (7.2.13), (7.2.14) und (7.2.15) genügen.

Betrachten wir jetzt den speziellen Fall, daß die elastische Streuung in einem Feld erfolgt, das invariant gegen räumliche Inversion, d. h. invariant gegen die Operation $\hat{I}\,\mathfrak{r} = -\mathfrak{r}$ ist:

$$\hat{I}\,u(\mathfrak{r}) = u(-\mathfrak{r}) = u(\mathfrak{r}). \tag{7.2.16}$$

Zu dieser Art von Feldern gehört speziell das zentralsymmetrische Feld.

Wenn das Kraftfeld $u(\mathfrak{r})$ invariant gegen räumliche Inversion ist, so ist es auch die Streuamplitude:

$$\hat{I}\,F(\mathfrak{k}_b, \mathfrak{k}_a) = F(-\mathfrak{k}_b, -\mathfrak{k}_a) = F(\mathfrak{k}_b, \mathfrak{k}_a). \tag{7.2.17}$$

Die Invarianzbedingung (7.2.17) führt zusammen mit der Bedingung (7.2.13) zu der Gleichung

$$F(\mathfrak{k}_b, \mathfrak{k}_a) = F(\mathfrak{k}_a, \mathfrak{k}_b), \tag{7.2.18}$$

die zeigt, daß die Streuamplitude eine symmetrische Funktion der Wellenvektoren $\mathfrak{k}_a$ und $\mathfrak{k}_b$ ist.

Weiter folgt aus (7.2.14), daß bei Invarianz der Wechselwirkung gegen räumliche Inversion die Streuamplitude der Bedingung

$$\mathfrak{Im}\,F(\mathfrak{k}_b, \mathfrak{k}_a) = \frac{k}{4\pi}\int F^*(\mathfrak{k}_b, \mathfrak{k})\,F(\mathfrak{k}, \mathfrak{k}_a)\,d\Omega_{\mathfrak{k}} \tag{7.2.19}$$

genügt, die wir *Unitaritätsbeziehung für die Streuamplitude* nennen werden.

Wir bezeichnen den differentiellen Querschnitt der elastischen Streuung unter dem Winkel ϑ mit $\sigma(\vartheta) \equiv d\sigma/d\Omega$. Dann folgt bei Berücksichtigung von Gl. (7.2.9)

$$F(\mathfrak{k}_b, \mathfrak{k}_a) \equiv A_{ba}(\vartheta) = \sqrt{\sigma(\vartheta)}\exp\big(i\,\alpha(\vartheta)\big), \tag{7.2.20}$$

wobei der Betrag der Streuamplitude $\sqrt{\sigma(\vartheta)}$ und die Phase $\alpha(\vartheta)$ Funktionen der Energie sind; ϑ ist der Winkel zwischen $\mathfrak{k}_a$ und $\mathfrak{k}_b$.

Wenn der differentielle Wirkungsquerschnitt $\sigma(\vartheta)$ für eine gegebene Streuenergie bei allen Winkeln ϑ gemessen wurde, kann die Phase $\alpha(\vartheta)$ der Streuamplitude als Lösung der Integralgleichung [7,1]

$$\sin\alpha(\vartheta) = \frac{k}{4\pi}\int\left[\frac{\sigma(\vartheta')\,\sigma(\vartheta'')}{\sigma(\vartheta)}\right]^{1/2}\cos\left[\alpha(\vartheta') - \alpha(\vartheta'')\right]d\Omega_{\mathfrak{k}} \tag{7.2.21}$$

bestimmt werden, wobei ϑ' der Winkel zwischen den Vektoren $\mathfrak{k}_a$ und $\mathfrak{k}$ und ϑ'' der Winkel zwischen den Vektoren $\mathfrak{k}_b$ und $\mathfrak{k}$ sind. Zu integrieren ist über alle Richtungen des Vektors $\mathfrak{k}$. Da die Gl. (7.2.21) invariant gegen die Transformation

$$\alpha(\vartheta) \to \pi - \alpha(\vartheta) \tag{7.2.22}$$

ist, kann man die Streuamplitude nur bis auf die Transformation

$$A(\vartheta) \to -A^*(\vartheta) \tag{7.2.23}$$

genau berechnen. Die Messung des Streuquerschnitts bei vorgegebener Energie und für alle Winkel gestattet somit, die Streuamplitude bis auf die Transformation (7.2.23) zu bestimmen.

7.3. Streuung von spinlosen Teilchen in einem zentralsymmetrischen Feld

Wenn das Potential des Feldes, in dem die Streuung vor sich geht, kugelsymmetrisch ist, d. h., wenn $V(\mathfrak{r}) = V(|\mathfrak{r}|)$ ist, so kann man die Lösung von (7.2.1) als Superposition von Partialwellen darstellen, die Zuständen mit bestimmtem Drehimpuls entsprechen:

$$\psi(\mathfrak{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\, i^l \frac{R_l(r)}{k\,r} P_l(\cos\vartheta). \tag{7.3.1}$$

Hierbei ist ϑ der Winkel zwischen $\mathfrak{r}$ und dem Wellenvektor $\mathfrak{k}_a$ der einfallenden Welle. Die Radialfunktion $R_l(r)$ genügt der Gleichung

$$\left\{\frac{d^2}{d r^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} + k^2\right\} R_l(r) = u(r)\, R_l(r) \tag{7.3.2}$$

und der Randbedingung

$$R_l(0) = 0. \tag{7.3.3}$$

Wir zerlegen die einfallende ebene Welle $\varphi_a(r)$ nach den Eigenfunktionen des Drehimpulsoperators:

$$\varphi_a(r) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\, i^l j_l(k\,r)\, P_l(\cos\vartheta). \tag{7.3.4}$$

Hierbei sind $j_l(k\,r)$ sphärische BESSEL-Funktionen, die durch die übliche BESSEL-Funktion mit halbzahligem Index über die Beziehung

$$j_l(x) \equiv \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, J_{l+1/2}(x)$$

ausgedrückt werden können. Die sphärischen BESSEL-Funktionen zeigen folgendes asymptotisches Verhalten:[1])

$$j_l(x) = \begin{cases} \dfrac{x^l}{(2l+1)!!} & \text{für} \quad x \ll 1, \\[2ex] \dfrac{\sin\left(x - \dfrac{l\pi}{2}\right)}{x} & \text{für} \quad x \gg 1, \end{cases} \tag{7.3.5}$$

wobei $(2l+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2l+1)$ ist.

Die ebene Welle kann somit in großen Entfernungen vom Gebiet der Kraftwirkung ($k\,r \gg 1$) in der Form

$$\varphi_a(r) = \frac{1}{k\,r} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\, i^l P_l(\cos\vartheta)\, \varrho_l(r) \tag{7.3.6}$$

[1]) Wir wollen die explizite Form der sphärischen BESSEL-Funktionen für die ersten drei l-Werte in Erinnerung bringen:

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x};$$

$$j_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}; \qquad j_2(x) = \frac{1}{x}\left\{\left(\frac{3}{x^2} - 1\right)\sin x - \frac{3}{x}\cos x\right\}.$$

geschrieben werden, wobei gilt

$$\varrho_l(r) = \sin\left(k r - \frac{l\pi}{2}\right) = \frac{i}{2}\left\{e^{-i\left(kr-\frac{l\pi}{2}\right)} - e^{i\left(kr-\frac{l\pi}{2}\right)}\right\}. \tag{7.3.7}$$

Das erste Glied in den geschweiften Klammern von (7.3.7) entspricht einlaufenden, das zweite vom Zentrum weglaufenden Wellen.

Die Wechselwirkung des Stromes einfallender Teilchen mit dem Streuzentrum verändert die Amplitude der vom Zentrum auslaufenden Wellen. Deshalb kann der Radialteil der Wellenfunktion, die durch die SCHRÖDINGER-Gleichung (7.3.2) beschrieben wird, für $k r \gg 1$ in der Form

$$\begin{aligned} R_l(r) &= \frac{i}{2}\left\{e^{-i\left(kr-\frac{l\pi}{2}\right)} - S_l e^{i\left(kr-\frac{l\pi}{2}\right)}\right\} \equiv \\ &\equiv \sin\left(k r - \frac{l\pi}{2}\right) + \frac{S_l - 1}{2i}\exp\left[i\left(k r - \frac{l\pi}{2}\right)\right] \end{aligned} \tag{7.3.8}$$

geschrieben werden. Der Koeffizient S_l in (7.3.8), der das Verhältnis zwischen den Amplituden der auslaufenden und einlaufenden Wellen bestimmt, ist das Diagonalelement der *Streumatrix*, das zum Bahndrehimpuls l gehört.

Wird (7.3.8) in (7.3.1) eingesetzt, so erhalten wir

$$\psi(\mathfrak{r}) = \varphi_a(\mathfrak{r}) + A(\vartheta)\frac{e^{ikr}}{r}, \qquad k r \gg 1, \tag{7.3.9}$$

wobei die Streuamplitude $A(\vartheta)$ durch die Elemente S_l der Streumatrix ausgedrückt wird:

$$A(\vartheta) = \frac{i}{2k}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\,P_l(\cos\vartheta)\,(1 - S_l). \tag{7.3.10}$$

Die Elemente S_l der Streumatrix sind komplexe Zahlen; im Falle der elastischen Streuung können sie durch die reellen *Phasenverschiebungen* („*phase shift*“ oder *Streuphasen*) δ_l ausgedrückt werden:

$$S_l = \exp(2i\,\delta_l) \quad \text{oder} \quad S_l - 1 = 2i\,e^{i\delta_l}\sin\delta_l. \tag{7.3.11}$$

Aus (7.3.11) folgt, daß die Phasenverschiebungen δ_l nicht eindeutig bestimmt sind. Die Phasenverschiebungen können willkürlich so gewählt werden, daß sie entweder im Intervall von 0 bis π oder im Intervall $-\pi/2$ bis $\pi/2$ liegen. Wenn im weiteren keine speziellen Hinweise erfolgen, benutzen wir das Intervall $-\pi/2 \leqq \delta \leqq \pi/2$.

Mit Hilfe von (7.3.10) und (7.3.11) können wir den differentiellen Querschnitt für die Streuung in das Raumwinkelelement $d\Omega$ in folgender Form darstellen:

$$\begin{aligned} d\sigma = |A(\vartheta)|^2\,d\Omega = \frac{1}{k^2}\sum_{l,l'}(2l+1)\,(2l'+1)\,P_l(\cos\vartheta)\,P_{l'}(\cos\vartheta)\,\times \\ \times\,\sin\delta_l\sin\delta_{l'}\cos(\delta_l - \delta_{l'})\,d\Omega. \end{aligned} \tag{7.3.12}$$

Wir benutzen weiterhin die bekannte Formel für das Produkt von LEGENDREschen Polynomen

$$P_l(\cos\vartheta)\,P_{l'}(\cos\vartheta) = \sum_{L=|l-l'|}^{l+l'} [(l\,l'\,0\,0\,|\,L\,0)]^2\,P_L(\cos\vartheta),$$

wobei $(l\,l'\,0\,0\,|\,L\,0)$ die Vektoradditionskoeffizienten sind (s. Anhang 1). Gl. (7.3.12) nimmt damit die Form

$$d\sigma = \frac{1}{k^2}\sum_{L=0}^{\infty} B_L\,P_L(\cos\vartheta)\,d\Omega \tag{7.3.13}$$

an, wobei gesetzt ist

$$B_L = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{l'=|L-l|}^{L+l}(2l+1)\,(2l'+1)\,[(l\,l'\,0\,0\,|\,L\,0)]^2 \sin\delta_l \sin\delta_{l'} \cos(\delta_l - \delta_{l'}). \tag{7.3.13a}$$

Wird (7.3.13) über alle Winkel integriert, so erhalten wir den integralen Streuquerschnitt:

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} B_0, \tag{7.3.14}$$

wobei gemäß (7.3.13a)

$$B_0 = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\sin^2\delta_l \tag{7.3.14a}$$

gilt, da

$$[(l\,l'\,0\,0\,|\,0\,0)]^2 = \frac{\delta_{ll'}}{2l+1}$$

ist.

Den integralen Streuquerschnitt kann man also als Summe von partiellen Streuquerschnitten σ_l darstellen, die zu bestimmten Werten von l gehören:

$$\sigma = \sum_{l=0}^{\infty}\sigma_l, \tag{7.3.15}$$

wobei

$$\sigma_l = \frac{4\pi}{k^2}(2l+1)\sin^2\delta_l = \frac{\pi}{k^2}(2l+1)\,|1-S_l|^2 \tag{7.3.15a}$$

ist.

Wenn zur Charakterisierung der Streuung eine kleine Zahl von Null verschiedener Phasenverschiebungen ausreicht (die Bedingungen dafür leiten wir weiter unten her), so kann man nach der Bestimmung des Streuquerschnitts als Funktion des Winkels ϑ mit Hilfe der Formel (7.3.13) die B_L ausrechnen und danach unter Benutzung von (7.3.13a) und (7.3.14a) die Streuphasen finden. Diese Auswertung der experimentellen Daten wird als *Phasenanalyse der Streuquerschnitte* bezeichnet.

Aufgabe der Streutheorie ist es, die Phasenverschiebungen oder die Streuamplituden aus einem vorgegebenen Potential $V(r)$ zu berechnen. Da jedoch in der Kernphysik die Gesetze der Kernwechselwirkung noch unzureichend untersucht sind, hat die umgekehrte Aufgabe besonders große Bedeutung.

Sie besteht in der Bestimmung des Potentials aus den experimentellen Werten der Phasenverschiebungen oder der Bestimmung der Streuamplitude aus den gemessenen Streuquerschnitten. Diese Größen sind durch die Beziehung $d\sigma(\vartheta) = |A(\vartheta)|^2 \, d\vartheta$ verknüpft. Deshalb erhält man aus dem experimentellen Wert von $d\sigma$ die Streuamplitude nur bis auf einen unbestimmten Phasenfaktor, da $A(\vartheta)$ und $A^*(\vartheta)$ ein und denselben Streuquerschnitt ergeben. Diese Mehrdeutigkeit wird zum Teil mit den sogenannten Dispersionsrelationen der Streutheorie beseitigt, die Imaginär- und Realteil der Streuamplitude verbinden (vgl. Abschn. 8.4.).

Unter Benutzung von (7.3.10) kann man leicht zeigen, daß der Imaginärteil der Streuamplitude für die Vorwärtsstreuung die Form

$$\mathfrak{Im}\, A(0) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l$$

besitzt. Vergleichen wir diesen Wert mit (7.3.14a), so können wir uns überzeugen, daß der integrale Wirkungsquerschnitt mit dem Imaginärteil der Streuamplitude für die Vorwärtsstreuung durch die einfache Beziehung

$$\sigma = \frac{4\pi}{k} \mathfrak{Im}\, A(0) \tag{7.3.16}$$

zusammenhängt, die wir schon im Abschn. 7.2. erhalten hatten. Dort wurde auch bereits gezeigt, daß man die Streuamplitude nur bis auf die Transformation $A(\vartheta) \to -A^*(\vartheta)$ bestimmen kann, wenn der differentielle Streuquerschnitt für alle Winkel bekannt ist. Diese Transformation entspricht einer Änderung des Vorzeichens aller Phasenverschiebungen, wie leicht aus (7.3.10) und (7.3.11) zu ersehen ist.

Betrachten wir nun, wie die Phasenverschiebungen δ_l (oder die Streumatrix S_l) mit der potentiellen Wechselwirkungsenergie $V(r)$ zusammenhängen. Dazu müssen wir die Lösung der Wellengleichung (7.3.2) für den Radialteil als Summe der einfallenden und auslaufenden Wellen darstellen.

Der Differentialgleichung (7.3.2) mit den Randbedingungen (7.3.3) im Nullpunkt und (7.3.8) im Unendlichen entspricht die Integralgleichung

$$R_l(r) = g_l(r) + \int_0^{\infty} G_l(r, r')\, u(r')\, R_l(r')\, dr', \tag{7.3.17}$$

wobei die GREENsche Funktion auf der linken Seite der Gl. (7.3.2) durch die Bedingungen

$$G_l(r, r') = \begin{cases} \frac{1}{k} g_l(r)\, W_l(r') & \text{für} \quad r \leqq r', \\ \frac{1}{k} W_l(r)\, g_l(r') & \text{für} \quad r \geqq r' \end{cases} \tag{7.3.18}$$

bestimmt wird. Dabei sind die Funktionen

$$\left.\begin{aligned} g_l(r) &= k\, r\, j_l(k\, r), \\ W_l(r) &= k\, r[n_l(k\, r) - i\, j_l(k\, r)] \end{aligned}\right\} \tag{7.3.18a}$$

die Eigenfunktionen des Operators

$$\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} + k^2.$$

Aus (7.3.18a) ist zu ersehen, daß sie durch die sphärische BESSEL-Funktion $j_l(x)$ und die sphärische NEUMANN-Funktion $n_l(x)$, die bei $x = 0$ singulär ist, ausgedrückt werden. Die sphärischen NEUMANN-Funktionen erhält man aus den entsprechenden NEUMANN-Funktionen mit halbzahligem Index:

$$n_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, N_{l+1/2}(x).$$

Sie besitzen folgende asymptotische Eigenschaften:

$$n_l(x) = \begin{cases} -\dfrac{(2l-1)!!}{x^{l+1}} & \text{für} \quad x \ll 1 \\[2ex] -\dfrac{\cos\left(x - \dfrac{\pi l}{2}\right)}{x} & \text{für} \quad x \gg 1. \end{cases}$$

Wird der asymptotische Wert der Funktion $W_l(x)$ für $x \gg 1$

$$W_l(x) = -\exp\left(i\left[x - \frac{l\pi}{2}\right]\right)$$

in (7.3.17) eingesetzt, so erhalten wir

$$R_l(r) = \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right) - \left[\frac{1}{k}\int_0^\infty g(r')\, u(r')\, R_l(r')\, dr'\right] e^{i\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right)}, \qquad kr \gg 1.$$

Vergleichen wir dies mit (7.3.8), so folgt

$$S_l \equiv e^{2i\delta_l} = 1 + \frac{2}{ik}\int_0^\infty g_l(r)\, u(r)\, R_l(r)\, dr. \tag{7.3.19}$$

Unter Benutzung von (7.3.11) kann man auch schreiben

$$e^{i\delta_l}\sin\delta_l = -\frac{1}{k}\int_0^\infty g_l(r)\, u(r)\, R_l(r)\, dr. \tag{7.3.19a}$$

Ist die Lösung der Integralgleichung (7.3.17) bekannt, so kann man hiermit die Streumatrix und die Phasenverschiebungen δ_l berechnen.

Bei kleinen Werten der Phasen kann man $\exp\{2i\,\delta_l\}$ in eine Reihe entwickeln. Unter Berücksichtigung von (7.3.19) erhält man

$$\delta_l = -\int_0^\infty j_l(kr)\, u(r)\, R_l(r)\, r\, dr. \tag{7.3.20}$$

Wenn das System keine gebundenen Niveaus besitzt, so sind die Vorzeichen von $j_l(kr)$ und $R_l(r)$ im Gebiet der Kraftwirkung gleich. In diesem Fall ist die Phasenverschiebung entsprechend (7.3.20) bei abstoßenden Kräften

$(u(r) > 0)$ negativ $(\delta_l < 0)$ und bei anziehenden Kräften $(u(r) < 0)$ positiv $(\delta_l > 0)$. Wenn die Wechselwirkungsenergie ihr Vorzeichen ändert, so hängt das Vorzeichen der Phasenverschiebung davon ab, ob die Anziehungs- oder die Abstoßungskräfte überwiegen.

In Abb. 50 ist die Radialfunktion $R_l(r)$ für ein anziehendes und ein abstoßendes Potential im Vergleich zur Funktion $j_l(k\,r)$, die dem kräftefreien Fall entspricht, dargestellt.

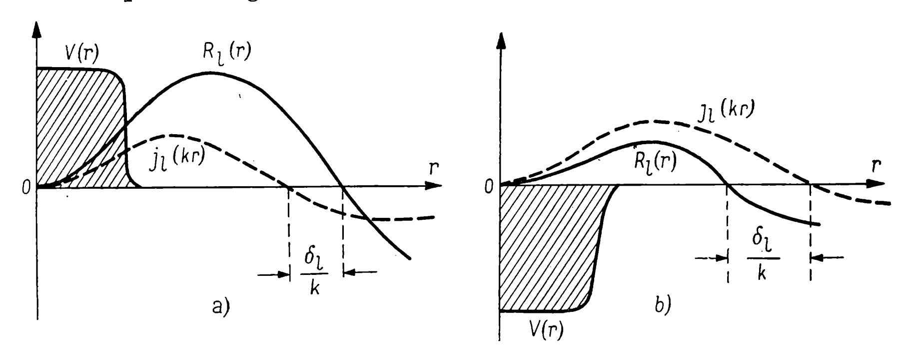


Abb. 50. Qualitative Darstellung der Radialwellenfunktion $R_l(r)$ für den Fall, daß keine gebundenen Niveaus vorhanden sind
a) abstoßendes Potential; b) anziehendes Potential

Wir wollen annehmen, daß das Wechselwirkungspotential den Wirkungsradius d besitzt und daß $k\,d \ll 1$ ist; dann erhalten wir bei Benutzung des asymptotischen Ausdrucks (7.3.5)

$$\delta_l = -\int_0^d j_l(k\,r)\,u(r)\,R_l(r)\,r\,d\,r \approx -\frac{k^l}{(2l+1)!!}\int_0^d r^{l+1}\,u(r)\,R_l(r)\,d\,r.$$

Eine grobe Abschätzung dieses Integrals erhalten wir, wenn wir an Stelle von $R_l(r)$ das erste Glied von (7.3.17) einsetzen:

$$\delta_l \approx -\frac{k^{2l+1}}{[(2l+1)!!]^2}\int_0^d r^{2l+2}\,u(r)\,d\,r \approx -\frac{(k\,d_1)^{2l+1}}{[(2l+1)!!]^2}\int_0^d r\,u(r)\,d\,r,$$

wobei d_1 der effektive Wechselwirkungsradius ist. Es erweist sich somit, daß bei Verringerung der Energie alle Phasenverschiebungen abnehmen:

$$\delta_l \sim (k\,d)^{2l+1} \sim \left(\sqrt{E}\,d\right)^{2l+1}, \tag{7.3.21}$$

und dies um so schneller, je größer l ist. Die Fakultäten im Nenner wachsen ebenfalls sehr stark mit l:

l	0	1	2	3
$[(2l+1)!!]^2$	1	9	225	11025

Bei kleinen Energien und kleiner Reichweite der Kernkräfte ($k\,d \ll 1$) liefert folglich nur die Phasenverschiebung δ_0 einen wesentlichen Beitrag zum Streuquerschnitt. In diesem Fall ist die Streuung im Schwerpunktsystem kugelsymmetrisch.

In Abb. 51 ist dargestellt, wie sich die Werte der Phasenverschiebungen δ_0 und δ_1 mit wachsender Energie des an einem rechteckigen Potentialtopf ($V_0 = -42$ MeV, $d = 4{,}2 \cdot 10^{-13}$ cm) gestreuten Neutrons ändern. Wir sehen,

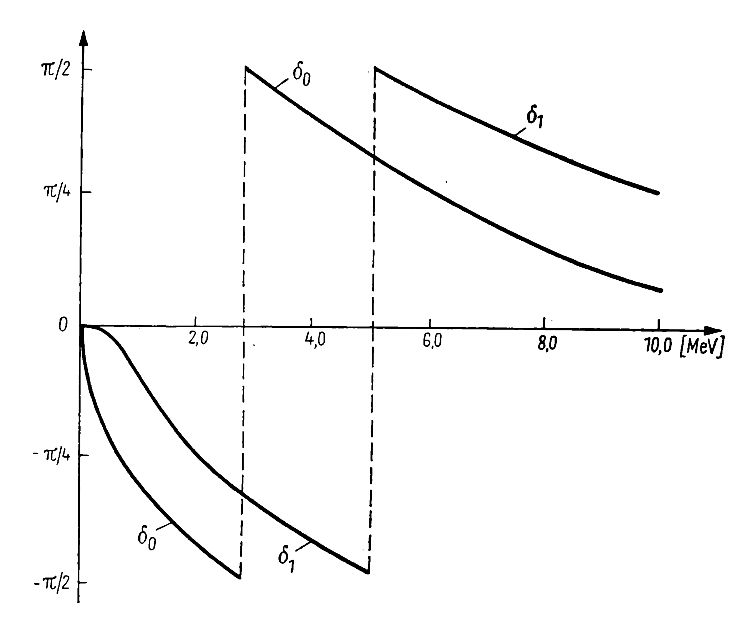


Abb. 51. Änderung der Phasenverschiebungen δ_0 und δ_1 mit wachsender Energie bei der Streuung von Neutronen an einem rechteckigen Potentialtopf

daß mit wachsender Neutronenenergie die Absolutwerte von δ_0 und δ_1 zunächst zunehmen, bis bei den Energien 2,83 bzw. 5,01 MeV der Wert $-\pi/2$ angenommen wird. Beim Durchgang durch diese Energiewerte ändern sich die Phasenverschiebungen sprunghaft auf $+\pi/2$ und nehmen bei weiterem Anwachsen der Energie ab. Die Partialquerschnitte

$$\sigma_l = \frac{4\pi}{k^2}(2l+1)\sin^2\delta_l$$

besitzen ihre Maximalwerte bei den Energien, für die $|\delta_l| = \pi/2$ gilt, wenn man die geringe Verschiebung außer acht läßt, die durch den Faktor k^{-2} hervorgerufen wird. Die Energiewerte, für die $\delta_l = \pi/2$ ist, nennt man deshalb die *virtuellen Niveaus* des Neutrons im Potentialtopf.

Manchmal wird an Stelle des asymptotischen Ausdrucks des Radialteils der Wellenfunktion (7.3.8)

$$R_l(r) = \sin\left(k r - \frac{l\pi}{2}\right) + \frac{S_l - 1}{2i} \exp\left\{i\left(k r - \frac{l\pi}{2}\right)\right\}$$

ein anderer Ausdruck verwendet:

$$R_l'(r) = \sin\left(k r - \frac{l\pi}{2}\right) + \tan\delta_l \cos\left(k r - \frac{l\pi}{2}\right). \tag{7.3.22}$$

Bei diesem asymptotischen Verhalten der radialen Wellenfunktion, die keinen auslaufenden, sondern stehenden Wellen entspricht, muß man zur Bestimmung von $\tan\delta_l$, aus dem die Phasenverschiebung folgt, von der Integralgleichung

$$R_l'(r) = g_l(r) + \int_0^\infty K_l(r, r')\, u(r')\, R_l'(r')\, dr' \tag{7.3.23}$$

ausgehen, wobei sich die GREENsche Funktion aus folgenden Bedingungen ergibt:

$$K_l(r, r') = \begin{cases} \frac{1}{k} g_l(r)\, \nu_l(r') & \text{für} \quad r \leqq r', \\ \frac{1}{k} g_l(r')\, \nu_l(r) & \text{für} \quad r > r'. \end{cases}$$

Dabei hat die Funktion $\nu_l(r) = k r\, n_l(k r)$ gerade das asymptotische Verhalten

$$\nu_l(r) = -\cos\left(k r - \frac{l\pi}{2}\right), \qquad k r \gg 1 \tag{7.3.24}$$

bei großen r. Wird (7.3.24) berücksichtigt, so erhalten wir aus (7.3.23) den asymptotischen Wert

$$R_l'(r) = \sin\left(k r - \frac{l\pi}{2}\right) - \left[\frac{1}{k}\int_0^\infty g(r)\, u(r)\, R'(r)\, dr\right] \cos\left(k r - \frac{l\pi}{2}\right). \tag{7.3.25}$$

Aus dem Vergleich von (7.3.25) mit (7.3.22) folgt

$$\tan\delta_l = -\frac{1}{k}\int_0^\infty g_l(k r)\, u(r)\, R_l'(r)\, dr. \tag{7.3.26}$$

Zur Berechnung der Phasenverschiebungen δ_l aus der Beziehung (7.3.26) muß zunächst $R_l'(r)$ aus der Integralgleichung (7.3.23) bestimmt werden.

SCHWINGER [7,2] machte den Vorschlag, die Integralgleichung (7.3.23) durch eine Variationsgleichung zu ersetzen. Um die SCHWINGERsche Gleichung zu erhalten, multiplizieren wir (7.3.23) mit $u(r)\, R_l'(r)\, dr$ und integrieren über r:

$$\int_0^\infty u(r)\, [R_l'(r)]^2 dr = \int_0^\infty g_l(r)\, u(r)\, R_l'(r)\, dr + \int_0^\infty dr \int_0^\infty dr'\, u(r)\, R_l(r)\, K(r, r')\, u(r')\, R_l'(r').$$

Wird diese Gleichung durch

$$\left\{\int_0^\infty g_l(r)\,u(r)\,R_l'(r)\,dr\right\}^2$$

dividiert, so erhalten wir

$$\left\{\int g_l(r)\,u(r)\,R_l'(r)\,dr\right\}^{-1} = \frac{\int\limits_0^\infty u(r)\,[R_l'(r)]^2 dr - \int dr \int dr'\,u(r)\,R'(r)\,K(r,r')\,u(r')\,R'(r'}{\left[\int\limits_0^\infty g_l(r)\,u(r)\,R_l'(r)\,dr\right]^2}$$

Mit (7.3.26) ergibt sich endgültig

$$k\cot\delta_l = \frac{\int dr \int dr'\,u(r)\,R_l'(r)\,K(r,r')\,u(r')\,R_l'(r') - \int u(r)\,R_l'^2(r)\,dr}{\left[\frac{1}{k}\int g_l(r)\,u(r)\,R'(r)\,dr\right]^2}. \tag{7.3.27}$$

Die Gl. (7.3.27) kann man als Variationsprinzip für $k\cot\delta_l$ betrachten, da die Funktion $R_l'(r)$, die der Integralgleichung (7.3.23) genügt, den Ausdruck (7.3.27) stationär macht. Aus den stationären Eigenschaften von (7.3.27) folgt, daß der Fehler für das aus (7.3.27) erhaltene $k\cot\delta_l$ von der gleichen Größenordnung ist wie das Quadrat des Fehlers der Wellenfunktion $R_l'(r)$ (im Wirkungsbereich der Kräfte). Der zweite Vorteil von (7.3.27) ist, daß in jedem Glied des Zählers und im Nenner die Funktion $R_l'(r)$ in der gleichen Potenz auftritt. Deshalb braucht man sich bei der Berechnung von (7.3.27) nicht mit der Normierung von $R_l'(r)$ zu befassen.

7.4. Streuung von Nukleonen an einem Zentralpotential, das eine Spin-Bahn-Kopplung enthält

Bei der im vorhergehenden Abschnitt durchgeführten Untersuchung der Streuung von Teilchen an einem zentralsymmetrischen Potential ließen wir die Teilchenspins außer acht. Dies ist zulässig, wenn die Teilchen den Spin Null haben oder wenn das Wechselwirkungspotential nicht von der Spinorientierung abhängt. Betrachten wir jetzt die Streuung eines Nukleons an einem Potential, das einen Spin-Bahn-Anteil enthält, d. h., das von der Orientierung des Nukleonenspins bezüglich des Bahndrehimpulses abhängt. Als Beispiel dafür können wir das im optischen Modell (s. auch Abschn. 4.1.) benutzte Potential anführen. Es läßt sich in der Form

$$V(r) = V_1(r) + V_2(r)\,\mathfrak{l}\,\mathfrak{s} \tag{7.4.1}$$

schreiben. Bei Berücksichtigung des Spinzustandes des Nukleons besitzt die einfallende Welle die Form

$$\varphi_a(\mathfrak{r},\sigma) = \chi_{{}^1\!/_2\, m}(\sigma)\exp\{i\,\mathfrak{k}_a\,\mathfrak{r}\}. \tag{7.4.2}$$

Zur einfachsten Beschreibung des Streuprozesses zerlegt man (7.4.2) nach den Eigenfunktionen des HAMILTON-Operators, der das Potential (7.4.1) enthält.

Da bei diesem HAMILTON-Operator der Gesamtdrehimpuls und der Nukleonenspin Bewegungsintegrale sind, muß die Entwicklung von (7.4.2) nach Kugelfunktionen mit Spin Φ_{ljm} durchgeführt werden (s. Anhang 1.3.). Diese Zerlegung ist leicht zu erhalten, wenn man $\exp(i\,\mathfrak{k}_a\,\mathfrak{r})$ nach Kugelfunktionen entwickelt und das Vektoradditionstheorem benutzt:

$$\chi_{1/2\,m}(\sigma)\,Y_{l0}(\vartheta) = \sum_{j=l-1/2}^{l+1/2}\left(\frac{1}{2}\,l\,m\,0\,|\,j\,m\right)\Phi_{ljm}(\sigma,\vartheta). \tag{7.4.3}$$

Es ergibt sich

$$\varphi_a(\mathfrak{r},\sigma) = \sum_{l,j} i^l\sqrt{4\pi(2l+1)}\left(\frac{1}{2}\,l\,m\,0\,|\,j\,m\right)\Phi_{ljm}(\sigma,\vartheta)\,j_l(k_a\,r). \tag{7.4.4}$$

Wenn das Potential (7.4.1) eine begrenzte Reichweite hat, deren Radius gleich R ist, so kann man bei $r > R$ unter Benutzung der asymptotischen Darstellung der sphärischen BESSEL-Funktion schreiben

$$\varphi_a(\mathfrak{r},\sigma) = \sum_{l,j} i^l\sqrt{4\pi(2l+1)}\left(\frac{1}{2}\,l\,m\,0\,|\,j\,m\right)\Phi_{ljm}\frac{i}{2kr}\left\{\mathrm{e}^{-i\left(kr-\frac{l\pi}{2}\right)} - \mathrm{e}^{i\left(kr-\frac{l\pi}{2}\right)}\right\}. \tag{7.4.5}$$

Die Wellenfunktion, die die Wechselwirkung mit dem Potential (7.4.1) berücksichtigt, kann jetzt (für $r > R$) in der Form

$$\psi(\mathfrak{r},\sigma) = \sum_{l,j} i^l\sqrt{4\pi(2l+1)}\,\times \tag{7.4.6}$$
$$\times\left(\frac{1}{2}\,l\,m\,0\,|\,j\,m\right)\Phi_{ljm}\frac{i}{2kr}\left\{\mathrm{e}^{-i\left(kr-\frac{l\pi}{2}\right)} - S_{lj}\,\mathrm{e}^{i\left(kr-\frac{l\pi}{2}\right)}\right\}$$

geschrieben werden, wobei S_{lj} ein Koeffizient ist, der die Änderung der Amplitude der auslaufenden Kugelwelle infolge der Wirkung des Potentials bestimmt. S_{lj} ist ein Element der Streumatrix, die von der Form des Potentials (7.4.1) und der Teilchenenergie abhängt.

Trennt man aus (7.4.6) die einfallende Welle ab, so kann man schreiben:

$$\psi(\mathfrak{r},\sigma) = \varphi_a(\mathfrak{r},\sigma) + \tag{7.4.7}$$
$$+\sum_{l,j} i^l\sqrt{4\pi(2l+1)}\left(\frac{1}{2}\,l\,m\,0\,|\,j\,m\right)\Phi_{ljm}\frac{S_{lj}-1}{2ikr}\exp\left\{i\left(kr-\frac{l\pi}{2}\right)\right\}.$$

Berücksichtigt man, daß bei $x \gg 1$ die Beziehung

$$\frac{\exp\left(i\left[x-\frac{l\pi}{2}\right]\right)}{i\,x} = h_l(x)$$

gilt, wobei $h_l(x)$ die sphärische HANKEL-Funktion erster Art ist, so kann man (7.4.7) auf eine in der Literatur oft benutzte Form bringen:

$$\psi = \varphi_a + \sum_{l,j} i^l\sqrt{4\pi(2l+1)}\left(\frac{1}{2}\,l\,m\,0\,|\,j\,m\right)\Phi_{ljm}\frac{S_{lj}-1}{2}\,h_l(kr). \tag{7.4.7a}$$

Die Wellenfunktion (7.4.7) kann in der Form

$$\psi = \varphi_a + A\,\frac{e^{ikr}}{r} \tag{7.4.8}$$

geschrieben werden, wobei die Streuamplitude

$$A(\vartheta) = \frac{i}{2k} \sum_{l,j} \sqrt{4\pi(2l+1)} \left(\frac{1}{2}\, l\, m\, 0 | j\, m\right) \Phi_{ljm}(1 - S_{lj}) \tag{7.4.9}$$

ist. Der differentielle Wirkungsquerschnitt für eine Streuung in den Raumwinkel $d\Omega$ wird durch die Streuamplitude mit Hilfe der bekannten Formel

$$d\sigma = |A(\vartheta)|^2\, d\Omega \tag{7.4.10}$$

ausgedrückt. Integrieren wir über den gesamten Raumwinkel und mitteln über die Polarisationszustände des Nukleons, so erhalten wir den integralen Streuquerschnitt:

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{2} \sum_m \int |A(\vartheta)|^2\, d\Omega = \sum_l \sum_{j=l-1/2}^{l+1/2} \frac{\pi}{2k^2} (2j+1)\, |1 - S_{lj}|^2. \tag{7.4.11}$$

Bei der Ableitung von (7.4.11) benutzten wir, daß die Funktionen Φ_{ljm} ein Orthonormalsystem bilden. Außerdem gebrauchten wir die Beziehung

$$\sum_m \left[\left(\frac{1}{2}\, l\, m\, 0 | j\, m\right)\right]^2 = \frac{2j+1}{2l+1}.$$

Über

$$S_{lj} - 1 = 2i \sin\delta_{lj} \exp(i\,\delta_{lj})$$

können wir die Phasenverschiebungen δ_l einführen und (7.4.11) in folgender Form schreiben:

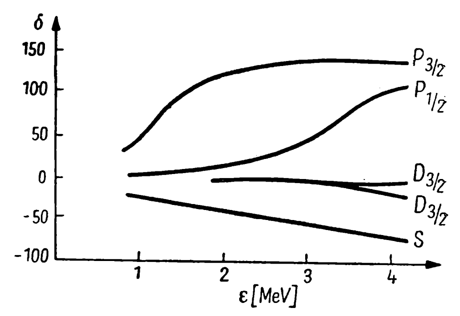


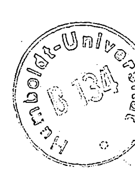
Abb. 52. Die Phasenverschiebungen δ, die die Streuung von Neutronen am ^{4}He-Kern beschreiben

$$\bar{\sigma} = \frac{2\pi}{k^2} \sum_{l=0} \sum_{j=l-1/2}^{l+1/2} (2j+1) \sin^2\delta_{lj}. \tag{7.4.12}$$

In Abb. 52 sind die Phasenverschiebungen dargestellt, die nach den Angaben von HUBER und BALDINGER [7,3] den integralen ($\bar{\sigma}$) und den differentiellen Streuquerschnitt für die Streuung von Neutronen an ^{4}He im Gebiet von $0 \cdots 4$ MeV gut beschreiben.

Untersucht man die Polarisation der Nukleonen bei der Streuung an einem Potentialfeld, das eine Spin-Bahn-Wechselwirkung enthält, so ist es günstig, bei den Rechnungen die Spinwellenfunktion $\chi_{1/2\,m}$ beizubehalten. Mit anderen Worten, es ist vorteilhaft, die Wellenfunktion für den Zustand des Systems in großen Entfernungen vom Streuzentrum in der Form

$$\psi = \varphi_a + f(\vartheta)\,\frac{e^{ikr}}{r}\,\chi_{1/2\,m} \tag{7.4.13}$$



zu schreiben. Diese Darstellung ist möglich, wenn wir die beiden Projektionsoperatoren Π^+ und Π^- einführen, die folgende Eigenschaften besitzen: Wirkt der Operator Π^+ auf die Funktion $Y_{l0}\,\chi_{1/2\,m}$, so bringt er in der Zerlegung (7.4.3) alle diejenigen Glieder zum Verschwinden, die der Funktion $\Phi_{l,l-1/2,m}$ entsprechen. Der Operator Π^- läßt alle Glieder mit $j = l + 1/2$ verschwinden und wirkt nicht auf Glieder mit $j = l - 1/2$. Da die Funktionen Φ_{ljm} (s. Anhang 1.3.) Eigenfunktionen des Operators $\hat{\vec{\sigma}}\hat{\mathfrak{l}}$ mit den Eigenwerten

$$\left(\hat{\vec{\sigma}}\hat{\mathfrak{l}}\right)\Phi_{l,l+1/2,m} = l\,\Phi_{l,l+1/2,m}, \qquad \hat{\mathfrak{l}} = -i[\mathfrak{r}\,\nabla],$$

$$\left(\hat{\vec{\sigma}}\hat{\mathfrak{l}}\right)\Phi_{l,l-1/2,m} = -(l+1)\,\Phi_{l,l-1/2,m}$$

sind, kann man die Projektionsoperatoren Π^+ und Π^- in folgender Form schreiben:

$$\Pi^+ = \frac{l+1+\hat{\vec{\sigma}}\hat{\mathfrak{l}}}{2l+1}, \qquad \Pi^- = \frac{l-\hat{\vec{\sigma}}\hat{\mathfrak{l}}}{2l+1}. \tag{7.4.14}$$

Mit Hilfe der Operatoren (7.4.14) kann man die Funktion (7.4.7) auf die Form

$$\begin{aligned}\psi = \varphi_a + \sum_l \sqrt{4\pi(2l+1)}\,\{\Pi^+(S_{l,l+1/2}-1) + \\ + \Pi^-(S_{l,l-1/2}-1)\}\,Y_{l0}\,\chi_{1/2\,m}\frac{e^{ikr}}{2ikr}\end{aligned} \tag{7.4.15}$$

bringen. Führt man die Phasenverschiebungen δ_l^+ und δ_l^- über die Beziehungen

$$S_{l,l\pm1/2} - 1 = 2i\exp(i\,\delta_l^\pm)\sin\delta_l^\pm$$

ein und benutzt die explizite Form der Operatoren (7.4.14), so kann man schreiben

$$\begin{aligned}\psi = \varphi_a + \sum_l \frac{4\pi}{2l+1}\{[(l+1)\exp(i\,\delta_l^+)\sin\delta_l^+ + l\exp(i\,\delta_l^-)\sin\delta_l^-]\,Y_{l0} + \\ + [\exp(i\,\delta_l^+)\sin\delta_l^+ - \exp(i\,\delta_l^-)\sin\delta_l^-]\,\hat{\vec{\sigma}}\hat{\mathfrak{l}}\,Y_{l0}\}\frac{\exp(ikr)}{kr}\chi_{1/2\,m}.\end{aligned} \tag{7.4.16}$$

Wenn der Vektor $\mathfrak{k}_b$ die Streurichtung bestimmt, so kann man sich leicht überzeugen, daß

$$(\hat{\vec{\sigma}}\hat{\mathfrak{l}})\,Y_{l0} = i\sin\vartheta\,\frac{\partial Y_{l0}}{\partial\cos\vartheta}\,\vec{\sigma}\,\mathfrak{n} \tag{7.4.17}$$

ist, wobei der Einheitsvektor $\mathfrak{n}$ durch die Beziehung

$$\mathfrak{n}\,k^2\sin\vartheta = [\mathfrak{k}_b\,\mathfrak{k}_a]$$

bestimmt wird. Bei Berücksichtigung von (7.4.17) kann man die Funktion (7.4.16) auf die Form (7.4.13) bringen, wenn man

$$f(\vartheta) = A(\vartheta)\,I + B(\vartheta)\,\vec{\sigma}\,\mathfrak{n} \tag{7.4.18}$$

setzt. Mit I wird die zweireihige Einheitsmatrix bezeichnet. Weiter ist

$$\left.\begin{aligned} A(\vartheta) &= \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{\infty}\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\left[(l+1)\exp(i\delta_l^+)\sin\delta_l^+ + l\exp(i\delta_l^-)\sin\delta_l^-\right]Y_{l0}, \\ B(\vartheta) &= \frac{i\sin\vartheta}{k}\sum_{l=0}^{\infty}\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\left[\exp(i\delta_l^+)\sin\delta_l^+ - \exp(i\delta_l^-)\sin\delta_l^-\right]\frac{\partial Y_{l0}}{\partial\cos\vartheta}. \end{aligned}\right\} \quad (7.4.19)$$

Wenn die einfallenden Nukleonen nicht polarisiert sind, so erhält man den differentiellen Streuquerschnitt aus der Beziehung

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2}\sum_m |f(\vartheta)|^2 = |A(\vartheta)|^2 + |B(\vartheta)|^2. \quad (7.4.20)$$

Wir sehen also folgendes: Werden Teilchen mit dem Spin $^1/_2$ in einem Feld gestreut, dessen Potential eine Spin-Bahn-Wechselwirkung enthält, so kann das asymptotische Verhalten der Wellenfunktion gestreuter Teilchen in großen Entfernungen vom Wirkungsbereich der Kernkräfte in der Form

$$\psi_f = \psi_a - \varphi_a = f(\vartheta)\frac{\exp(ikr)}{r}\chi_{1/2\, m} \quad (7.4.21)$$

dargestellt werden, wobei die Streuamplitude eine Matrix ist:

$$f(\vartheta) = A(\vartheta)I + B(\vartheta)\vec{\sigma}\mathfrak{n}. \quad (7.4.22)$$

Zur Streuung in einem zentralsymmetrischen Potential, das eine Spin-Bahn-Kopplung enthält, gehört auch das Problem der Streuung von Teilchen mit dem Spin $^1/_2$ an Kernen mit dem Spin Null. In diesem Fall wird die Streuung durch den differentiellen Wirkungsquerschnitt und den Polarisationszustand der gestreuten Teilchen charakterisiert.

Wir definieren den Vektor der relativen Polarisation der Teilchen durch die Beziehung

$$\mathfrak{P} = \frac{\sum_m (\psi_f, \vec{\sigma}\psi_f)}{\sum_m (\psi_f, \psi_f)}.$$

Wird (7.4.21) eingesetzt, so finden wir

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{n}\frac{A^*B + B^*A}{|A|^2 + |B|^2} = \mathfrak{n}\frac{2\,\mathfrak{Re}\,A\,B^*}{\frac{d\sigma}{d\Omega}}. \quad (7.4.23)$$

Der Polarisationsvektor der gestreuten Teilchen ist somit bei der Streuung an Kernen mit dem Spin 0 immer senkrecht zur Streuebene gerichtet.

Geht man von der Forderung der Invarianz gegen Drehungen des Raumes und gegen Spiegelungen aus, so kann man sich leicht überzeugen, daß die Gl. (7.4.22) die allgemeinste Form der Streuamplitude für die Streuung von Teilchen mit dem Spin $^1/_2$ an spinlosen Kernen darstellt. Im Spinraum muß

nämlich die Streuamplitude $f(\vartheta)$ durch eine Matrix beschrieben werden, die aus der Einheitsmatrix I und den drei PAULIschen Spinmatrizen σ_x, σ_y, σ_z zusammengesetzt ist. Aus diesen 4 Matrizen kann man folgende irreduzible Tensoren konstruieren:

$$\left.\begin{array}{ll} I & \text{Skalar,} \\ \vec{\sigma} & \text{axialer Vektor.} \end{array}\right\} \qquad \text{(a)}$$

Außer durch den Spin wird das Teilchen durch die beiden Vektoren $\mathfrak{k}_a$ und $\mathfrak{k}_b$ charakterisiert. Sie beschreiben den Anfangs- und Endzustand. Aus $\mathfrak{k}_a$ und $\mathfrak{k}_b$ kann man folgende irreduzible Tensoren aufbauen:

$$\left.\begin{array}{rl} \mathfrak{k}_a \mathfrak{k}_b & \text{Skalar,} \\ \mathfrak{K} = \dfrac{\mathfrak{k}_b - \mathfrak{k}_a}{|\mathfrak{k}_b - \mathfrak{k}_a|} & \text{polarer Vektor,} \\ \mathfrak{n} = [\mathfrak{k}_b \mathfrak{k}_a](|[\mathfrak{k}_b \mathfrak{k}_a]|)^{-1} & \text{axialer Vektor,} \\ \mathfrak{N} = \dfrac{[\mathfrak{n}\,\mathfrak{K}]}{|[\mathfrak{n}\,\mathfrak{K}]|} = \dfrac{\mathfrak{k}_b + \mathfrak{k}_a}{|\mathfrak{k}_b + \mathfrak{k}_a|} & \text{polarer Vektor.} \end{array}\right\} \qquad \text{(b)}$$

Die Einheitsvektoren $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{n}$ sind zueinander orthogonal. $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{N}$ liegen in der Streuebene, $\mathfrak{n}$ ist senkrecht zur Streuebene gerichtet.

Aus den Größen (a) und (b) kann man nur zwei Skalare bilden, die bei räumlicher Drehung und bei Spiegelung invariant sind:

$$I \text{ und } \mathfrak{n}\vec{\sigma}.$$

Die allgemeinste Form der Streuamplitude für die Streuung eines nichtpolarisierten Bündels von Teilchen mit dem Spin $^1/_2$ an spinlosen Kernen muß folglich

$$f(\vartheta) = A\,I + B\,\mathfrak{n}\vec{\sigma} \qquad (7.4.24)$$

sein, wobei A und B Funktionen der Skalare $k_a^2 = k_b^2$ und $(\mathfrak{k}_a, \mathfrak{k}_b)$, d. h. Funktionen der Energie der Relativbewegung und des Kosinus des Streuwinkels sind. Berücksichtigt man, daß bei der Zeitumkehr (s. Abschn. 8.3.) die Transformation

$$\sigma \to -\vec{\sigma}, \qquad \mathfrak{k}_a \to -\mathfrak{k}_a, \qquad \mathfrak{k}_b \to -\mathfrak{k}_b$$

gilt, so ist leicht zu sehen, daß (7.4.24) invariant gegen Zeitumkehr ist.

Die elastische Streuung von Nukleonen an Nukleonen und von Nukleonen an Kernen, deren Spin verschieden von Null ist, führt ebenfalls auf die Streuung von Teilchen an einem Potentialfeld. Da jedoch in diesem Fall der Spinraum des Systems eine größere Anzahl von Freiheitsgraden besitzt, so erhält man für den allgemeinen Ausdruck der Streuamplitude eine kompliziertere Form als in (7.4.24).

Wir wollen die allgemeine Form der Streuamplitude für die Wechselwirkung zweier Teilchen mit dem Spin $^1/_2$ bestimmen. Die Streuamplitude wird jetzt durch eine Matrix dargestellt, die aus den Matrizen I, σ_{1x}, σ_{1y}, σ_{1z}, σ_{2x}, σ_{2y}, σ_{2z}

aufgebaut ist. Aus diesen Matrizen kann man folgende irreduzible Tensoren bilden [7,4]:

$$\left.\begin{array}{rl} I & \text{Skalar,} \\ (\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2 - I) & \text{Skalar,} \\ (\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2) & \text{axialer Vektor,} \\ (\vec{\sigma}_1 - \vec{\sigma}_2) & \text{axialer Vektor,} \\ [\vec{\sigma}_1\,\vec{\sigma}_2] & \text{axialer Vektor,} \\ t_{xy} = (\sigma_{1x}\,\sigma_{2y} + \sigma_{1y}\,\sigma_{2x}),\ t_{yz},\ \ldots & \text{symmetrischer Tensor 2. Grades.} \end{array}\right\} \quad \text{(c)}$$

Die aus $\mathfrak{k}_a$ und $\mathfrak{k}_b$ gebildeten Tensoren müssen außer (b) noch die symmetrischen Tensoren

$$\left.\begin{array}{l} K_x K_y,\, n_x n_y,\, N_x N_y,\, \ldots, \\ K_x N_y + K_y N_x,\, \ldots \end{array}\right\} \quad \text{(d)}$$

enthalten. Aus den Größen (b) bis (d) kann man folgenden allgemeinen Ausdruck für die Streuamplitude der Streuung von Teilchen mit dem Spin $^1/_2$ an Teilchen mit dem Spin $^1/_2$ bilden, der gegen die Zeitumkehr, die räumlichen Drehungen und die räumliche Inversion invariant ist:

$$\begin{aligned} f = A\,I + B(\vec{\sigma}_1\,\vec{\sigma}_2 - I) + C(\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2)\,\mathfrak{n} + \\ + D(\vec{\sigma}_1 - \vec{\sigma}_2)\,\mathfrak{n} + E(\vec{\sigma}_1\,\mathfrak{K})\,(\vec{\sigma}_2\,\mathfrak{K}) + F(\vec{\sigma}_1\,\mathfrak{N})\,(\vec{\sigma}_2\,\mathfrak{N}). \end{aligned} \quad (7.4.25)$$

Wenn wir uns nur für die Spinzustände des ersten Teilchens interessieren, können wir die Streuamplitude in der Form

$$f = a\,I + b(\vec{\sigma}_1\,\mathfrak{n}) + c(\vec{\sigma}_1\,\mathfrak{K}) + d(\vec{\sigma}_1\,\mathfrak{N}) \quad (7.4.26)$$

darstellen, wobei a, b, c, d Funktionen sind, die von der Energie der Relativbewegung sowie dem Streuwinkel abhängen und die Spinoperatoren des zweiten Teilchens enthalten.

Bei der elastischen Streuung von Teilchen mit beliebigem Spin s_1 und s_2 muß die Streumatrix in einem Spinraum von $(2s_1 + 1)\,(2s_2 + 1)$ Dimensionen bestimmt werden. In diesem Fall wird die Streuamplitude aus den Produkten der $(2s_1 + 1)$ Spinoperatoren des ersten Teilchens mit den $(2s_2 + 1)$ Spinoperatoren des zweiten Teilchens und den Tensoroperatoren konstruiert, die aus $\mathfrak{k}_a$ und $\mathfrak{k}_b$ aufgebaut sind. Die Streuamplitude behält ihre Form (7.4.26) auch im Fall der Streuung von Teilchen mit dem Spin $^1/_2$ an Kernen mit beliebigem Spin bei, wenn man sich nur für die Spinzustände der Teilchen interessiert.

Die Koeffizienten A, B, C, D, E und F, die in der Formel (7.4.25) auftreten, hängen im allgemeinen von der Energie der Relativbewegung der Teilchen und vom Kosinus des Streuwinkels ab. Bei der Streuung von identischen Teilchen muß die Streuamplitude invariant gegenüber Vertauschungen der beiden Teilchen sein. Daraus folgt, daß die Koeffizienten A, B, C, E, F symmetrisch und der Koeffizient D antisymmetrisch bezüglich der Transformation $\vartheta \to \pi - \vartheta$ sein müssen.

7.5. Streuung von Neutronen kleiner Energie an freien Protonen

Bei der Streuung von Neutronen an Protonen kann man die Protonen als frei betrachten, wenn die Neutronenenergie groß gegen die chemische Bindungsenergie des Protons ($\approx$ 1 eV) im Molekül oder Kristall ist. Untersucht man die Streuung von Neutronen, deren Energie einige eV überschreitet, so kann man die chemische Bindung vernachlässigen.

Die Wellenlänge der Relativbewegung von Neutron und Proton hängt von der Relativgeschwindigkeit v und damit von der Energie E_L (in MeV) der Neutronen im Laborsystem ab. Es gilt die einfache Beziehung

$$\lambda\!\!\!^{-} = \frac{\hbar}{\mu v} = \frac{9 \cdot 10^{-13}}{\sqrt{E_L}} \quad [\text{cm}]. \tag{7.5.1}$$

Für $E_L < 10$ MeV ist die Wellenlänge größer als die Reichweite der Kernkräfte. An der Streuung können deshalb nur S-Wellen teilnehmen ($l = 0$), wie aus den Abschätzungen im Abschn. 7.3. zu sehen war. Im Schwerpunktsystem ist die Streuung isotrop, solange man das Proton als freies Teilchen betrachten kann. In diesem Abschnitt werden wir die Streuung von Neutronen mit Energien zwischen 1 eV $< E_L <$ 10 MeV an Protonen untersuchen.

Die radiale Wellenfunktion für den S-Zustand des Systems genügt der Gleichung

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - u(r)\right] R(r) = 0, \quad R(0) = 0, \tag{7.5.2}$$

wobei

$$k^2 = \frac{2\mu\varepsilon}{\hbar^2} = \frac{M E_L}{\hbar^2}; \quad u(r) = \frac{2\mu}{\hbar^2} V(r)$$

und ε die Energie der Relativbewegung sind. ε ist gleich der halben Energie E_L der einfallenden Neutronen im Laborsystem (s. Abschn. 7.1.).

Das System aus einem Proton und einem Neutron kann sich in 2 Spinzuständen befinden: im Singulett- und im Triplettzustand. Die Wechselwirkungsenergie ist in den beiden Zuständen verschieden. Wir betrachten zunächst den Singulettzustand, wobei wir u und R mit dem Index s versehen:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - u_s(r)\right] R_s(r) = 0, \quad R_s(0) = 0. \tag{7.5.3}$$

Neben dieser Gleichung betrachten wir die analoge Gleichung für $k = 0$:[1])

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - u_s(r)\right] R_{0s}(r) = 0, \quad R_{0s}(0) = 0. \tag{7.5.4}$$

Wird (7.5.3) mit R_{0s} und (7.5.4) mit R_s multipliziert und von der ersten Gleichung die zweite subtrahiert, so erhalten wir

$$\frac{d}{dr}\left(R_s \frac{dR_{0s}}{dr} - R_{0s} \frac{dR_s}{dr}\right) = k^2 R_s R_{0s}. \tag{7.5.5}$$

---

[1]) Da wir die chemische Bindung des Protons vernachlässigen, ist der Grenzübergang $k \to 0$ als Extrapolation für den Fall zu betrachten, daß keine Bindung vorhanden ist, und nicht als die wirkliche Streuung bei kleinen Energien.

Wir führen nun die Hilfsfunktionen Φ_s und Φ_{0s} ein, die den Gln. (7.5.3) und (7.5.4) bei $u_s = 0$ genügen, für $r = 0$ gleich Eins sind und für $r \to \infty$ in R_s und R_{0s} übergehen. Diesen Bedingungen genügen die Funktionen

$$\Phi_s = \frac{\sin(k\,r + \delta_s)}{\sin\delta_s}, \quad \Phi_{0s} = \frac{a_s - r}{a_s}. \tag{7.5.6}$$

Hierbei ist a_s eine konstante Größe, die *Streulänge* genannt wird; δ_s ist die Phasenverschiebung der gestreuten Welle im Singulettzustand. Die Funktionen (7.5.6) genügen der Beziehung

$$\frac{d}{dr}\left(\Phi_s \frac{d\Phi_{0s}}{dr} - \Phi_{0s}\frac{d\Phi_s}{dr}\right) = k^2\,\Phi_s\,\Phi_{0s}. \tag{7.5.7}$$

Von (7.5.5) subtrahieren wir (7.5.7) und integrieren die erhaltene Differenz über r von 0 bis ∞. Unter Berücksichtigung von (7.5.6), der Grenzbedingungen im Nullpunkt sowie der Forderung, daß R und Φ bei großen r zusammenfallen sollen, erhalten wir

$$k\cot\delta_s = -\frac{1}{a_s} + k^2\int\limits_0^\infty (\Phi_s\,\Phi_{0s} - R_s\,R_{0s})\,dr. \tag{7.5.8}$$

Die Gl. (7.5.8) ist exakt; aus ihr läßt sich ein Näherungsausdruck herleiten, der große praktische Bedeutung besitzt. Wir weisen zunächst darauf hin, daß $\int\limits_0^\infty R_s\,R_{0s}\,dr = 0$ ist, da die Funktionen R_s und R_{0s} zu verschiedenen Energiezuständen gehören. Es ist jedoch vorteilhaft, das Produkt $R_s\,R_{0s}$ unter dem Integralzeichen zu belassen. Der Integrand ist dann im wesentlichen nur im Gebiet der Reichweite der Kernkräfte ($r < d$) verschieden von Null. Für den betrachteten Fall kleiner Energien ($k\,d \ll 1$) hängt der Integrand nur schwach von der Energie ab, und man kann schreiben

$$\int\limits_0^\infty (\Phi_0\,\Phi_{0s} - R_s\,R_{0s})\,dr = \frac{1}{2}r_{0s} + k^2\gamma_s + \ldots, \tag{7.5.9}$$

wobei

$$r_{0s} = 2\int\limits_0^\infty (\Phi_{0s}^2 - R_{0s}^2)\,dr$$

nicht von der Energie abhängt und die Dimension einer Länge besitzt. r_{0s} heißt die *effektive Reichweite der Kernkräfte.*

Mit (7.5.9) erhalten wir

$$k\cot\delta_s = -\frac{1}{a_s} + \frac{k^2 r_{0s}}{2} + k^4\gamma_s + \ldots \tag{7.5.10}$$

Wird eine analoge Betrachtung für den Fall der Triplettstreuung durchgeführt, so bekommt man

$$k\cot\delta_t = -\frac{1}{a_t} + \frac{k^2 r_{0t}}{2} + k^4\gamma_t + \ldots \tag{7.5.11}$$

Aus (7.5.10) und (7.5.11) folgt, daß im Grenzfall kleiner Energien die Phasenverschiebung der Singulett- (Triplett-) Streuung nur durch einen Parameter, und zwar durch die Streulänge a_s (a_t), bestimmt wird. Als Streulänge a bezeichnet man denjenigen Wert von r, bei dem die Wellenfunktion, die man durch Extrapolation auf die Energie 0 erhält, das erstemal verschwindet. Bei $k = 0$ nimmt die Wellenfunktion $\psi = e^{ikr} + \frac{A}{r} e^{ikr}$, die für das Gebiet außerhalb der Reichweite der Kernkräfte gilt, die Form $\psi = 1 + A/r$ an. Laut Definition findet man die Streulänge a aus der Bedingung $\psi|_{r=a} = 0$. Die Streulänge a und die Streuamplitude A sind deshalb (bei Nullenergie) durch folgende einfache Beziehung verknüpft:

$$a = -A. \qquad (7.5.12)$$

In Abb. 53 sind die Radialfunktionen $R_0(r)$ und $\Phi_0(r)$ für ein anziehendes Potential und drei verschiedene Werte der Streulänge dargestellt. Bei $a > 0$ sind im Potentialtopf gebundene Zustände möglich. Bei $a \to \infty$ gibt es im Potentialtopf nur einen gebundenen Zustand mit der Energie 0. Bei $a < 0$ treten im Potentialtopf keine gebundenen Zustände auf.

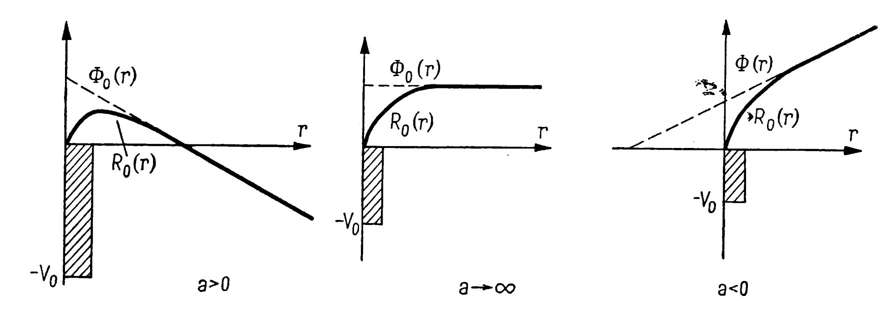


Abb. 53. Radialwellenfunktionen, die einer Streuung bei der Energie 0 für positiven, negativen und unendlich großen Stoßparameter entsprechen

Bei der Energie 0 (oder unendlich kleiner Reichweite der Kernkräfte) gehen die Formeln (7.5.10) und (7.5.11) in die folgenden Beziehungen über:

$$k \cot \delta_s = -\frac{1}{a_s}, \quad k \cot \delta_t = -\frac{1}{a_t}. \qquad (7.5.13)$$

Wenn wir als Variationsbereich der Phasenverschiebungen das Intervall $-\pi/2 \leqq \delta \leqq \pi/2$ annehmen, so entsprechen positiven Werten der Streulänge negative Phasenverschiebungen $(-\pi/2 \leqq \delta < 0)$ und negativen Werten der Streulänge positive Phasenverschiebungen $(0 \leqq \delta \leqq \pi/2)$, wie aus (7.5.13) folgt. Sind die Phasenverschiebungen im Intervall $0 \leqq \delta \leqq \pi$ definiert, so entsprechen positiven Werten der Streulänge Phasenverschiebungen aus dem Intervall $\pi/2 < \delta \leqq \pi$, negativen Werten der Streulänge Phasenverschiebungen im Intervall $0 \leqq \delta < \pi/2$, wie man ebenfalls aus (7.5.13) ersehen kann.

Bei Berücksichtigung der endlichen Reichweite der Kernkräfte kann man mit (7.5.10) und (7.5.11) die Abhängigkeit der Phasenverschiebung von der Energie bestimmen (bei kleinen Energien). Die Formeln (7.5.10) und (7.5.11) wurden zuerst von LANDAU und SMORODINSKI abgeleitet [7,5]. Man bezeichnet sie in der Literatur als „Näherung, die nicht von der Potentialform abhängt". Eine strengere Begründung dieser Näherung wird in [7,2] und [7,6] gegeben.

Wie aus (7.5.10) und (7.5.11) folgt, hängen die Wirkungsquerschnitte für die Streuung von Neutronen an Protonen von den beiden Konstanten a_s und r_{0s} für den Singulettzustand und den beiden Konstanten a_t und r_{0t} für den Triplettzustand ab:

$$\sigma_s = \frac{4\pi}{k^2}\sin^2\delta_s = \frac{4\pi}{k^2 + k^2\cot^2\delta_s} = \frac{4\pi}{k^2 + \left(\frac{1}{2}r_{0s}k^2 - \frac{1}{a_s}\right)^2}, \qquad (7.5.14)$$

$$\sigma_t = \frac{4\pi}{k^2 + \left(\frac{1}{2}r_{0t}k^2 - \frac{1}{a_t}\right)^2}. \qquad (7.5.15)$$

Aus den Formeln (7.5.14) und (7.5.15) folgt, daß die auf die Energie 0 extrapolierten Querschnitte durch die Quadrate der Streulängen ausgedrückt werden:

$$\sigma_t = 4\pi a_t^2, \qquad \sigma_s = 4\pi a_s^2, \qquad k \to 0. \qquad (7.5.15\text{a})$$

Die Messung der Wirkungsquerschnitte für die Streuung von Neutronen kleiner Energie an Protonen kann nur Auskunft über zwei der Parameter geben, welche die potentielle Wechselwirkungsenergie charakterisieren; sie gestattet jedoch nicht, die funktionale Abhängigkeit der Wechselwirkungsenergie vom Abstand zu bestimmen. Benutzt man Wechselwirkungspotentiale, die von zwei Parametern abhängen:

rechteckiger Potentialtopf $$V(r) = \begin{cases} -V_0 & \text{für } r < d, \\ 0 & \text{für } r > d; \end{cases}$$

GAUSSsches Potential $$V(r) = -V_0\,\mathrm{e}^{-r^2/d^2};$$

Exponentialpotential $$V(r) = -V_0\,\mathrm{e}^{-2r/d};$$

YUKAWA-Potential $$V(r) = -\frac{V_0\,\mathrm{e}^{-r/d}}{r/d} \quad \text{u. a.},$$

so kann man bei entsprechender Wahl der Parameter V_0 und d, d. h. der „Tiefe" und „Breite" der Potentiale, Übereinstimmung mit den experimentellen Werten für die Streulänge und die effektive Reichweite erhalten.

Bei Energien unter 10 MeV lassen also die experimentellen Daten aus der Streuung von Neutronen an Protonen keine eindeutige Wahl zwischen den oben angegebenen Potentialen (oder irgendwelchen anderen) zu. Zur Beschreibung des Streuprozesses bei kleinen Energien kann man ein beliebiges der oben angeführten Potentiale benutzen, wenn man nur die richtigen Werte für V_0 und d wählt. Befriedigende Ergebnisse erhält man mit dem YUKAWA-Potential, wenn man für die Triplettstreuung die Werte $V_{0t} = 67{,}8$ MeV, $d_t = 1{,}18 \cdot 10^{-13}$ cm und für den Singulettzustand $V_{0s} = 0{,}6\, V_{0t}$ wählt.

Die effektive Reichweite der Kernkräfte, die von d und V_0 abhängt, verringert sich, wenn man eine größere „Tiefe" des Potentialtopfes annimmt, wobei jedoch diese Veränderung von der Potentialform abhängt [7,2].

Im Fall der Triplettstreuung kann man die Parameter, die die Streuung beschreiben, mit der Bindungsenergie des Deuterons verknüpfen. Bekanntlich gilt für die Bindungsenergie des Deuterons

$$\varepsilon = \frac{\hbar^2 \beta^2}{2\mu},$$

wobei β^{-1} der effektive Deuteronenradius ist. Die radiale Wellenfunktion, ausgedrückt durch die Streumatrix S, muß bei $k = -i\beta$ in die Wellenfunktion des gebundenen Zustandes übergehen, d. h., es muß gelten

$$R = e^{-ikr} - S\, e^{ikr} \to e^{-\beta r} - S\, e^{\beta r} = e^{-\beta r}.$$

Diese Gleichung ist erfüllt, wenn $S = 0$ ist. Da

$$S = e^{2i\delta} = \frac{\cot\delta + i}{\cot\delta - i}$$

ist, gilt in diesem Fall

$$\cot\delta_t = -i.$$

Setzt man dies in (7.5.11) ein und setzt $k = -i\beta$, so ergibt sich

$$\beta = \frac{1}{a_t} + \frac{1}{2}\beta^2 r_{0t}. \tag{7.5.16}$$

Aus (7.5.16) folgt, daß bei verschwindender Reichweite der Kernkräfte $\beta = a_t^{-1}$ ist. In dieser Näherung fällt somit die Streulänge für den Triplettzustand mit dem effektiven Deuteronenradius ($4{,}3 \cdot 10^{-13}$ cm) zusammen. Es ist so, als würde die Streuung an einer harten Kugel erfolgen, deren Radius mit dem effektiven Deuteronenradius zusammenfällt.

Da bei verschwindender Reichweite der Kernkräfte

$$k\cot\delta = -a_t^{-1}$$

gilt, kann die Streumatrix für die Streuung von Neutronen an Protonen im Triplettzustand in folgender Form dargestellt werden:

$$S = e^{2i\delta} = -\frac{k + i\, a_t^{-1}}{k - i\, a_t^{-1}}.$$

Mit Hilfe von (7.5.16) kann man die Gl. (7.5.11) auf die Form

$$k\cot\delta_t = -\beta + \frac{1}{2}(\beta^2 + k^2)\, r_{0t} \tag{7.5.17}$$

bringen.

Für die S-Streuung von Neutronen an Protonen kann man in Analogie zu (7.5.16) die Größe β_s einführen:

$$\beta_s = \frac{1}{a_s} + \frac{1}{2}\beta_s^2 r_{0s}. \tag{7.5.18}$$

Dieser Größe β_s wird die Energie $E_s = \hbar^2 \beta_s^2/2\mu > 0$ zugeordnet, die man als Energie des virtuellen Deuteronenniveaus bezeichnet.

Unter Benutzung der Formeln (7.5.16) und (7.5.18) kann man die Ausdrücke für die Streuquerschnitte (7.5.14) und (7.5.15) auf folgende Form bringen:

$$\sigma_s = \frac{4\pi}{(k^2 - \beta_s^2)\left[1 - r_{0s}\beta_s + \frac{1}{4}(k^2 + \beta_s^2)r_{0s}^2\right]},$$

$$\sigma_t = \frac{4\pi}{(k^2 + \beta_t^2)\left[1 - r_{0t}\beta_t + \frac{1}{4}(k^2 + \beta_t^2)r_{0t}^2\right]}.$$

Die Streuexperimente werden in der Regel mit einem nichtpolarisierten Neutronenbündel und mit nichtpolarisierten Protonen durchgeführt. Deshalb gehören von den vier möglichen Spinorientierungen von Neutron und Proton drei zum Triplettzustand und eine zum Singulettzustand. Im Versuch mißt man den über die Spinorientierungen gemittelten Streuquerschnitt

$$\sigma = \frac{3}{4}\sigma_t + \frac{1}{4}\sigma_s. \tag{7.5.19}$$

Der Streuquerschnitt (7.5.19) enthält drei unbekannte Größen: die beiden effektiven Reichweiten r_{0t} und r_{0s} und die Streulänge der Singulettstreuung; die Streulänge der Triplettstreuung kann durch die Bindungsenergie des Deuterons (oder β) und r_{0t} [vgl. (7.5.16)] ausgedrückt werden.

Der Streuquerschnitt beträgt bei der Neutronenenergie 0 [7,7]

$$\sigma_0 = (20{,}36 \pm 0{,}10) \cdot 10^{-24}\,\text{cm}.$$

Benutzt man diesen Wert sowie die Formeln (7.5.19) und (7.5.15a), so kann man a_s und a_t berechnen. Die verbleibenden zwei unbekannten Größen r_{0t} und r_{0s} lassen sich im Prinzip finden, wenn man die Abhängigkeit des Streuquerschnitts (7.5.19) von der Energie der einfallenden Neutronen bestimmt. Die Genauigkeit der Experimente reicht jedoch heute noch nicht aus, um dieses Problem eindeutig zu lösen. Nimmt man an, daß $r_{0t} = 1{,}7 \cdot 10^{-13}$ cm, $a_t = 5{,}39 \cdot 10^{-13}$ cm und $a_s = -2{,}37 \cdot 10^{-12}$ cm sind, so sind die experimentellen Streuquerschnitte [7,8] mit Werten von r_{0s} vereinbar, die zwischen $1{,}5 \cdot 10^{-13}$ und $3{,}5 \cdot 10^{-13}$ cm liegen. Auf Grund der Hypothese der Ladungsunabhängigkeit der Kernkräfte kann man durch Vergleich mit den Angaben aus der Streuung von Protonen an Protonen (s. Abschn. 7.6.) den Wert $r_{0s} = 2{,}6 \cdot 10^{-13}$ cm annehmen.

Aus den experimentellen Daten über die Streuung von Neutronen kleiner Energie an Protonen kann man also nur die Streulänge und die effektive Reichweite der Kernkräfte bestimmen, nicht jedoch die Abstandsabhängigkeit der Wechselwirkungsenergie.

Die Streuexperimente mit Neutronen und Protonen zeigen, daß die Streuung bis zu Energien von etwa 20 MeV isotrop ist. Dieses Resultat kommt etwas unerwartet, da der Energie 20 MeV nach Gl. (7.5.1) die Wellenlänge $\lambda\!\!\!^{-} = 2 \cdot 10^{-13}$ cm entspricht und deshalb Streuung in Zuständen mit $l > 0$ zu erwarten wäre. Diese Fakten weisen auf eine Abhängigkeit des Wechselwirkungspotentials von der Bahndrehimpulsquantenzahl l hin, speziell auf eine Abhängigkeit von der Parität des Zustandes.

7.6. Streuung von Protonen an Protonen bei kleinen Energien

Die Proton-Proton-Streuung ist eines der besten Mittel zur quantitativen Untersuchung der Kernkräfte, da die Genauigkeit der Experimente mit Protonen beträchtlich höher ist als die Genauigkeit von Experimenten mit Neutronen.

Da die Proton-Proton-Streuung zwischen identischen Teilchen erfolgt, können wegen des Pauli-Prinzips im S-Zustand die Protonen nur mit antiparallelen Spins auftreten, d. h., die S-Streuung von Protonen an Protonen ist nur im Singulettzustand möglich. Eine zweite Folge der Teilchenidentität ist die Symmetrie des differentiellen Wirkungsquerschnitts bezüglich des Winkels $90°$. Sie tritt auf, da man nicht feststellen kann, welches der gestreuten Teilchen sich im einfallenden Bündel befand.

Das Vorhandensein von elektrischen Ladungen bei den stoßenden Teilchen führt dazu, daß die Streuung gleichzeitig durch die Coulomb- und die Kernkräfte hervorgerufen wird. Die Kernkräfte wirken anziehend, die Coulomb-Kräfte abstoßend. Die Streuungen, die durch die Wirkung der beiden Kräfte hervorgerufen werden, sind kohärent. Das führt zu Interferenzgliedern im Streuquerschnitt. Die Rolle der Coulomb-Kräfte ist besonders groß bei kleinen Teilchenenergien. Die Kernkräfte treten erst bei Protonenenergien über 100 keV in Erscheinung. Bei großen Energien spielen die Coulomb-Kräfte nur eine kleine Rolle, und die Streuung wird überwiegend durch die Kernkräfte bedingt.

Wir betrachten zunächst die Streuung, die durch die reine Coulomb-Wechselwirkung hervorgerufen wird. In diesem Fall genügt die radiale Wellenfunktion, die zum Bahndrehimpuls l gehört, der Differentialgleichung[1])

$$\left\{\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - u_Q\right\} R_l(r) = 0 \tag{7.6.1}$$

mit der Randbedingung

$$R_l(0) = 0, \tag{7.6.2}$$

wobei

$$u_Q = \frac{2\mu e^2}{r\hbar^2}$$

die Energie der Coulomb-Wechselwirkung ist. Wir führen die neuen Bezeichnungen

$$\varrho = k r, \quad \eta = \frac{\mu e^2}{\hbar^2 k} = \frac{e^2}{\hbar v} \tag{7.6.3}$$

ein, wobei v die Relativgeschwindigkeit der Protonen ist. Damit nimmt Gl. (7.6.1) die Form

$$\left[\frac{d^2}{d\varrho^2} + 1 - \frac{2\eta}{\varrho} - \frac{l(l+1)}{\varrho^2}\right] R_l(\varrho) = 0 \tag{7.6.4}$$

---

[1]) Wegen der großen Reichweite der Coulomb-Kräfte nehmen an der Streuung viele Partialwellen teil; die Methode der Partialwellen ist deshalb für diese Aufgabe ungünstig. Man löst besser sofort die ganze Gleichung, ohne zu Partialwellen überzugehen. Treten jedoch Kernkräfte auf, die nur Wellen mit $l = 0$ streuen (kleine Protonenenergien), so ist die Abtrennung von Partialwellen in der Coulomb-Streuung zweckmäßig.

an. Die Lösungen der Gl. (7.6.4) wurden in [7,9] ausführlich untersucht. Jede Lösung von (7.6.4) kann man als Linearkombination der WHITTAKER-Funktionen

$$W_{i\eta,\, l+1/2}(2 i \varrho) \quad \text{und} \quad W_{-i\eta,\, l+1/2}(-2 i \varrho)$$

darstellen [7,10]. Aus den WHITTAKER-Funktionen lassen sich zwei linear unabhängige Lösungen von (7.6.4) bilden: eine im Nullpunkt reguläre Lösung $F_l(\varrho)$ und eine irreguläre Lösung $G_l(\varrho)$, die bei $\varrho \to \infty$ folgendes asymptotisches Verhalten zeigen:

$$F_l(\varrho) \approx \sin\left(\varrho - \frac{l\pi}{2} - \eta \ln \varrho + \sigma_l\right), \tag{7.6.5}$$

$$G_l(\varrho) \approx \cos\left(\varrho - \frac{l\pi}{2} - \eta \ln \varrho + \sigma_l\right). \tag{7.6.6}$$

Hierbei ist σ_l eine konstante Phasenverschiebung, die durch die COULOMB-Wechselwirkung hervorgerufen wird:

$$e^{2i\sigma_l} = \frac{\Gamma(l + i\eta + 1)}{\Gamma(l - i\eta + 1)} \quad \text{oder} \quad \sigma_l = \arg \Gamma(l + 1 + i\eta). \tag{7.6.7}$$

Durch das logarithmische Glied $-\eta \ln \varrho$ in (7.6.5) und (7.6.6) wird die abstandsabhängige Phasenverschiebung charakterisiert, die auf Grund der unendlich großen Reichweite der COULOMB-Kräfte entsteht.

Eine Lösung der Gl. (7.6.4), die der Randbedingung (7.6.2) genügt, ist die Funktion $R_l = F_l(k\, r)$; sie entspricht der Funktion $g_l = k\, r\, j_l(k\, r)$ bei der Streuung von Neutronen.

Bei $k\, r \ll 1$ kann man den asymptotischen Wert der Funktionen $F_l(k\, r)$ und $G_l(k\, r)$ für den Fall $l = 0$ als Reihe darstellen:

$$\left.\begin{aligned} F_0(k\, r) &= C\, k\, r\left(1 + \frac{r}{2D} + \dots\right), \\ G_0(k\, r) &= C^{-1}\left(1 + \frac{r}{D}\left[\ln\frac{r}{D} + h(\eta) + 2\gamma - 1\right] + \dots\right), \end{aligned}\right\} \tag{7.6.8}$$

wobei $\gamma = 0{,}5772\ldots$ die EULERsche Konstante und

$$h(\eta) = \eta^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu(\nu^2 + \eta^2)} - \ln \eta - \gamma,$$

$$D = \frac{\hbar^2}{2\mu e^2} \approx 2{,}88 \cdot 10^{-12}\,\text{cm}, \qquad C^2 = \frac{2\pi\eta}{e^{2\pi\eta} - 1} \tag{7.6.9}$$

sind.

Bei $k\, r \ll 1$ wird durch die Größe $\left[\frac{F_0(kr)}{g_0(kr)}\right]^2 = C^2$ das Verhältnis zweier Wahrscheinlichkeiten bestimmt: der Wahrscheinlichkeit dafür, auf kleinem Abstand 2 Protonen zu finden, zur Wahrscheinlichkeit dafür, am gleichen Ort 1 Neutron und 1 Proton zu beobachten. Man kann diese Größe als Durchdringungswahrscheinlichkeit des COULOMB-Walles bezeichnen. Im allgemeinen ist $C^2 \leq 1$. Bei $\varepsilon = 400$ keV ist $C^2 = 0{,}41$.

Ist kein COULOMB-Feld vorhanden, so wird $C^2 = 1$, $D \to \infty$, und die Ausdrücke (7.6.8) für die Funktionen $F(kr)$ und $G(kr)$ gehen in die ersten Glieder der Entwicklung von $\sin kr$ und $\cos kr$, d. h. in kr und 1 über.

Wird außer der COULOMB-Wechselwirkung noch die spezifische Kernwechselwirkung $u(r)$ berücksichtigt, so tritt an die Stelle der Gl. (7.6.1) die Gleichung

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - u_Q - u(r)\right] R_l(r) = 0. \tag{7.6.10}$$

Außerhalb der Reichweite der Kernkräfte fällt diese Gleichung mit (7.6.1) zusammen. Deshalb wird sich das asymptotische Verhalten der Funktion $R_l(r)$ für $r \to \infty$ von F_l durch eine Phasenverschiebung unterscheiden, d. h., es gilt

$$R_l(kr) = \frac{\sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} - \eta \ln kr + \sigma_l + \delta_l\right)}{\cos\delta_l} = \\ = \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} - \eta \ln kr + \sigma_l\right) + \tan\delta_l \cos\left(kr - \frac{l\pi}{2} - \eta\ln kr + \sigma_l\right). \tag{7.6.11}$$

Die Größe δ_l wird üblicherweise „Kernphasenverschiebung" genannt. Man muß natürlich beachten, daß δ_l nur bei Anwesenheit der COULOMB-Wechselwirkung die Kernphasenverschiebung ist. Würde die COULOMB-Wechselwirkung verschwinden, so wäre bei gleichem Kernpotential die auftretende Phasenverschiebung verschieden von δ_l.

Bei Energien unter 10 MeV wirkt sich die spezifische Kernwechselwirkung nur auf die S-Welle aus und führt zum Auftreten der Kernphasenverschiebung δ_0. Die restlichen Partialwellen besitzen Phasenverschiebungen, die nur durch die Wirkung des COULOMB-Feldes bedingt sind, da sich Protonen bei diesen Energien nicht so weit nähern können, daß auch die Wirkung der Kernkräfte im P-, D- usw. Zustand auftreten könnte. In Abb. 54 wird durch die ausgezogene Kurve der differentielle Wirkungsquerschnitt für die Streuung von 2,4-MeV-Protonen an Protonen in Abhängigkeit vom Streuwinkel im Schwerpunktsystem dargestellt. Die gestrichelte Kurve zeigt die reine COULOMB-Streuung, die punktierte die Kernstreuung. Wie man aus den Kurven sieht, ist bei kleinen Winkeln nur reine COULOMB-Streuung vorhanden. Bei mittleren Winkeln überwiegt die Kernstreuung. Die Minima der Kurve entsprechen einer Interferenz der COULOMB-Streuung und der Kernstreuung. Sie deuten

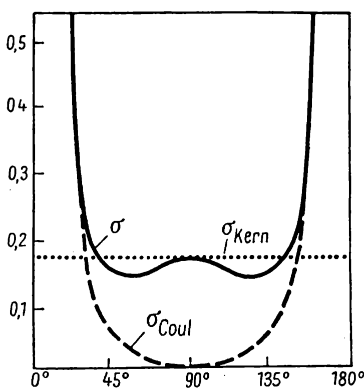


Abb. 54. Differentieller Wirkungsquerschnitt für die Streuung von Protonen an Protonen

Die gestrichelte Kurve zeigt die reine COULOMB-Streuung, die punktierte die „Kernstreuung"

darauf hin, daß die Phasenverschiebungen der COULOMB-Streuung und der Kernstreuung entgegengesetzte Vorzeichen besitzen. Wie auch zu erwarten war, ist der differentielle Wirkungsquerschnitt bezüglich 90° symmetrisch: $\sigma(\vartheta) = \sigma(\pi - \vartheta)$.

Ähnlich wie bei der Streuung von Neutronen und Protonen ist auch bei der Proton-Proton-Streuung die Phasenverschiebung eine Funktion der Energie [vgl. die Relation (7.5.10)]. Bei der Streuung von Protonen an Protonen ist diese Funktion jedoch nicht gleich $k \cot \delta$, sondern besitzt eine kompliziertere Form:

$$C^2 k \cot \delta + \frac{h(\eta)}{D} = -\frac{1}{a} + \frac{1}{2} r_0 k^2 + p r_0^3 k^4. \qquad (7.6.12)$$

Um diese Beziehung herzuleiten, folgen wir der Arbeit von BETHE [7,6] und betrachten 2 Gleichungen (für $l = 0$), die zu zwei verschiedenen Werten der Energie der Relativbewegung gehören:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + k_\alpha^2 - u_Q - u\right] R_\alpha = 0 \quad \text{und} \quad \left[\frac{d^2}{dr^2} + k_\beta^2 - u_Q - u\right] R_\beta = 0.$$

Die Randbedingungen sind $R_\alpha(0) = R_\beta(0) = 0$. Wird die erste Gleichung mit R_β und die zweite mit R_α multipliziert und die eine von der anderen subtrahiert, so erhalten wir die Beziehung

$$\frac{d}{dr}\left(R_\alpha \frac{dR_\beta}{dr} - R_\beta \frac{dR_\alpha}{dr}\right) = (k_\beta^2 - k_\alpha^2) R_\alpha R_\beta. \qquad (7.6.13)$$

Weiterhin betrachten wir 2 Gleichungen für den Fall, daß keine Kernkräfte vorhanden sind:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + k_\alpha^2 - u_Q\right] \Phi_\alpha = 0 \quad \text{und} \quad \left[\frac{d^2}{dr^2} + k_\beta^2 - u_Q\right] \Phi_\beta = 0.$$

Die Randbedingungen sind $\Phi_\alpha(0) = \Phi_\beta(0) = 1$ und $\Phi_\alpha = R_\alpha$, $\Phi_\beta = R_\beta$ für große r. Man kann sich leicht überzeugen, daß diesen Gleichungen und den entsprechenden Randbedingungen folgende Funktion genügt:

$$\Phi(r) = C[\cot \delta F_0 + G_0]. \qquad (7.6.14)$$

Bei $k r \ll 1$ besitzt die logarithmische Ableitung von $\Phi(r)$ die Form

$$f(r) \equiv r\left(\frac{\frac{d\Phi}{dr}}{\Phi}\right) = k r C^2 \cot \delta + \frac{r}{D}\left[\ln \frac{r}{D} + 2\gamma + h(\eta)\right], \qquad (7.6.15)$$

wobei Glieder der Ordnung $(k r)^2$, $(r/D)^2$ usw. vernachlässigt wurden. Die logarithmische Ableitung hängt im Wirkungsbereich der Kernkräfte ($r < d$) nur schwach von der Energie ab, da die Energie der Kernwechselwirkung beträchtlich größer als die kinetische Energie der Relativbewegung der Protonen ist. Bei $r = d$ muß $f(r)$ folglich angenähert gleich der logarithmischen Ableitung bei der Energie 0 sein, d. h. $f_0 \approx f(d)$ gelten. Wird (7.6.15) für $r = d$ gleich f_0 gesetzt, so wird

$$k C^2 \cot \delta + \frac{h(\eta)}{D} = \frac{f_0}{d} - \frac{1}{D}\left(\ln \frac{d}{D} + 2\gamma\right). \qquad (7.6.16)$$

Die Gl. (7.6.16) wurde zuerst von LANDAU und SMORODINSKI [7,5] abgeleitet.

Aus den Gleichungen für die Funktionen Φ_α und Φ_β folgt eine zu (7.6.13) analoge Beziehung:

$$\frac{d}{dr}\left(\Phi_\beta \frac{d\Phi_\alpha}{dr} - \Phi_\alpha \frac{d\Phi_\beta}{dr}\right) = (k_\beta^2 - k_\alpha^2)\,\Phi_\alpha\,\Phi_\beta. \tag{7.6.17}$$

Wird (7.6.13) von (7.6.17) subtrahiert und das Resultat von ξ bis ∞ integriert, so erhalten wir

$$\left(\Phi_\alpha \frac{d\Phi_\beta}{dr} - \Phi_\beta \frac{d\Phi_\alpha}{dr} - R_\alpha \frac{dR_\beta}{dr} + R_\beta \frac{dR_\alpha}{dr}\right)\Bigg|_\xi^\infty = \\ = (k_\beta^2 - k_\alpha^2)\int_\xi^\infty (\Phi_\alpha\,\Phi_\beta - R_\alpha\,R_\beta)\,dr.$$

Bei hinreichend kleinem ξ nimmt die letzte Gleichung wegen der für Φ und R geltenden Randbedingungen die Form

$$\left(\frac{d\Phi_\beta}{dr} - \frac{d\Phi_\alpha}{dr}\right)_\xi = (k_\beta^2 - k_\alpha^2)\int_\xi^\infty (\Phi_\alpha\,\Phi_\beta - R_\alpha\,R_\beta)\,dr \tag{7.6.18}$$

an. Aus (7.6.14) folgt für kleine $k\,r$

$$\frac{d\Phi}{dr} \approx k\,C^2 \cot\delta + \frac{1}{D}\left(\ln\frac{r}{D} + 2\gamma + h(\eta)\right).$$

Wird dies in die linke Seite von (7.6.18) eingesetzt, so erhalten wir

$$k_\beta\,C_\beta^2 \cot\delta_\beta + \frac{h(\eta_\beta)}{D} - k_\alpha\,C_\alpha^2 \cot\delta_\alpha - \frac{h(\eta_\alpha)}{D} = (k_\beta^2 - k_\alpha^2)\int_\xi^\infty (\Phi_\alpha\,\Phi_\beta - R_\alpha\,R_\beta)\,dr.$$

Wird weiterhin $k\,\alpha = \xi \approx 0$ angenommen, so finden wir mit

$$\left(k_\alpha\,C_\alpha^2 \cot\delta_\alpha + \frac{h(\eta_\alpha)}{D}\right)_{k_\alpha \approx 0} = -\frac{1}{a} \tag{7.6.19}$$

und

$$\int_0^\infty (\Phi_0\,\Phi_\beta - R_0\,R_\beta)\,dr = \frac{1}{2}\,r_0 + \dots \tag{7.6.20}$$

endgültig die Beziehung

$$K = -\frac{1}{a} + \frac{1}{2}\,r_0\,k^2 + \dots \tag{7.6.21}$$

Hierbei ist

$$K \equiv C^2\,k \cot\delta + \frac{h(\eta)}{D}. \tag{7.6.22}$$

Eine Analyse der experimentellen Daten über die Proton-Proton-Streuung bei Relativenergien unter 10 MeV zeigte, daß eine Übereinstimmung mit dem Experiment dann möglich ist, wenn an der Streuung nur S-Wellen teilhaben. In den Arbeiten [7,11] und [7,12] wurde gezeigt, daß man nicht einmal dann aus den experimentellen Daten die Abhängigkeit der potentiellen Energie vom Abstand auffinden kann, wenn man nur Zentralkräfte zwischen

den Protonen annimmt. Man kann nur 2 Parameter bestimmen: die effektive Reichweite der Wechselwirkung $r_0 = 2{,}6 \cdot 10^{-13}$ cm und die Streulänge $a = -7{,}7 \cdot 10^{-13}$ cm. Der negative Wert der Streulänge deutet darauf hin, daß kein stabiler ^1S-Zustand für 2 Protonen existiert.

Man könnte erwarten, daß bei großen Energien in der Streuung auch Phasenverschiebungen der P- und D-Wellen auftreten, deren Werte Hinweise auf die Abstandsabhängigkeit der Wechselwirkung geben würden. In der Arbeit [7,13] wurde gezeigt, daß die in [7,14] bei der Streuung von 32-MeV-Protonen gewonnenen Daten darauf hindeuten, daß keine durch Kernkräfte bedingte Phasenverschiebung der P- und D-Wellen auftritt. In einer späteren Arbeit [7,15] wurde mit großer Genauigkeit (Fehler $< 1\%$) die Streuung von 18,2-MeV-Protonen an Protonen untersucht. Es wurde gezeigt, daß die Streuphasen

$$\delta_0 = 54{,}1°, \qquad \delta_1 = 1{,}0°, \qquad \delta_2 = 0{,}4°$$

sind.

Im Wirkungsbereich der Kernkräfte ist die COULOMB-Wechselwirkung klein. Betrachtet man sie als Störung, so kann man einen Zusammenhang zwischen der Streulänge a für die Streuung von Protonen an Protonen und der „äquivalenten" Streulänge a_s erhalten, die auftreten würde, wenn es kein COULOMB-Feld gäbe [7,12]:

$$\frac{1}{a_s} \approx \frac{1}{a} + \frac{1}{D}\left(\ln\frac{r_0}{D} + 2\gamma - 0{,}824\right).$$

Wird $a = -7{,}7 \cdot 10^{-13}$ cm, $r_0 = 2{,}6 \cdot 10^{-13}$ cm und $D = 2{,}88 \cdot 10^{-12}$ cm gesetzt, so erhalten wir $a_s = -2{,}3 \cdot 10^{-12}$ cm, was gut mit der beobachteten Streulänge für die Streuung von Neutronen an Protonen im Singulettzustand übereinstimmt ($a_s = -2{,}37 \cdot 10^{-12}$ cm, vgl. Abschn. 7.5.) und damit die Hypothese von der Ladungsunabhängigkeit der Kernkräfte untermauert.

7.7. Kohärente Streuung und Bestimmung des Vorzeichens der Streulänge für die Neutron-Proton-Streuung

Aus den Streuquerschnitten für die Streuung von Neutronen an Protonen bei kleinen Energien kann man nur den Absolutwert der Streulängen bestimmen, nicht aber ihr Vorzeichen. Die Kenntnis der Vorzeichen ist jedoch notwendig, um feststellen zu können, ob es im System gebundene Zustände gibt. Ein positiver Wert der Streulänge deutet darauf hin, daß im System gebundene Zustände möglich sind.

Zur Bestimmung des Vorzeichens der Streulängen kann man die Interferenzerscheinungen untersuchen, die bei der Streuung von Neutronen an mehreren Protonen auftreten. Interferenzerscheinungen können dann beobachtet werden, wenn der Abstand zwischen den streuenden Protonen kleiner als die entsprechende DE BROGLIEsche Wellenlänge ist. Da der Atomabstand in Molekülen und Festkörpern von der Größenordnung 10^{-8} cm ist, kann man Interferenzerscheinungen nur mit Neutronen beobachten, deren Energie unter 0,01 eV liegt.

Von TELLER und SCHWINGER wurde vorgeschlagen, die Streuung von Neutronen an den Molekülen des Ortho- und Para-Wasserstoffs zu untersuchen, um daraus das Vorzeichen der Streulänge zu bestimmen. Bei Zimmertemperaturen enthält Wasserstoff sowohl die Moleküle des p-Wasserstoffs wie auch die Moleküle des o-Wasserstoffs. Bei Temperaturen um 20 °K kann man Wasserstoff erhalten, der nur aus den Molekülen des Para-Wasserstoffs besteht, d. h. aus Molekülen mit antiparallelen Spins der Protonen.

Bei der Streuung von Neutronen (mit Wellenlängen, die groß gegen die Abmessungen des Moleküls sind) am Wasserstoffmolekül wird der Streuquerschnitt nur durch die Streulänge bestimmt: $\sigma = 4\pi a^2$, wobei die Streulänge a gleich der Summe der Streulängen für das erste und zweite Proton des Moleküls ist. Da die Streulänge, die bei sehr niedrigen Energien ihrem Betrag nach mit der Streuamplitude übereinstimmt, proportional der reduzierten Masse ist [s. Gl. (7.2.8a)], kann man die Streulänge für die Streuung des Neutrons an dem im Molekül gebundenen Proton durch die Streulänge für das freie Proton ausdrücken, wenn man das Wasserstoffmolekül bei der elastischen Streuung von Neutronen kleiner Energie als einen festen Körper betrachtet:

$$a' = a_{\text{geb}} = \frac{\mu_{\text{Mol}}}{\mu_{\text{frei}}} a_{\text{frei}} = \frac{4}{3} a_{\text{frei}}. \tag{7.7.1}$$

Hierbei ist $\mu_{\text{Mol}} = {}^2/_3 M$ die reduzierte Masse von Molekül und Neutron und $\mu_{\text{frei}} = M/2$ die reduzierte Masse von Proton und Neutron.

In Abhängigkeit von der gegenseitigen Orientierung von Neutronen- und Protonenspin fällt die Streulänge entweder mit der Länge für die Singulettstreuung oder mit der Länge für die Triplettstreuung zusammen. Es ist deshalb zweckmäßig, eine effektive Streulänge einzuführen:

$$a_{\text{eff}} = a'_t \pi_t + a'_s \pi_s. \tag{7.7.2}$$

Hierbei sind

$$\pi_s = \frac{1}{4}(1 - \vec{\sigma}_{\text{n}} \vec{\sigma}_{\text{p}}) \quad \text{und} \quad \pi_t = \frac{1}{4}(3 + \vec{\sigma}_{\text{n}} \vec{\sigma}_{\text{p}}) \tag{7.7.3}$$

die Projektionsoperatoren von Singulett- und Triplettzustand. Der Operator π_t ist im Singulettzustand gleich Null, der Operator π_s im Triplettzustand.

Die Streulänge für die Streuung des Neutrons an beiden Protonen des Wasserstoffmoleküls kann man folgendermaßen darstellen:[1]

$$a = a_{\text{eff}}(1) + a_{\text{eff}}(2).$$

Mit (7.7.2) und (7.7.3) erhalten wir

$$a = \frac{1}{2}(3a'_t + a'_s) + \frac{1}{2}(a'_t - a'_s)\, \vec{\sigma}_{\text{n}}\, \mathfrak{S},$$

[1] Diese einfache Beziehung ist nur für große Wellenlängen gültig, bei denen man annehmen kann, daß sich beide Protonen des Moleküls in ein und demselben Punkt befinden, d. h., bei denen man die Phasendifferenz vernachlässigen kann, die durch den endlichen Abstand zwischen den Protonen hervorgerufen wird. Die Energie solcher Neutronen reicht nicht zur Anregung von Rotationsniveaus des Moleküls aus; deshalb handelt es sich um eine rein elastische Streuung.

wobei $\mathfrak{S} = {}^1/_2 [\vec{\sigma}_p(1) + \vec{\sigma}_p(2)]$ der Gesamtspin des Wasserstoffmoleküls ist. Für die Moleküle des Para-Wasserstoffs ist $\mathfrak{S} = 0$ und damit

$$a_{\text{para}} = \frac{1}{2}(3a'_t + a'_s).$$

Unter Benutzung von (7.7.1) kann man die Streulänge für die Streuung von Neutronen am Molekül des Para-Wasserstoffs durch die Streulänge für Streuung an freien Protonen ausdrücken:

$$a_{\text{para}} = \frac{2}{3}(3a_t + a_s). \tag{7.7.4}$$

Der Streuquerschnitt ist

$$\sigma_{\text{para}} = 4\pi |a_{\text{para}}|^2 = \frac{16}{9}\pi |3a_t + a_s|^2. \tag{7.7.5}$$

Setzt man die Werte (vgl. Abschn. 7.5.) $a_t = 5{,}39 \cdot 10^{-13}$ cm und $a_s = -2{,}37 \cdot 10^{-12}$ cm ein, so wird $(3a_t + a_s) = -0{,}753 \cdot 10^{-12}$ cm und $\sigma_{\text{para}} = 3{,}17 \cdot 10^{-24}$ cm². Wäre die Streulänge der Singulettstreuung positiv, so hätte man $\sigma^{(+)}_{\text{para}} = 88{,}8 \cdot 10^{-24}$ cm². Der experimentelle Wert [7,16] ist $(3a_t + a_s)^2_{\text{exp}} = 0{,}647 \cdot 10^{-24}$ cm². Der Streuquerschnitt für Neutronen am Para-Wasserstoff ist folglich

$$(\sigma_{\text{para}})_{\text{exp}} = 3{,}6 \cdot 10^{-24}\ \text{cm}^2.$$

Dieser Wert beweist unzweifelhaft, daß die Streulängen für die Streuung von Neutronen an Protonen im Singulett- und im Triplettzustand entgegengesetzte Vorzeichen besitzen.

Bei der Messung von σ_{para} können systematische Fehler auftreten, weil im Para-Wasserstoff geringe Mengen Ortho-Wasserstoff enthalten sein können und weil eine Einfangreaktion mit Bildung eines Deuterons vor sich gehen kann.

Durch die Erzeugung von hohen Neutronenflußdichten in Kernreaktoren wurde es möglich, die Streuung an wasserstoffhaltigen Kristallen zu untersuchen. Die elastische Streuung von Neutronen an einem System, das aus einer großen Zahl von Protonen besteht, kann als Summe einer kohärenten und einer inkohärenten bzw. Diffusionsstreuung dargestellt werden. Die Streuung nennt man kohärent, wenn die gestreuten Wellen untereinander und mit der einfallenden Welle interferieren. Bei der inkohärenten Streuung treten keine Interferenzen auf. Für eine inkohärente Streuung gibt es verschiedene Gründe: Fluktuationen der Dichte, die durch die Wärmebewegung hervorgerufen werden (thermische Diffusionsstreuung), Auftreten unregelmäßig verteilter anderer Kerne und Unregelmäßigkeiten der Spinorientierung (wenn die Streuung von den Spins abhängt). Eingehender werden wir diese Fragen im Kap. 12 betrachten.

Bei der inkohärenten Streuung ist der Streuquerschnitt gleich der Summe der Streuquerschnitte für jedes Streuzentrum. Bei der kohärenten Streuung müssen die Streuamplituden addiert und dann der Wirkungsquerschnitt berechnet werden.

Infolge der Interferenz zwischen den in Vorwärtsrichtung kohärent gestreuten Wellen besitzt die Gesamtwelle, die sich im Kristall ausbreitet, eine Wellenzahl K, die sich von der Wellenzahl k im freien Raum unterscheidet (s. Abschn. 12.7.):

$$K^2 = k^2 + 4\pi N A_{aa}, \tag{7.7.6}$$

wobei $k = \sqrt{2\mu\varepsilon}/\hbar$, N die Zahl der Streuzentren im cm^3 und A_{aa} die Streuamplitude für die Vorwärtsstreuung je Kern sind. Mit (7.7.6) kann man den Begriff „Brechungsindex" eines Stoffes für Neutronenwellen einführen:

$$n = \frac{K}{k} = \sqrt{1 + \frac{4\pi N A_{aa}}{k^2}} \approx 1 + \frac{2\pi N}{k^2} A_{aa}. \tag{7.7.7}$$

Wesentlich ist, daß der Brechungsindex linear von der Streuamplitude abhängt. Wird der Brechungsindex gemessen, so kann man folglich das Vorzeichen der Streuamplitude bestimmen. Der Brechungsindex (7.7.7) unterscheidet sich meist nur sehr wenig von Eins; so ist z. B. für $A_{aa} = 5 \cdot 10^{-13}$ cm (was einem Gesamtquerschnitt von $\sigma = 3{,}14$ barn entspricht) $N \approx 10^{22}$ und für thermische Neutronen ($\lambda \approx 2 \cdot 10^{-8}$ cm) der Brechungsindex erst in der sechsten Stelle hinter dem Komma verschieden von Eins.

Ist der Brechungsindex des Materials kleiner als Eins, so entsteht bei einem bestimmten Einfallswinkel der Neutronen eine innere Totalreflexion, deren Grenzwinkel nur vom Brechungsindex abhängt. Die verschiedenen inkohärenten Effekte (Absorption usw.) vermindern die Intensität des gespiegelten Bündels und haben keinen Einfluß auf den Grenzwinkel der inneren Totalreflexion. Die Bestimmung des Grenzwinkels stellt deshalb die beste Methode zur Messung des Brechungsindex dar. Als erste machten FERMI und MARSHALL [7,17] von dieser Methode Gebrauch. Sie benutzten die BRAGGsche Reflexion von einem Einkristall zur Erzeugung eines monochromatischen Neutronenbündels.

Da die Streulänge a mit der Streuamplitude A durch die einfache Beziehung $a = -A$ verknüpft ist, kann man die Beziehung (7.7.7) in der Form

$$n = 1 - \frac{2\pi N a}{k^2} \tag{7.7.8}$$

schreiben. Der Grenzwinkel der inneren Totalreflexion bestimmt sich aus der Beziehung

$$\vartheta_0 = \sqrt{2(1-n)} = \frac{2}{k}\sqrt{\pi N a}. \tag{7.7.9}$$

In der Regel ist $1 - n \approx 10^{-6}$, und ϑ_0 entspricht einigen $10'$.

Zur Bestimmung des Vorzeichens und der Größe der kohärenten Streulänge (a_{koh}) für die Streuung an Wasserstoffkernen wurde die innere Totalreflexion der Neutronen von einer Oberfläche flüssigen Triäthylbenzols ($C_{12}H_8$) benutzt (Methode des „flüssigen" Spiegels).

Unter kohärenter Streulänge versteht man (s. Kap. 12) die auf 1 Proton bezogene und über die Spinorientierungen gemittelte Streulänge:

$$a_{\text{koh}} = \frac{3}{4} a_t' + \frac{1}{4} a_s'.$$

Da die Protonen mit einem schweren Molekül verbunden sind, ist $a' = 2a_{\text{frei}} \equiv 2a$, und es gilt

$$a_{\text{koh}} = \frac{1}{2}(3a_t + a_s). \tag{7.7.10}$$

Wird in (7.7.10) $a_t = 5{,}39 \cdot 10^{-13}$ cm und $a_s = 2{,}37 \cdot 10^{-12}$ cm eingesetzt, so erhalten wir den theoretischen Wert $(a_{\text{koh}})_{\text{theor}} = 3{,}75 \cdot 10^{-13}$ cm.

Im Experiment enthielt der „Spiegel“ ein Gemisch von Wasserstoffatomen und Kohlenstoffatomen im Verhältnis 1,5 : 1. Deshalb muß in die Gl. (7.7.9) die Größe $a = (a_{\text{C}} + 1{,}5a_{\text{H}})_{\text{koh}}$ eingesetzt werden. Der Wert von a_{C} ist bis auf 0,5% genau bekannt und gleich $6{,}63 \cdot 10^{-13}$ cm. Deshalb kann man aus der experimentell bestimmten Größe a die Streulänge a_{H} berechnen. Es ergab sich $(a_{\text{H}})_{\text{koh}} = -(3{,}75 \pm 0{,}3) \cdot 10^{-13}$ cm, was gut mit dem oben angegebenen theoretischen Wert übereinstimmt.

KAPITEL 8

THEORIE DER KERNREAKTIONEN

8.1. Erhaltungssätze für Kernreaktionen

Als Kernreaktion bezeichnet man die Umwandlung von Kernen, die im Ergebnis des Stoßes zweier Kerne (oder eines Kerns und eines Nukleons) vor sich geht, oder die Umwandlung eines Kerns unter dem Einfluß irgendeiner äußeren Einwirkung (γ-Strahlung, COULOMB-Feld u. a.). Meist wird die Kernreaktion dadurch hervorgerufen, daß man die Kerne irgendeines Stoffes mit einem Strom beschleunigter Teilchen beschießt: Neutronen, Protonen, α-Teilchen usw. Im Ergebnis der intensiven Wechselwirkung der stoßenden Teilchen bilden sich zwei oder mehr Teilchen, die in verschiedenen Richtungen vom Ort des Zusammenstoßes auseinanderfliegen. In diesem Kapitel werden wir Reaktionen betrachten, die zur Bildung von nur 2 Teilchen führen.

Eine Kernreaktion, bei der durch den Stoß des Teilchens a (Neutron, Proton, γ-Quant, leichter Kern usw.) mit dem Kern A der neue Kern B und das Teilchen b entstehen, wird auf folgende Weise symbolisch dargestellt: $\mathrm{A} + \mathrm{a} \rightarrow \mathrm{B} + \mathrm{b}$, oder noch kürzer A(a, b) B. In der Regel ist beim Zusammenstoß eines Teilchenpaares (A + a) eine ganze Anzahl von Reaktionen möglich:

$$\mathrm{A} + \mathrm{a} \rightarrow \begin{cases} \mathrm{A} & + \mathrm{a}, \\ \mathrm{A}^* & + \mathrm{a}, \\ \mathrm{B} & + \mathrm{b}, \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Die Reaktion A (a, a) A, bei der sich weder die Zusammensetzung noch der innere Zustand der stoßenden Teilchen verändert, wird *elastische Streuung* genannt. Die Reaktion A (a, a) A*, bei der sich der innere Zustand von A verändert, die Zusammensetzung jedes der Teilchen jedoch beibehalten wird, nennt man *unelastische Streuung*. Im weiteren wird mit den Buchstaben B und b eines der möglichen Teilchenpaare bezeichnet, das im Verlauf der Reaktion gebildet wird.

Die Theorie der Kernreaktionen gestattet, die Wahrscheinlichkeit für den Übergang aus einem Anfangszustand in einen der Endzustände zu berechnen. Der Anfangszustand entspricht dem Zeitpunkt $t \rightarrow -\infty$, in dem sich die beiden Teilchen a und A in so großer Entfernung voneinander befinden, daß man ihre Relativbewegung als freie Bewegung ansehen kann. Die Endzustände ($t \rightarrow \infty$) entsprechen einer hinreichenden Entfernung der Reaktionsprodukte voneinander. Im Anfangszustand wie in den Endzuständen besteht das System also aus 2 Teilen, die nicht miteinander verbunden sind.

Die Wellenfunktion von Anfangs- und Endzustand kann deshalb im Schwerpunktsystem als Produkt dreier Funktionen dargestellt werden: 2 Funktionen charakterisieren den inneren Zustand jedes der Teilchen, und 1 Funktion beschreibt die Relativbewegung der Teilchen und ihre Spinorientierungen. Die Funktion des Anfangszustands ist

$$\Phi_a = \psi_{\mathrm{A}a}(\ldots, q, \ldots)\, \varphi_{\mathrm{A}a}(x)$$

mit

$$\psi_{\mathrm{A}a}(\ldots, q, \ldots) = \psi_{\mathrm{A}}(\ldots, q_{\mathrm{A}}, \ldots)\, \psi_a(\ldots, q_a, \ldots).$$

Ist das Teilchen a ein Elementarteilchen, so hat man $\psi_a = 1$. Die Funktion des Endzustands hat die Form

$$\Phi_b = \psi_{\mathrm{B}b}(\ldots, q, \ldots)\, \varphi_{\mathrm{B}b}(x).$$

Im Anfangs- und im Endzustand besteht das System aus zwei nichtgekoppelten Teilen. Diese Zustände gehören deshalb beide zum Kontinuumspektrum. Bei der Kernreaktion erfolgt ein Übergang aus dem definierten Anfangszustand (der durch die Bedingungen des Experiments bestimmt ist) in einen der Zustände des Kontinuumspektrums. Die auf die Zeiteinheit bezogene Übergangswahrscheinlichkeit wird durch die Größe

$$W_{ba} = \frac{2\pi}{\hbar} |T_{ba}|^2\, \delta(E_b - E_a)$$

bestimmt. Die δ-Funktion in W_{ba} gewährleistet, daß der Energieerhaltungssatz beim Übergang von a zu b erfüllt wird. Führt man die Zahl $\varrho(E_b)\, dE_b\, d\Omega$ der Quantenzustände je Energieintervall dE_b und Raumwinkel $d\Omega$ ein, so liefert die Integration von W_{ba} über die Energien der Endzustände die Wahrscheinlichkeit je Zeiteinheit für Übergänge in Endzustände mit der Energie $E_b = E_a$ und in das Raumwinkelelement $d\Omega$:

$$W_{ba} = \frac{2\pi}{\hbar} |T_{ba}|^2\, \varrho(E_b)\, d\Omega. \tag{8.1.1}$$

Die Dichte der Endzustände ist

$$\varrho(E_b) = \frac{V \mathfrak{p}_b^2}{(2\pi\hbar)^3 v_b},$$

wobei $\mathfrak{p}_b$ der Impuls der Relativbewegung der Reaktionsprodukte, v_b der Betrag ihrer Relativgeschwindigkeit und V das Volumen des Systems sind.

Als differentiellen Wirkungsquerschnitt der Kernreaktion bezeichnet man das Verhältnis der Wahrscheinlichkeit (8.1.1) zur Stromdichte der einfallenden Teilchen. Die Stromdichte der Teilchen ist gleich dem Produkt aus der Geschwindigkeit vor dem Stoß und der Teilchendichte, die gleich V^{-1} ist, wenn im Volumen V ein Teilchen vorhanden ist. Man hat also

$$d\sigma_{ba} = \frac{V^2 \mathfrak{p}_b^2}{(2\pi)^2 \hbar^4 v_b v_a} |T_{ba}|^2\, d\Omega. \tag{8.1.2}$$

Außer dem differentiellen Wirkungsquerschnitt (8.1.2) ist der integrale Wirkungsquerschnitt σ_{ba} von besonderem Interesse. Man erhält den integralen Wirkungsquerschnitt durch Integration des differentiellen Wirkungsquer-

schnitts über alle Streurichtungen und Summation über alle Projektionen des Drehimpulses der Teilchen nach dem Stoß:

$$\sigma_{ba} = \sum_{m_b} \sum_{m_B} \int d\sigma_{ba}.$$

Wenn das Experiment mit einem nichtpolarisierten Teilchenbündel durchgeführt wird und wenn die Spinorientierung des Kerns A nicht fixiert ist, müssen die entsprechenden Querschnitte über alle Werte der Teilchenspins im Anfangszustand gemittelt werden:

$$\overline{d\sigma_{ba}} = [(2J_a + 1)(2J_A + 1)]^{-1} \sum_{m_a} \sum_{m_A} d\sigma_{ba}. \tag{8.1.3}$$

Ganz analog wird der mittlere integrale Reaktionsquerschnitt definiert:

$$\bar{\sigma}_{ba} = [(2J_a + 1)(2J_A + 1)]^{-1} \sum_{m_a} \sum_{m_A} \sum_{m_b} \sum_{m_B} \int d\sigma_{ba}.$$

Kernreaktionen bestimmter Art werden manchmal durch die Anregungsfunktion der Reaktion charakterisiert. Unter *Anregungsfunktion* einer gegebenen Reaktion versteht man diejenige Funktion, welche die Abhängigkeit der Wahrscheinlichkeit dieser Reaktion (oder des entsprechenden Querschnitts) von der Energie der Relativbewegung angibt.

Die Übergangswahrscheinlichkeit W_{ba} ist nur dann verschieden von Null, wenn beim Übergang $a \to b$ die Erhaltungssätze erfüllt sind: Energiesatz, Drehimpulssatz, Erhaltungssatz für die Projektion des Drehimpulses auf eine Vorzugsrichtung, Impulssatz, Paritätssatz u. a., die im gegebenen System Bewegungsintegrale darstellen.

Den Energieerhaltungssatz kann man bei einer Kernreaktion auf folgende Weise schreiben:

$$E_a \equiv \varepsilon_a + E_A = \varepsilon_b + E_B \equiv E_b. \tag{8.1.4}$$

Hierbei sind ε_a und ε_b die Energien der Relativbewegung vor und nach der Reaktion; E_A und E_B die inneren Energien der Teilchen vor und nach der Reaktion. Es ist klar, daß die Reaktion A(a, b) B nur dann möglich ist, wenn $\varepsilon_b \geqq 0$ ist. Die Differenz $\varepsilon_b - \varepsilon_a = Q$ wird *Wärmetönung* oder *Q-Wert* der Reaktion genannt. Unter Benutzung von (8.1.4) haben wir

$$Q = E_A - E_B.$$

Die Reaktion A(a, b) B heißt *exotherm*, wenn $Q > 0$, und *endotherm*, wenn $Q < 0$ ist. Aus der Ungleichung $\varepsilon_b \geqq 0$ folgt, daß die endotherme Reaktion nur dann möglich ist, wenn

$$\varepsilon_a \geqq -Q \tag{8.1.5}$$

ist. Die Ungleichung (8.1.5) bestimmt uns diejenige minimale kinetische Energie der Relativbewegung von a und A, bei der die Reaktion A(a, b) B gerade möglich ist. Der Energie $-Q$ entspricht im Laborsystem (wenn A ruht und sich nur a bewegt) die Energie

$$\varepsilon_{schw} = -Q \frac{M_a}{\mu},$$

wobei M_a die Masse des Teilchens a und μ die reduzierte Masse der Teilchen a und A ist. Die Energie ε_{schw} wird *Reaktionsschwelle* genannt.

Die Erhaltungssätze für den Drehimpuls und die Parität führen zu entsprechenden Auswahlregeln für die Kernreaktionen. Sie werden im weiteren an einer Reihe von Beispielen betrachtet.

Wie wir schon sagten, stellt der Isospin wegen der Ladungsunabhängigkeit der Kernkräfte für die leichten Kerne eine gute Quantenzahl dar. Die Erhaltung des Isospins bei Kernreaktionen führt zu einer Reihe nützlicher Auswahlregeln:

a) beim Zerfall eines Kerns mit dem Isospin T muß der Betrag der Vektorsumme der Isospins der Zerfallsprodukte gleich T sein;

b) wenn bei einer Kernreaktion Anfangs- und Endteilchen den Isospin Null besitzen, z. B. bei den Reaktionen (d, d′), (α, α'), (d, α), (α, d) u. a., muß der Restkern den gleichen Isospin besitzen wie der Anfangskern;

c) der Übergang eines Kerns in einen angeregten Zustand bei der Wechselwirkung mit α-Teilchen oder Deuteronen ($T = 0$) oder der Zerfall eines Kerns unter Emission eines α-Teilchens oder Deuterons müssen ohne Änderung des Isospins verlaufen. So ist es unmöglich, bei der elastischen Streuung von Deuteronen an Kernen, deren Grundzustand den Isospin Null besitzt, Zustände mit dem Isospin Eins anzuregen. Es ist z. B. nicht möglich, das 3,56-MeV-Niveau des ^{6}Li oder das 2,31-MeV-Niveau des ^{14}N oder das 1,74-MeV-Niveau des ^{10}B anzuregen, die alle den Isospin $T = 1$ besitzen. Diese Auswahlregeln weisen ferner darauf hin, daß es nicht möglich ist, das 2,31-MeV-Niveau des ^{14}N in den Reaktionen ^{16}O(d, α)^{14}N, ^{14}N(α, α')^{14}N oder das 1,74-MeV-Niveau des ^{10}B durch die Reaktion ^{12}C(d, α)^{10}B zu erhalten.

8.2. Streumatrix. Kanäle einer Reaktion

Der Einfachheit halber betrachten wir zunächst die Streuung von spinlosen Teilchen (z. B. α-Teilchen) an Kernen mit dem Spin Null (gg-Kerne). Außerdem werden wir nur die spezifischen Kernkräfte und nicht die COULOMB-Wechselwirkung berücksichtigen.

Wir nehmen an, daß der Anfangszustand durch die Wellenfunktion

$$\Phi_a = \psi_a(\ldots, q, \ldots)\, v_a^{-1/2} \exp(i\mathfrak{k}_a\mathfrak{r}) \tag{8.2.1}$$

gegeben wird, wobei ψ_a den inneren Zustand des Kerns A beschreibt und v_a die Relativgeschwindigkeit der Teilchen a und A ist. Die Funktion (8.2.1) ist auf den Strom normiert, d. h., bei Benutzung von (8.2.1) erhält man den Einheitsstrom. Entwickelt man die ebene Welle (8.2.1) nach Kugelfunktionen, so kann man Φ_a als Superposition von Partialwellen darstellen, die bestimmten Werten des Bahndrehimpulses entsprechen. Die Funktion (8.2.1) zeigt dann folgendes asymptotisches Verhalten ($k_a r \gg 1$):

$$\Phi_a = \psi_a(q)\, \frac{\sqrt{\pi}}{k_a r \sqrt{v_a}} \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{2l+1}\, i^{l+1}\, Y_{l0}(\vartheta) \left(e^{-i\left(k_a r - \frac{l\pi}{2}\right)} - e^{i\left(k_a r - \frac{l\pi}{2}\right)}\right). \tag{8.2.2}$$

Durch die Wechselwirkung zwischen a und A entsteht ein neuer Zustand, dessen Wellenfunktion bei $k\,r \gg 1$ die Form

$$\psi(r, q) = \Phi_a + \frac{\sqrt{\pi}}{k_a r} \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{2l+1}\, i^{l+1} Y_{l0} \times$$
$$\times \left\{ (1 - S_{aa}^{(l)}) \frac{\psi_a(q)}{\sqrt{v_a}} e^{i\left(k_a r - \frac{l\pi}{2}\right)} - \sum_b S_{ba}^{(l)} \frac{\psi_b(q)}{\sqrt{v_b}} e^{i\left(k_b r - \frac{l\pi}{2}\right)} \right\} \tag{8.2.3}$$

besitzt, wobei v_b die Geschwindigkeit der Relativbewegung der Teilchen nach der Reaktion und Φ_a die Wellenfunktion des Anfangszustands sind. Die Glieder mit der Wellenfunktion $\psi_a(q)$ entsprechen der elastischen Streuung, diejenigen mit den Wellenfunktionen $\psi_b(q)$ der unelastischen Streuung und allen möglichen Reaktionen; die Koeffizienten $S_{ba}^{(l)}$ bilden die *Streumatrix*, die das asymptotische Verhalten der Wellenfunktion außerhalb des Wechselwirkungsbereiches bestimmt. Wenn keine Reaktion vor sich geht, ist $S_{ba} = \delta_{ba}$. Wenn nur elastische Streuung auftritt, so sind die Elemente S_{aa} der Streumatrix mit den Phasenverschiebungen δ_l über die Beziehung $S_{aa}^{(l)} = \exp 2i\,\delta_l$ verknüpft, wobei die δ_l reell sind.[1])

Wir multiplizieren (8.2.3) mit $\psi_a^*(q)$ und integrieren über alle Variablen q; wegen der Orthogonalität der Zustände $\psi_a(q)$ und $\psi_b(q)$ erhalten wir dann

$$\varphi_a(r) = \frac{e^{i \mathfrak{k}_a \mathfrak{r}}}{\sqrt{v_a}} + \frac{\sqrt{\pi}}{k_a r \sqrt{v_a}} \sum_l \sqrt{2l+1}\, i^{l+1} Y_{l0}(\vartheta)\, [1 - S_{aa}^{(l)}]\, e^{i\left(k_a r - \frac{l\pi}{2}\right)}. \tag{8.2.4}$$

Wird (8.2.3) mit $\psi_b^*(q)$ multipliziert und über q integriert, so erhalten wir

$$\varphi_b(r) = -\frac{1}{k_a r} \sqrt{\frac{\pi}{v_b}} \sum_l \sqrt{2l+1}\, i^{l+1} Y_{l0}(\vartheta)\, S_{ba}^{(l)} e^{i\left(k_b r - \frac{l\pi}{2}\right)}. \tag{8.2.5}$$

Die Wellenfunktion (8.2.5) bestimmt die Relativbewegung der Reaktionsprodukte bei vorgegebenem Quantenzustand ψ_b des Restkerns. Jede der Möglichkeiten, die durch die Funktionen (8.2.4) oder (8.2.5) dargestellt werden, nennt man einen *Kanal der Reaktion*. Die Wellenfunktion (8.2.4), in welche die einfallende und die elastisch gestreute Welle eingehen, entspricht dem Anfangs- oder Eingangskanal, die Wellenfunktion (8.2.5) dem Ausgangskanal der Reaktion. Der Kanal b der Reaktion $a \to b$ heißt *offen*, wenn die entsprechende Reaktion mit dem Energieerhaltungssatz, Drehimpulssatz, Paritätssatz und den anderen Bewegungsintegralen vereinbar ist. Im allgemeinen Fall ist die Matrix $S_{ba}^{(l)}$ für Reaktionen mit N offenen Kanälen eine quadratische Matrix mit N Zeilen und Spalten.

Jede beliebige Reaktion, die dem Übergang $\Phi_a \to \Phi_b$ entspricht, führt zu einer Schwächung des auslaufenden Teils der einfallenden ebenen Welle.

---

[1]) In diesem Kapitel werden Reaktionen, die zur Absorption des einfallenden Teilchens durch den Kern mit nachfolgender Emission von γ-Quanten führen, nicht betrachtet. Man nennt diese Reaktionen „Einfangreaktionen“; wir werden sie im Kap. 11 untersuchen.

Es ist, als ob die Reaktion eine Absorption des auslaufenden Teiles der ebenen Welle, welche die Relativbewegung der Teilchen a und A beschreibt, bewirkt. Diese „Absorption“ kann man als Verminderung der Intensität des auslaufenden Teiles der Welle interpretieren, die durch Interferenz mit einer gestreuten Welle entgegengesetzter Phase hervorgerufen wird; mit anderen Worten, jede beliebige Reaktion wird notwendig von einer elastischen Streuung begleitet.

Da der Fluß der einlaufenden Welle (für jede Partialwelle mit gegebenem l) der Summe der Flüsse aller gestreuten Wellen gleich sein muß, erhalten wir aus (8.2.4) und (8.2.5) folgende Gleichung:

$$1 = S_{aa}^{(l)} S_{aa}^{*(l)} + \sum_{b \neq a} S_{ba}^{*(l)} S_{ba}^{(l)} = \sum_{b} S_{ab}^{+} S_{ba}.$$

Mit anderen Worten, die Streumatrix $S^{(l)}$ muß unitär sein:

$$S^{+} S = 1. \tag{8.2.6}$$

Berechnet man den Fluß durch das Flächenelement $r^2\, d\Omega$, der durch die auslaufende Kugelwelle im Kanal $b \neq a$ und im Kanal a hervorgerufen wird, und dividiert das Resultat durch die Stromdichte der einfallenden Teilchen (bei unserer Normierung durch 1), so erhält man den differentiellen Reaktionsquerschnitt im Ausgangskanal b und den differentiellen Querschnitt der elastischen Streuung (Kanal a):

$$d\sigma_{ba} = \frac{\pi}{k_a^2} \sum_{l} \sum_{l'} \sqrt{(2l+1)(2l'+1)}\, S_{ab}^{(l)} S_{ab}^{*(l')}\, Y_{l0}(\vartheta)\, Y_{l'0}^{*}(\vartheta)\, d\Omega, \tag{8.2.7}$$

$$d\sigma_{aa} = \frac{\pi}{k_a^2} \sum_{l} \sum_{l'} \sqrt{(2l+1)(2l'+1)}\, (1 - S_{aa}^{(l)})(1 - S_{aa}^{(l')*})\, Y_{l0}(\vartheta)\, Y_{l'0}^{*}(\vartheta)\, d\Omega. \tag{8.2.8}$$

Werden (8.2.7) und (8.2.8) über die Winkel integriert, so erhalten wir die integralen Reaktionsquerschnitte σ_{ba} im Kanal b und den integralen Querschnitt der elastischen Streuung $\sigma_e \equiv \sigma_{aa}$:

$$\sigma_{ba} = \frac{\pi}{k_a^2} \sum_{l} (2l+1)\, |S_{ba}^{(l)}|^2, \tag{8.2.9}$$

$$\sigma_e = \frac{\pi}{k_a^2} \sum_{l} (2l+1)\, |1 - S_{aa}^{(l)}|^2. \tag{8.2.10}$$

Die Summe aller Reaktionsquerschnitte über alle möglichen Kanäle wird kurz Reaktionsquerschnitt oder Wirkungsquerschnitt der Reaktion genannt:

$$\sigma_r = \sum_{b \neq a} \sigma_{ba} = \frac{\pi}{k_a^2} \sum_{b \neq a} \sum_{l} (2l+1)\, |S_{ba}^{(l)}|^2. \tag{8.2.11}$$

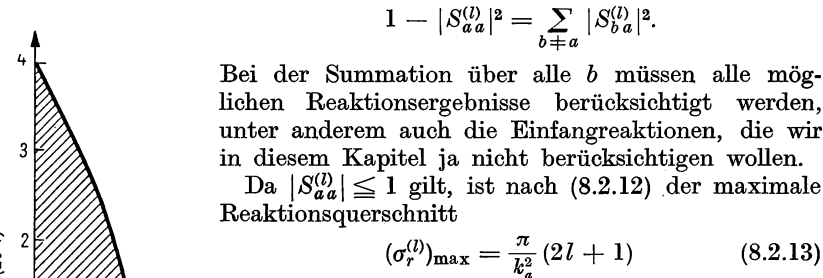
Den Reaktionsquerschnitt (8.2.11) kann man bereits erhalten, wenn man das asymptotische Verhalten (8.2.4) der Wellenfunktion im Eingangskanal kennt. Der Reaktionsquerschnitt kann demnach als Verhältnis zweier Flüsse definiert werden: einerseits des Flusses durch eine Kugelfläche mit dem großen Radius r, der in der Kugel absorbiert wird, und andererseits der

Stromdichte der einfallenden Welle. Da bei unserer Normierung die Stromdichte der einfallenden Teilchen gleich Eins ist, ist der Reaktionsquerschnitt zahlenmäßig gleich dem Fluß in Richtung der inneren Normalen der Kugelfläche:

$$\sigma_r = \frac{i\hbar}{2\mu} r^2 \int\limits_{\Omega} \left(\varphi_a^* \frac{\partial \varphi_a}{\partial r} - \varphi_a \frac{\partial \varphi_a^*}{\partial r} \right) d\Omega =$$

$$= \frac{\pi}{k_a^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(1 - |S_{aa}^{(l)}|^2). \tag{8.2.12}$$

Die Äquivalenz von (8.2.11) und (8.2.12) folgt aus der Unitarität der Streumatrix:



$$1 - |S_{aa}^{(l)}|^2 = \sum_{b \neq a} |S_{ba}^{(l)}|^2.$$

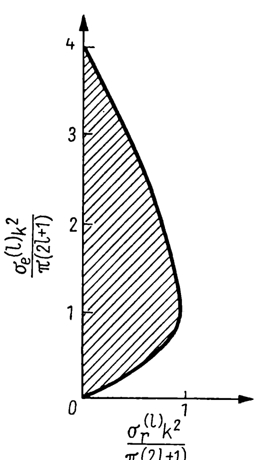


Abb. 55. Mögliche obere und untere Grenzen für den Wirkungsquerschnitt der elastischen Streuung bei vorgegebenem Reaktionsquerschnitt

Bei der Summation über alle b müssen alle möglichen Reaktionsergebnisse berücksichtigt werden, unter anderem auch die Einfangreaktionen, die wir in diesem Kapitel ja nicht berücksichtigen wollen.

Da $|S_{aa}^{(l)}| \leqq 1$ gilt, ist nach (8.2.12) der maximale Reaktionsquerschnitt

$$(\sigma_r^{(l)})_{\max} = \frac{\pi}{k_a^2}(2l+1) \tag{8.2.13}$$

und der maximal mögliche Querschnitt der elastischen Streuung

$$(\sigma_e^{(l)})_{\max} = \frac{4\pi}{k_a^2}(2l+1). \tag{8.2.14}$$

Der maximal mögliche Partialquerschnitt der elastischen Streuung ist somit um den Faktor 4 größer als der maximal mögliche Reaktionsquerschnitt, da der Streuquerschnitt nicht nur vom Absolutwert von $S_{aa}^{(l)}$ abhängt wie der Reaktionsquerschnitt, sondern auch von der Phasenverschiebung. Das schraffierte Gebiet in Abb. 55 gibt die möglichen oberen und unteren Grenzen des Querschnitts der elastischen Streuung bei vorgegebenem Wert des Reaktionsquerschnitts wieder.

Berechnen wir nun den totalen Streuquerschnitt

$$\sigma_t = \sigma_e + \sigma_r.$$

Unter Benutzung von (8.2.10) und (8.2.12) erhalten wir

$$\sigma_t = \frac{2\pi}{k_a^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(1 - \Re e\, S_{aa}^{(l)}). \tag{8.2.15}$$

An Stelle der Streumatrix S_{ba} kann man die äquivalente Matrix B_{ba} einführen:

$$i\, B_{ba} = (S - 1)_{ba}. \tag{8.2.16}$$

Da $(1)_{ba} = \delta_{ba}$ ist, wird $i\,B_{aa} = S_{aa} - 1$ und $i\,B_{ba} = S_{ba}$. Man kann deshalb (8.2.9) und (8.2.10) auch auf folgende symmetrischere Weise schreiben:

$$\sigma_{ba} = \frac{\pi}{k_a^2} \sum_l (2l+1)\,|B_{ba}^{(l)}|^2, \tag{8.2.9a}$$

$$\sigma_e = \frac{\pi}{k_a} \sum_l (2l+1)\,|B_{aa}^{(l)}|^2. \tag{8.2.10a}$$

Unter Berücksichtigung von (8.2.9a) bestimmen wir den Reaktionsquerschnitt

$$\sigma_r = \sum_{b \neq a} \sigma_{ba} = \frac{\pi}{k_a^2} \sum_{b \neq a} \sum_l (2l+1)\,|B_{ba}^{(l)}|^2 \tag{8.2.17}$$

und den totalen Streuquerschnitt

$$\sigma_t = \frac{\pi}{k_a^2} \sum_b \sum_l (2l+1)\,|B_{ba}^{(l)}|^2. \tag{8.2.18}$$

Aus der Unitarität der Streumatrix (8.2.6) und der Beziehung (8.2.16) folgt, daß die Matrix B_{ba} nicht unitär ist:

$$B^+ B = i(B - B^+). \tag{8.2.19}$$

Nach Gl. (8.2.19) gilt

$$\sum_b B_{ab}^+ B_{ba} = i(B_{aa} - B_{aa}^*) \quad \text{oder} \quad \sum_b |B_{ba}|^2 = -2\,\Im\mathrm{m}\, B_{aa}. \tag{8.2.20}$$

Unter Benutzung von (8.2.20) kann man (8.2.18) in der Form

$$\sigma_t = -\frac{2\pi}{k_a^2} \sum_b \sum_l (2l+1)\,\Im\mathrm{m}\, B_{aa}^{(l)} \tag{8.2.21}$$

schreiben. Die Äquivalenz von (8.2.15) und (8.2.21) läßt sich leicht beweisen, wenn man die Gl. (8.2.16) berücksichtigt, aus der folgt

$$-\Im\mathrm{m}\, B_{aa}^{(l)} = 1 - \Re\mathrm{e}\, S_{aa}^{(l)}.$$

Die physikalische Bedeutung der Proportionalität zwischen dem Imaginärteil der Streumatrix B_{aa}, welche die Vorwärtsstreuung charakterisiert, und dem totalen Streuquerschnitt besteht darin, daß ein beliebiger Stoßprozeß das Teilchen aus dem direkten Bündel herauslenkt, d. h. eine Schwächung des direkten Bündels hervorruft.

Alle bisher abgeleiteten Formeln vereinfachen sich, wenn man die Wechselwirkung langsamer Neutronen mit Kernen betrachtet. Als „langsam" bezeichnet man Neutronen, deren Wellenlänge groß gegen den Kernradius R ist. In diesem Fall nimmt an der Wechselwirkung mit dem Kern nur der Zustand mit $l = 0$ teil, d. h., in allen Formeln, die in diesem Abschnitt angeführt wurden, muß man $S_{aa}^{(l)} = 1$ setzen, wenn $l \neq 0$ ist. Die Summe über l wird also durch den einzigen Summanden mit $l = 0$ dargestellt.

8.3. Zeitumkehr, Reziprozitätssatz und Satz vom detaillierten Gleichgewicht

In der Streutheorie ist der HAMILTON-Operator invariant gegen Wechsel des Vorzeichens der Zeit. Auf Grund dieser Invarianz kann man einige allgemeingültige Beziehungen herleiten, die die Übergangswahrscheinlichkeiten mit den Wirkungsquerschnitten für direkte und umgekehrte Prozesse verknüpfen.

Hinsichtlich des Verfahrens der Zeitumkehr lassen sich alle physikalischen Größen in zwei Klassen einteilen: Zur ersten Klasse gehören die physikalischen Größen, die sich bei Zeitumkehr nicht ändern. Derartige Größen sind z. B. die Lagekoordinaten, die Gesamtenergie, die kinetische Energie u. a., die nur geradzahlige Potenzen der Zeit enthalten. Zur zweiten Klasse gehören die Geschwindigkeit, der Impuls, Drehimpuls, Spin und alle anderen Größen, die ungeradzahlige Potenzen der Zeit enthalten.

Wir betrachten die zeitabhängige SCHRÖDINGER-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_a}{\partial t} = H \Psi_a, \tag{8.3.1}$$

die die zeitliche Änderung irgendeines Zustandes Ψ_a bestimmt. Mit Ψ_{-a} sei die Wellenfunktion des Zustandes bezeichnet, der aus dem Zustand Ψ_a mittels des Verfahrens der Zeitumkehr erhalten wird. Im Zustand Ψ_{-a} haben alle physikalischen Größen der ersten Klasse dieselben Werte wie im Zustand Ψ_a, während die Größen der zweiten Klasse das entgegengesetzte Vorzeichen haben.

Θ sei der Operator der Zeitumkehr, der die Wellenfunktion Ψ_a in die Funktion Ψ_{-a} überführt. Die Funktion Ψ_{-a} erfüllt dann die SCHRÖDINGER-Gleichung

$$-i\hbar \frac{\partial \Psi_{-a}}{\partial t} = H \Psi_{-a}, \tag{8.3.2}$$

da der Operator H invariant hinsichtlich Zeitumkehr ist. Wir betrachten die Gleichung der komplexen Konjugation zu Gl. (8.3.1)

$$-i\hbar \frac{\partial \Psi_a^*}{\partial t} = H^* \Psi_a^*. \tag{8.3.3}$$

Wenn ein unitärer Operator $\hat{O}$ die Bedingung

$$\hat{O} H^* = H \hat{O}, \quad \hat{O}^+ \hat{O} = 1 \tag{8.3.4}$$

erfüllt, so erhält man, wenn $\hat{O}$ von links auf beide Seiten der Gl. (8.3.3) wirkt:

$$-i\hbar \frac{\partial (\hat{O} \Psi_a^*)}{\partial t} = H \hat{O} \Psi_a^*.$$

Mit Gl. (8.3.2) folgt hieraus

$$\Psi_{-a} = \hat{O} \Psi_a^* = \hat{O} K \Psi_a = \Theta \Psi_a. \tag{8.3.5}$$

Der Operator der Zeitumkehr Θ, der die Funktion Ψ_a in die Funktion Ψ_{-a} überführt, hat demnach folgende Form:

$$\Theta = \hat{O} K, \tag{8.3.6}$$

wobei K der Operator der komplexen Konjugation und $\hat{O}$ der unitäre Operator mit der Bedingung (8.3.4) sind.

Der Operator K ist ein antilinearer Operator, da seine Wirkung auf die Funktion $\sum a_i \Psi_i$ durch die Beziehung

$$K \sum_i a_i \Psi_i = \sum a_i^* K \Psi_i \tag{8.3.7}$$

ausgedrückt wird. Weiterhin genügt der Operator K der Bedingung

$$|(K\Psi \mid K\Phi)| = |(\Psi^* \mid \Phi^*)| = |(\Psi \mid \Phi)|, \tag{8.3.8}$$

läßt also den Absolutbetrag des Skalarprodukts zweier beliebiger Funktionen unverändert und ändert folglich nicht die Normierung der Wellenfunktion. Operatoren, die den Gln. (8.3.7) und (8.3.8) genügen, nennt man antiunitär. Das Produkt eines unitären Operators mit einem antiunitären ergibt einen antiunitären Operator. Der Operator der Zeitumkehr Θ ist demnach antiunitär.

Die explizite Form des Operators der Zeitumkehr hängt ab von der Form des HAMILTON-Operators des Systems und von der Darstellung, in der die Wellenfunktion gegeben ist. Wir betrachten drei Beispiele:

a) Der Operator H beschreibe spinlose Teilchen bei Abwesenheit eines Magnetfeldes. Dann gilt $H = H^*$, und der Operator der Zeitumkehr ist in der Koordinatendarstellung $\Theta = K$. Für $H = H^*$ erfüllt $\hat{O} = 1$ die Beziehung (8.3.4). Nach den allgemeinen Regeln soll die Transformation der Funktion (8.3.4) von einer Transformation der Operatoren $\hat{F}_{-a} = \Theta \hat{F}_a \Theta^{-1}$ begleitet sein. Für $\hat{\mathfrak{r}} = \mathfrak{r}$ und $\mathfrak{p} = -i\hbar\nabla$ folgt dann:

$$\hat{\mathfrak{r}}_{-a} = K\,\hat{\mathfrak{r}}_a K^{-1} = \hat{\mathfrak{r}}_a, \qquad \hat{\mathfrak{p}}_{-a} = K(-i\hbar\nabla)\,K^{-1} = -\hat{\mathfrak{p}}_a.$$

Wie zu erwarten, bleibt der Operator der Lagekoordinaten unverändert, während der Operator des Impulses bei Zeitumkehr sein Vorzeichen ändert.

In der Impulsdarstellung wird $H^* \neq H$, $\hat{\mathfrak{r}} = i\hbar\nabla_p$ und $\hat{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$. In diesem Fall ist der Operator der Zeitumkehr nicht einfach gleich dem Operator K, sondern man muß $\Theta = \hat{O}_p K$ setzen, wobei $\hat{O}_p$ der Operator ist, der $\mathfrak{p}$ in $-\mathfrak{p}$ überführt. Dann gilt $\hat{O}_p H^* = H\hat{O}_p$ und damit

$$\hat{\mathfrak{r}}_{-a} = \hat{O}_p K(i\hbar\nabla_p)\,(\hat{O}_p K)^{-1} = \hat{\mathfrak{r}}_a,$$
$$\hat{\mathfrak{p}}_{-a} = \hat{O}_p K(\hat{\mathfrak{p}}_a)\,(O_p K)^{-1} = -\hat{\mathfrak{p}}_a.$$

b) Der Operator H enthalte die Wechselwirkung mit einem elektromagnetischen Feld, z. B.

$$H = \frac{1}{2M}\left(\mathfrak{p} - \frac{e}{c}\mathfrak{A}\right)^2 + V(\mathfrak{r}).$$

Dann ist in der Koordinatendarstellung

$$\hat{\mathfrak{p}} = -i\hbar\nabla, \qquad \hat{\mathfrak{r}} = \mathfrak{r},$$

und Gl. (8.3.4) wird dann erfüllt, wenn der Operator $\hat{O} = \hat{O}_A$ das Vektorpotential $\mathfrak{A}$ in $-\mathfrak{A}$ überführt. Es folgt

$$\Theta = \hat{O}_A K, \qquad \hat{\mathfrak{r}}_{-a} = \hat{\mathfrak{r}}_a, \qquad \hat{\mathfrak{p}}_{-a} = -\hat{\mathfrak{p}}_a.$$

In der Impulsdarstellung ist $\hat{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$, $\hat{\mathfrak{r}} = i\hbar\nabla_p$, und der Operator der Zeitumkehr wird $\Theta = \hat{O}_A\hat{O}_p K$, wobei der Operator $\hat{O}_p$ im ersten Beispiel definiert wurde.

c) Der Operator H enthalte Spinoperatoren, z. B.

$$H = \frac{1}{2M}\left(\mathfrak{p} - \frac{e}{c}\mathfrak{A}\right)^2 - \frac{e\hbar\vec{\sigma}}{2Mc}\operatorname{rot}\mathfrak{A} + V(\mathfrak{r}).$$

Um in diesem Fall die Operatorgleichung (8.3.4) in der Koordinatendarstellung erfüllen zu können, muß $\hat{O} = \hat{O}_A\hat{O}_\sigma$ sein, wobei $\hat{O}_A$ das Vektorpotential $\mathfrak{A}$ in $-\mathfrak{A}$ überführt und der Spinoperator $\hat{O}_\sigma$ der Operatorengleichung $\hat{O}_\sigma\vec{\sigma}^* = -\vec{\sigma}\,\hat{O}_\sigma$ genügt. Wenn die Vektormatrix $\vec{\sigma}$ in der Darstellung

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gegeben ist, wird

$$\hat{O}_\sigma = i\,\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\Theta = i\,\hat{O}_A\,\sigma_y K.$$

Man überzeugt sich leicht, daß die Spinmatrix $i\,\sigma_y$, die in den Operator der Zeitumkehr eingeht, bei der Wirkung auf die Wellenfunktion eines Zustandes mit bestimmtem Wert der Spinprojektion auf die z-Achse den Wert der Spinprojektion umkehrt:

$$i\,\sigma_y\,\chi_{1/2\,1/2} = -\chi_{1/2,\,-1/2}, \qquad i\,\sigma_y\,\chi_{1/2,\,-1/2} = \chi_{1/2\,1/2}.$$

Im Abschn. 9.1. wird ein allgemeiner Satz bewiesen, nach dem die Matrixelemente des direkten und des zeitlich umgekehrten Prozesses bis auf einen Phasenfaktor einander gleich sind:

$$T_{ba} = T_{-a,\,-b}, \tag{8.3.9}$$

bzw. die äquivalente Beziehung

$$S_{ba} = S_{-a,\,-b} \tag{8.3.9a}$$

gilt.

Die Übergangswahrscheinlichkeit je Zeiteinheit für Übergänge vom Zustand a in den Zustand b wird durch die Übergangsmatrix T_{ba} und die Dichte der Endzustände $\varrho_b(\varepsilon)$ (bezogen auf das Einheitsenergieintervall) durch folgende Formel ausgedrückt:

$$W_{ba} = \frac{2\pi}{\hbar}\,|T_{ba}|^2\,\varrho_b(\varepsilon).$$

Aus (8.3.9) folgt deshalb der *Reziprozitätssatz*, der die Wahrscheinlichkeit des direkten (W_{ba}) mit der Wahrscheinlichkeit des zeitlich umgekehrten Prozesses ($W_{-a,\,-b}$) verknüpft:

$$\frac{W_{ba}}{\varrho_b(\varepsilon)} = \frac{W_{-a,\,-b}}{\varrho_{-a}(\varepsilon)}. \tag{8.3.10}$$

Wenn die Dichten der Endzustände (statistischen Gewichte) der beiden Prozesse gleich sind, so ist demzufolge die Wahrscheinlichkeit des direkten gleich der Wahrscheinlichkeit des zeitlich umgekehrten Prozesses.

Aus (8.2.9) und (8.3.9a) folgt noch eine einfache Beziehung zwischen dem Wirkungsquerschnitt der direkten Reaktion ($a \to b$) und der Reaktion, die dem zeitlich umgekehrten Übergang ($-b \to -a$) entspricht, für Reaktionen, die durch Gl. (8.2.9) beschrieben werden:

$$k_a^2\,\sigma_{-b,\,-a} = k_b^2\,\sigma_{ab}. \tag{8.3.10a}$$

Die Wellengleichungen ändern sich nicht bei Inversion der räumlichen Koordinaten $(x, y, z) \to (-x, -y, -z)$. Bei gleichzeitiger räumlicher Inversion und Zeitumkehr bleiben die Teilchengeschwindigkeiten unverändert. Die Komponenten des Drehimpulses erhalten das entgegengesetzte Vorzeichen. Wenn der Zustand nur durch die Geschwindigkeiten charakterisiert wird und nicht von den Spins abhängt, gilt somit die Gleichung

$$T_{ab} = T_{ba} \quad \text{oder} \quad S_{ba} = S_{ab}.$$

In diesem Fall sagt man, daß *detailliertes Gleichgewicht* besteht, bei dem die auf einen Endzustand bezogenen Wahrscheinlichkeiten von direktem und umgekehrtem Prozeß gleich sind:

$$\frac{W_{ab}}{\varrho_a} = \frac{W_{ba}}{\varrho_b}.$$

Man kann zeigen, daß in der ersten BORNschen Näherung das detaillierte Gleichgewicht für alle Systeme erfüllt ist. Die Übergangsmatrix $T_{ba} = (\Phi_b, V\Psi_a)$ genügt in der ersten BORNschen Näherung der Gleichung

$$T^{(B)}_{ba} \equiv (\Phi_b, V\,\Phi_a) = (\Phi_a, V\,\Phi_b)^* \equiv T^{*(B)}_{ab}.$$

Für alle Systeme gilt folglich in der ersten BORNschen Näherung

$$\frac{W^{(B)}_{ba}}{\varrho_b} = \frac{W^{(B)}_{ab}}{\varrho_a}.$$

Wenn die Eigenschaften des Systems von der Spinorientierung abhängen, gibt es im direkten Sinn kein detailliertes Gleichgewicht, da die Zeitumkehr und die räumliche Inversion zu Zuständen führen, die sich vom umgekehrten Prozeß durch andere Werte der Spinprojektionen unterscheiden. Deshalb ist $W_{ba}/\varrho_b = W_{-a,\,-b}/\varrho_a$ und nicht gleich W_{ab}/ϱ_a.

Das detaillierte Gleichgewicht ist nur für Wahrscheinlichkeiten erfüllt, die über die Spinprojektionen von Anfangs- und Endzustand gemittelt sind:

$$\frac{1}{\varrho_b}\sum_{\text{Spins}} W_{ba} = \frac{1}{\varrho_a}\sum_{\text{Spins}} W_{ab}.$$

Der Reziprozitätssatz und die Unitarität der Streumatrix S_{ab} führen zu zusätzlichen Bedingungen für die Elemente der Streumatrix und schränken die Zahl der unabhängigen Parameter ein, die die Streumatrix bestimmen. Für Reaktionen, die über N mögliche Kanäle verlaufen, enthält die komplexe Streumatrix $2N^2$ reelle Parameter. Wegen der Unitarität der Streumatrix und wegen des Reziprozitätssatzes sind nur $^1/_2\,N(N+1)$ von diesen $2N^2$ Parametern unabhängig. Zum Beweis dieser Behauptung schreiben wir die Streumatrix in folgender Form:

$$S = \frac{1 - \frac{1}{2} i R}{1 + \frac{1}{2} i R}. \tag{8.3.11}$$

Hierbei ist R eine hermitesche Streumatrix, d. h., es gilt $R^+ = R$. Die Darstellung (8.3.11) ist deshalb günstig, weil hier die Matrix S automatisch unitär ist: $S^+ = S^{-1}$. Aus (8.3.11) folgt

$$\frac{1}{2} i R = \frac{1 - S}{1 + S}.$$

Berücksichtigt man, daß wegen des Reziprozitätssatzes die Streumatrix symmetrisch ist, so sieht man, daß auch die hermitesche Matrix R symmetrisch sein muß. Da eine symmetrische hermitesche Matrix der Ordnung N gerade $^1/_2\,N(N+1)$ unabhängige Elemente besitzt, enthält die Streumatrix ebenfalls $^1/_2\,N(N+1)$ unabhängige Parameter, was zu beweisen war.

8.4. Dispersionsrelationen in der Streutheorie

Als Dispersionsrelationen bezeichnet man in der Streutheorie Integralbeziehungen, die den Realteil der Streuamplitude (oder der Streumatrix) mit ihrem Imaginärteil verknüpfen. Wir werden hier einige Dispersionsrelationen für nichtrelativistische Energien der Relativbewegung der wechselwirkenden Teilchen betrachten.

Die Dispersionsrelationen beruhen auf den Eigenschaften analytischer Funktionen von komplexen Veränderlichen. Zu ihrer Ableitung muß die Streuamplitude (Streumatrix) nicht nur für reelle Werte der Relativenergie, sondern auch für komplexe Werte definiert werden.

Zur Veranschaulichung der Grundgedanken, die bei der Ableitung der Dispersionsrelationen benutzt werden, betrachten wir das einfachste Beispiel der S-Streuung von spinlosen Teilchen in einem zentralsymmetrischen Feld. Nach Abschn. 7.3. besitzt der Radialteil der Wellenfunktion, welche die S-Streuung in einem Potentialfeld der endlichen Reichweite d beschreibt, folgende Form:

$$R = c\,\{\mathrm{e}^{-ikr} - S(k)\,\mathrm{e}^{ikr}\}\,\mathrm{e}^{-i\varepsilon\frac{t}{\hbar}}. \tag{8.4.1}$$

In (8.4.1) ist auch die Abhängigkeit von der Zeit berücksichtigt. Das Diagonalelement $S(k)$ der Streumatrix ist eine Funktion der Energie der Relativbewegung bzw. der entsprechenden Wellenzahl. Nach Definition stellt die Streumatrix $S(k)$ einen Operator dar, der den auslaufenden Teil e^{ikr} der einfallenden Welle in die Funktion $S(k)\,\mathrm{e}^{ikr}$ umwandelt, welche die gestreute Welle beschreibt. Ersetzt man in (8.4.1) k durch $-k$, so erhält man leicht

$$S(k) = S^{-1}(-k) \quad \text{oder} \quad S(k)\,S(-k) = 1. \tag{8.4.2}$$

Andererseits kann man sich durch Vergleich von (8.4.1) mit dem zu (8.4.1) konjugiert komplexen Ausdruck leicht davon überzeugen, daß

$$S^{-1}(k) = S^*(k) \tag{8.4.3}$$

ist. Die Gl. (8.4.3) besagt, daß die Streumatrix unitär ist.

In der Physik wird neben der positiven Energie, welche der Endbewegung (Streuung) entspricht, und der negativen Energie, die zu gebundenen Zuständen gehört, oft der Begriff der komplexen Energie

$$\varepsilon = \varepsilon_0 - \frac{i}{2}\hbar\Lambda \tag{8.4.4}$$

zur Beschreibung von nichtstationären Zuständen gebraucht. Die Größe Λ in (8.4.4) bestimmt die Wahrscheinlichkeit des Zerfalls in der Zeiteinheit und wird *Zerfallskonstante* genannt. Sie ist positiv, wenn die Wellenfunktion im Laufe der Zeit abnimmt (radioaktiver Zerfall), und negativ, wenn die Wellenfunktion mit der Zeit anwächst, z. B. beim Einfang eines Nukleons durch den Kern.

Komplexen Werten der Energie ε entsprechen komplexe Wellenzahlen

$$k = q_1 - i\,q_2, \tag{8.4.5}$$

wobei q_1 und q_2 mit den Werten ε_0 und Λ aus (8.4.4) und der reduzierten Masse μ der stoßenden Teilchen durch die einfache Beziehung

$$\frac{2\mu}{\hbar^2}\left(\varepsilon_0 - \frac{i}{2}\hbar\Lambda\right) = (q_1^2 - q_2^2) - 2i\,q_1 q_2 \tag{8.4.6}$$

verknüpft sind.

Die Streumatrix $S(k)$, die als Funktion einer reellen Veränderlichen definiert ist, kann in das Gebiet komplexer Werte der Wellenzahl k analytisch fortgesetzt werden. In diesem Fall bleibt die durch Gl. (8.4.2) ausgedrückte Eigenschaft der Streumatrix erhalten; die Gl. (8.4.3), welche die Unitarität der Streumatrix für elastische Streuung beinhaltet, wird jedoch ungültig. An Stelle von (8.4.3) gilt jetzt nach (8.4.1)

$$S^{-1}(k) = S^*(k^*). \tag{8.4.7}$$

Aus der Bedingung (8.4.7) folgt: Nimmt die S-Matrix in irgendeinem Punkt k_1 der komplexen Ebene den Wert Null an, so muß sie notwendig im Punkt $k_1' = k_1^*$ einen Pol besitzen, der symmetrisch zur reellen Achse liegt.

Betrachten wir nun, welche physikalischen Erscheinungen die Streumatrix beschreibt, wenn sie als Funktion komplexer Wellenzahlen betrachtet wird. Ist k reell ($q_2 = 0$), so beschreibt die Streumatrix die wirklichen Streuprozesse. Ist die Wellenzahl rein imaginär ($q_1 = 0$), so gilt

$$k = -i\,q_2, \quad \varepsilon = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\,q_2^2. \tag{8.4.8}$$

Negativen Energien entsprechen gebundene Zustände des Systems. Das Integral über das Quadrat des Betrages der Wellenfunktion des gebundenen Zustandes muß endlich sein, d. h., der Ausdruck

$$|c|^2 \int_0^\infty |e^{-q_2 r} - S(-i\,q_2)\,e^{q_2 r}|^2\,dr \tag{8.4.9}$$

ist in unserem Fall eine endliche Zahl. Zur Erfüllung dieser Bedingung ist notwendig, daß $q_2 > 0$ und

$$S(-i\,q_2) = 0 \tag{8.4.10}$$

ist. Gebundenen Zuständen entsprechen folglich die Nullstellen der Funktion $S(k)$, die auf der negativen imaginären Achse liegen, bzw. die symmetrisch dazu vorhandenen Pole von $S(k)$ auf der positiven imaginären Achse.

Man kann zeigen, daß die Funktion $S(k)$ außer den Nullstellen auf der imaginären Achse keine Nullstellen in der unteren Hälfte der komplexen Ebene haben kann. Wir wollen zum Beweis annehmen, daß $S(k)$ im IV. Quadranten eine Nullstelle besitzt. Dann liefert die Funktion (8.4.1) einen nichtverschwindenden einlaufenden Strom $\frac{\hbar\,q_1}{\mu}\exp(-2q_2\,b)$ durch die Kugelfläche mit dem Radius b. Das widerspricht der Verringerung der Amplitude der Wellenfunktion innerhalb der Kugel, die wegen des Zeitfaktors $\exp(-\Lambda\,t)$ auftritt, da bei $q_1 > 0$ und $q_2 > 0$ die Konstante $\Lambda > 0$ ist. Auf die gleiche Weise kann man zeigen, daß auch im III. Quadranten keine Nullstellen vorhanden sein können. Eine Folge von (8.4.7) ist dann, daß es

in der oberen Halbebene außer den Polen auf der positiven imaginären Achse keine Pole geben kann.

Die Nullstellen der Funktion $S(k)$ im I. Quadranten beschreiben Einfangprozesse in Übereinstimmung mit der Kontinuitätsgleichung, während die Nullstellen im II. Quadranten die radioaktiven Zerfallsprozesse erfassen.

In der Arbeit von Hu [8,1] wurde gezeigt, daß die Streumatrix als Funktion der Wellenzahl k die Form

$$S(k) = \pm e^{ick} \prod_{\gamma} \frac{(k - k_\gamma^*)}{(k - k_\gamma)} \prod_{s} \frac{(k - k_s^*)(k + k_s)}{(k - k_s)(k + k_s^*)}$$

besitzen muß, wobei c eine Konstante von der Größenordnung der doppelten Reichweite der Kernkräfte, k_γ die Nullstellen und Pole auf der imaginären Achse und k_s die Nullstellen und Pole von k im übrigen Teil der komplexen Ebene sind. Im einzelnen wurde im Abschn. 7.5. gezeigt, daß bei der Streuung von Neutronen kleiner Energie an Protonen die Streumatrix in der Form

$$S(k) = -\frac{k + i\frac{1}{a}}{k - i\frac{1}{a}} \tag{8.4.11}$$

dargestellt werden kann, wobei die Streulänge $a = a_t$ im Fall der Triplettstreuung größer als Null und $a = a_s$ im Fall der Singulettstreuung kleiner als Null ist. Im Fall der Triplettstreuung langsamer Neutronen an Protonen besitzt die Streumatrix einen Pol auf der positiven imaginären Achse, der dem gebundenen Zustand des Systems (dem Deuteron) entspricht. Im Fall der Singulettstreuung besitzt die Streumatrix somit einen Pol, der auf der negativen imaginären Achse liegt und dem virtuellen Niveau des Systems entspricht.

Unter Benutzung von (7.3.10) schreiben wir die Beziehung zwischen der Streuamplitude in Vorwärtsrichtung und der Streumatrix S_l auf:

$$A_0 = \frac{i}{2k} \sum_{l=0} (2l + 1)(1 - S_l). \tag{8.4.12}$$

Im speziellen Fall der Streuung langsamer Neutronen ist S_l nur für $l = 0$ verschieden von Eins. Setzt man $S_0 = S$, so kann man schreiben

$$A_0 = \frac{i}{2k}(1 - S). \tag{8.4.12a}$$

Wird (8.4.11) in (8.4.12a) eingesetzt, so kann man die Streuamplitude für die Streuung langsamer Neutronen in Vorwärtsrichtung durch die Streulänge a ausdrücken:

$$A_0(k) = \frac{i}{k - i\frac{1}{a}} = \frac{ik - \frac{1}{a}}{k^2 + \frac{1}{a^2}}. \tag{8.4.13}$$

Um eine allgemeine Dispersionsrelation für die Streuamplitude zu erhalten, berücksichtigen wir, daß für beliebige analytische Funktionen $f(z)$ einer komplexen Veränderlichen z nach dem CAUCHYschen Satz die Gleichung

$$\oint \frac{f(z')\,dz'}{z' - z} = 2\pi i \sum_l \varrho_l$$

gilt, wobei über eine geschlossene Kurve zu integrieren ist, die den Punkt z nicht umschließt. Mit $\sum \varrho_l$ wird die Summe der Residuen aller Pole der Funktion $f(z)$ bezeichnet, die innerhalb des umschlossenen Gebietes liegen. Wenn sich der Punkt z auf der reellen Achse befindet, die Funktion $f(z)$ keine Pole auf der reellen Achse besitzt und bei $z \to \infty$ in der oberen Halbebene hinreichend schnell abnimmt, kann man bei geeigneter Wahl der Kurve die Gleichung in der Form

$$\mathrm{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(z')\, dz}{z' - z} - i\pi f(z) = 2\pi i \sum_l \varrho_l \tag{8.4.14}$$

schreiben. Das Zeichen P bedeutet, daß der Hauptwert des Integrals im Punkte $z' = z$ zu nehmen ist.

Aus (8.4.14) folgt eine Beziehung zwischen Imaginär- und Realteil der Funktion $f(z)$ auf der reellen Achse:

$$\Re e\, f(z) = \frac{1}{\pi} \mathrm{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Im m\, f(z')\, dz'}{z' - z} - 2 \Re e \sum_l \varrho_l . \tag{8.4.15}$$

Wenn die Wechselwirkung zwischen den Teilchen eine endliche Reichweite besitzt, so geht die Streuamplitude für Streuung in Vorwärtsrichtung bei $k \to \infty$ gegen einen endlichen reellen Grenzwert. Im speziellen Fall (8.4.13) ist dieser Grenzwert gleich Null. Betrachtet man die Funktion

$$f(k) = A_0(k) - A_0(\infty),$$

so ist zu sehen, daß sie den oben gestellten Bedingungen genügt und daß man die Beziehung (8.4.15) anwenden kann. Wird berücksichtigt, daß der Realteil der Streuamplitude eine gerade Funktion von k, der Imaginärteil dagegen eine ungerade Funktion ist, so kann man (8.4.15) in der Form

$$\Re e\, A_0(k) - A_0(\infty) = \frac{1}{\pi} \mathrm{P} \int_0^{\infty} \frac{2k'\, \Im m\, A_0(k')}{(k')^2 - k^2}\, dk' - 2 \Re e \sum_l \varrho_l \tag{8.4.16}$$

schreiben. Benutzt man den Zusammenhang zwischen dem Imaginärteil der Amplitude für Vorwärtsstreuung und dem Querschnitt der elastischen Streuung $\Im m\, A_0(k) = k\, \sigma(k)/4\pi$, so erhält man eine Beziehung zwischen dem Realteil der Amplitude für die Vorwärtsstreuung und dem Querschnitt der elastischen Streuung:

$$\Re e\, A_0(k) - A_0(\infty) = \frac{1}{2\pi^2} \mathrm{P} \int_0^{\infty} \frac{(k')^2\, \sigma(k')\, dk'}{(k')^2 - k^2} - 2 \Re e \sum_l \varrho_l . \tag{8.4.17}$$

Hierbei sind die ϱ_l die Residuen der Streuamplitude, die gebundenen Zuständen entsprechen; die Summation erfolgt über alle möglichen gebundenen Zustände.

Die Beziehungen (8.4.16) und (8.4.17) heißen *Dispersionsrelationen*. Wenn $\sigma(k)$ für alle Energien bekannt ist, so kann man aus (8.4.17) den Realteil der Streuamplitude durch Integration über $\sigma(k)$ berechnen.

Ist die analytische Fortsetzung von $A(k)$ im Unendlichen nicht beschränkt, so kann man die Funktion

$$f(k) = A(k)\, e^{2ikR}$$

einführen, die den Faktor e^{2ikR} enthält, der eine hinreichende Abnahme von $f(k)$ bei großen Werten von k in der oberen Halbebene der komplexen Variablen k gewährleistet. In diesem Fall kann man die Dispersionsrelationen auch für die Streuamplitude für Streuung um beliebige Winkel aufschreiben.

8.5. Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts für die elastische Streuung, die Absorption und die Kernreaktionen

Da die Reichweite der Kernkräfte endlich und der Rand des Kerns relativ gut ausgebildet ist, wird das Gebiet der spezifischen Kernwechselwirkung zwischen Nukleon und Kern durch ein hinreichend kleines Volumen begrenzt, dessen Radius wir mit R bezeichnen wollen. Bei der Wechselwirkung von Nukleonen kleiner Energie ($kR \ll 1$) mit Kernen kann man deshalb leicht die Energieabhängigkeit der Querschnitte für elastische Streuung, Absorption und die verschiedenen Kernreaktionen ermitteln.

Nach Abschn. 3.1. wird der Wechselwirkungsprozeß eines Nukleons (oder leichten Kerns) mit einem Kern durch das Matrixelement

$$T_{ba} = (\Phi_b, T\Phi_a) \tag{8.5.1}$$

charakterisiert, wobei T der Wechselwirkungsoperator ist, der durch die Gleichung

$$T = V + V(D - V)^{-1} V$$

bestimmt wird, wobei V die Wechselwirkungsenergie von Nukleon und Kern und $D = E - H_0 + i\eta$ sind. Um die Energieabhängigkeit der Querschnitte für Streuung, Absorption und Reaktionen (bei kleinen Energien) aufzufinden, muß man berücksichtigen, daß der Operator T als Funktion des Teilchenabstands vor (und nach) der Reaktion nur bei $r \leqq R$ verschieden von Null ist.

Wir untersuchen zunächst, wie das Matrixelement T_{ba} im Fall der elastischen Streuung A(n, n) A von Neutronen am Kern von der Energie ε der Relativbewegung abhängt. Der Anfangszustand wird durch die Wellenfunktion

$$\Phi_a = \varphi_A(\ldots, q, \ldots) \exp\{i k r \cos\vartheta_a\}, \tag{8.5.2}$$

der Endzustand durch

$$\Phi_b = \varphi_A(\ldots, q, \ldots) \exp\{i k r \cos\vartheta_b\} \tag{8.5.2a}$$

beschrieben, wobei k der Impuls der Relativbewegung von Neutron und Kern ist. Der Impuls k hängt mit der Energie der Relativbewegung über die Beziehung $\varepsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu}$ zusammen. $\varphi_A(\ldots, q, \ldots)$ beschreibt den Zustand des Targetkerns.

Im Matrixelement (8.5.1) sind nur die Werte $r < R$ wesentlich; deshalb kann man bei $kR \ll 1$ den Exponenten in den Funktionen (8.5.2) und (8.5.2a) nach Kugelfunktionen entwickeln; man erhält

$$\Phi = \varphi(\ldots, q, \ldots)\,(4\pi)^{1/2} \sum_{l=0}^{\infty} i^l \frac{\sqrt{2l+1}}{(2l+1)!!} (kr)^l Y_{l0}(\cos\vartheta), \qquad kr \ll 1. \tag{8.5.3}$$

Wird berücksichtigt, daß bei kleinen Energien der Operator T nicht von der Energie abhängt, so erhält man bei der elastischen Streuung mit definiertem Bahndrehimpuls folgende Abhängigkeit des Matrixelements von k und der Energie ε:

$$(\Phi_b, T\Phi_a)_l = \alpha_l' k^{2l} = \alpha_l \varepsilon^l, \tag{8.5.4}$$

wobei α_l' und α_l Konstanten sind.

Der Streuquerschnitt ergibt sich aus dem Matrixelement (8.5.1) über die Beziehung

$$d\sigma_e^{(l)} = \frac{\mu p_b}{(2\pi)^2 \hbar^4 v_a} |(\Phi_b, T\Phi_a)|^2 d\Omega. \tag{8.5.5}$$

Bei der elastischen Streuung ist $p_b < \mu v_a$. Deshalb hängt der Querschnitt der elastischen Streuung auf folgende Weise von der Energie ab:

$$\sigma_e^{(l)} \sim \varepsilon^{2l}.$$

Für $l = 0$ ist speziell der Querschnitt der s-Streuung bei kleinen Energien der Relativbewegung unabhängig von der Energie. Da bei kleinen Neutronenenergien nur die s-Streuung wesentlich ist, folgt, daß bei kleinen Energien der Querschnitt für die Streuung von Neutronen an Kernen bei Verminderung der Energie gegen einen endlichen Grenzwert strebt.

Bei der elastischen Streuung langsamer geladener Teilchen (p, α, d, ...) spielt die COULOMB-Streuung die Hauptrolle. Sie überwiegt dann bei weitem die Streuung, die durch die Kernkräfte bedingt wird.

Wir bestimmen nun die Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts für die Absorption von Neutronen durch Kerne. Für diesen Fall hat bei kleinen Energien nur die Funktion Φ_a des Anfangszustands die Form (8.5.3). Deshalb wird die Energieabhängigkeit des Matrixelements für die Absorption langsamer Neutronen mit dem Bahndrehimpuls l durch die Formel

$$(\Phi_b, T\Phi_a) = \alpha_l \varepsilon^{l/2}$$

beschrieben, während der Absorptionsquerschnitt in diesem Fall die Form

$$\sigma_a^{(l)} = \frac{2\pi}{\hbar v_a} |(\Phi_b, T\Phi_a)|^2 \sim \varepsilon^{l - 1/2}$$

besitzt. Bei kleinen Energien wird die Neutronenabsorption in der Hauptsache durch den s-Zustand bestimmt. Deshalb ist der Wirkungsquerschnitt für die Absorption langsamer Neutronen umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus der Energie (umgekehrt proportional der Geschwindigkeit):

$$\sigma_a \sim \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sim \frac{1}{v_a}.$$

Dieses sogenannte $1/v$-Gesetz muß für alle exothermen Reaktionen erfüllt sein, die mit langsamen Neutronen verlaufen, z. B. die Reaktionen (n, α), (n, p), (n, γ) u. a. In diesen Fällen beschreiben die Wellenfunktionen des Endzustands Teilchen mit Energien von einigen MeV, und man kann ihre Abhängigkeit von Veränderungen der Energie der einfallenden Neutronen vernachlässigen.

Die Energieabhängigkeit von exothermen Kernreaktionen, die durch geladene Teilchen (p, α, d, ...) hervorgerufen werden, wird in erster Linie dadurch bestimmt, daß das einfallende Teilchen den COULOMB-Wall durchdringen muß. Bei kleinen Energien gilt

$$\sigma \sim \exp\left\{-\frac{2\pi Z_A Z_a e^2}{\hbar v_a}\right\}.$$

Untersuchen wir nun die Energieabhängigkeit von Schwellenreaktionen, d. h. von Kernreaktionen, welche die Aufwendung einer bestimmten Energie erfordern. Wir wollen annehmen, daß eine unelastische Neutronenstreuung (n, n′) oder eine Schwellenreaktion vor sich geht, die mit der Emission eines Neutrons verknüpft ist, z. B. (p, n), (α, n) u. a. Dabei verbleibt der Kern nach der Emission des Neutrons in einem angeregten Zustand. Die Wellenfunktion des Endzustands besitzt die Form (8.5.3) mit

$$k = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2\mu(\varepsilon_a - \varepsilon_0)},$$

wobei ε_a die Energie des einfallenden Teilchens und ε_0 die Schwellenenergie bedeuten.

Bei $\varepsilon_a - \varepsilon_0 \ll \varepsilon_a$ wird die Energieabhängigkeit des Matrixelements nur durch die Funktion des Endzustands bestimmt:

$$(\Phi_b, T\Phi_a)_{\text{schw}} \sim k^l.$$

In der Nähe der Schwelle wird also der Wirkungsquerschnitt für die Reaktion, bei der ein Neutron mit dem Bahndrehimpuls l austritt, durch die Formel

$$d\sigma_{\text{schw}}^{(l)} = \frac{\mu p_b}{(2\pi)^2 \hbar^4 v_a} |(\Phi_b, T\Phi_a)|^2 d\Omega \sim k^{2l+1} \sim (\varepsilon_a - \varepsilon_0)^{\frac{2l+1}{2}} \tag{8.5.6}$$

bestimmt, da $p_b = \hbar k$ ist und v_a praktisch nicht von k abhängt. Wird die Energie des einfallenden Teilchens so gewählt, daß sie nur wenig über der Schwellenenergie liegt, so ist die Emission der Neutronen nur im s-Zustand wesentlich. Deshalb wird der Wirkungsquerschnitt in der Nähe der Schwelle proportional der Quadratwurzel aus dem Energieüberschuß über der Schwelle.

Wenn bei der Schwellenenergie ein geladenes Teilchen gebildet wird [z. B. (p, p′), (n, p) u. a.], so wird die Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts dadurch bestimmt, daß dieses Teilchen den COULOMB-Wall durchdringen muß; es gilt deshalb

$$d\sigma_{\text{schw}}^{(l)} \sim k^{2l+1} \exp\left\{-\frac{2\pi Z_B Z_b e^2}{\hbar v_b}\right\},$$

wobei $v_b = \hbar k/\mu$ ist.

Die Existenz von Schwellenreaktionen, bei denen Neutronen emittiert werden, findet in einigen Fällen durch eine charakteristische Energieabhängigkeit des Querschnitts der elastischen Streuung von Neutronen in der Nähe der Schwelle ihren Ausdruck. Auf diesen Umstand wurde unlängst von BAS [8,2] hingewiesen. Wir geben einen elementaren Beweis für diese Behauptung, wobei wir uns auf das einfache Beispiel der elastischen Streuung neutraler Teilchen an einem Kern stützen.

Die Wirkungsquerschnitte der elastischen Streuung und der Schwellenreaktion werden durch die Elemente S_{aa} und S_{ab} der Streumatrix ausgedrückt. Bei Energien ε, die über der Schwellenenergie ε_0 liegen, sind beide Kanäle a und b offen, und wegen der Unitarität der Streumatrix muß folgende Beziehung gelten:

$$|S_{aa}|^2 = 1 - |S_{ab}|^2. \tag{8.5.7}$$

Da der Querschnitt der Schwellenreaktion, der durch $|S_{ab}|^2$ bestimmt wird, in der Nähe der Schwelle nach (8.5.6) proportional k^{2l+1} ist, kann man schreiben

$$|S_{aa}^{(l)}|^2 = 1 - a_l\, k^{2l+1}, \tag{8.5.8}$$

wobei a_l eine positive Größe ist. Aus (8.5.8) folgt dann

$$S_{aa}^{(l)}(k) = \sqrt{1 - a_l k^{2l+1}}\, \exp[2i\, \beta_l(k)], \tag{8.5.8a}$$

wobei $\beta_l(k)$ eine reelle Funktion von k ist. Um die explizite Abhängigkeit dieser Funktion von k zu finden, gehen wir davon aus, daß die Streumatrix eine analytische Funktion von k ist. Imaginäre Werte von k entsprechen Energien, die unter der Schwellenenergie liegen. Der unelastische Prozeß tritt bei Energien unter der Schwellenenergie nicht auf, und es ist $|S_{aa}|^2 = 1$. Diese Bedingung wird bis auf Glieder der Ordnung k^2 genau erfüllt, wenn (8.5.8) in das Gebiet imaginärer k analytisch fortgesetzt wird. Aus (8.5.8) folgt dann (8.5.8a) auch für imaginäre k, vorausgesetzt, daß $\beta(k)$ eine reelle Funktion ist. Damit $\beta_l(k)$ bei imaginärem k eine reelle Funktion darstellt, darf sie nur von geraden Potenzen des Arguments k abhängen. Wird dies berücksichtigt, so kann man $S_{aa}^{(l)}(k)$ in eine Potenzreihe entwickeln und erhält, wenn nur die ersten Potenzen von k berücksichtigt werden:

$$S_{aa}^{(l)}(k) = \begin{cases} e^{2i\beta_0(0)} & \text{für} \quad l \neq 0, \\ e^{2i\beta_0(0)}\left(1 - \frac{a}{2}k\right) & \text{für} \quad l = 0. \end{cases} \tag{8.5.9}$$

Aus (8.5.9) ist ersichtlich, daß sich die Anwesenheit der Schwellenreaktion merklich nur auf den Querschnitt der elastischen s-Streuung auswirkt; dabei ist

$$\sigma^{(0)}(k) \sim |S_{aa}^{(0)}(k) - 1|^2 = 4\sin^2\beta_0 - a\, \Re e\, \{k[1 - e^{-2i\beta_0}]\}. \tag{8.5.10}$$

Unter Berücksichtigung von $k = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2\mu(\varepsilon_a - \varepsilon_0)}$ erhalten wir aus (8.5.10) folgenden Ausdruck:

$$\sigma^{(0)}(\varepsilon_a - \varepsilon_0) = \begin{cases} \sigma^{(0)}(0)\left[1 - \frac{a}{2\hbar}\sqrt{2\mu(\varepsilon_a - \varepsilon_0)}\right] & \text{für} \quad \varepsilon_a > \varepsilon_0, \\ \sigma^{(0)}(0)\left[1 + \frac{a}{2\hbar}\cot\beta_0\sqrt{2\mu(\varepsilon_0 - \varepsilon_a)}\right] & \text{für} \quad \varepsilon_0 > \varepsilon_a. \end{cases} \tag{8.5.11}$$

In (8.5.11) wird mit $\sigma^{(0)}(0)$ der Wirkungsquerschnitt der elastischen Streuung bei der Schwellenenergie bezeichnet; die Phasenverschiebung β_0 kann man durch $\sigma^{(0)}(0)$ ausdrücken:

$$\sigma^{(0)}(0) = \frac{4\pi}{k_a^2}\sin^2\beta_0.$$

Aus (8.5.11) ist unmittelbar zu ersehen, daß der Wirkungsquerschnitt der elastischen Streuung im Gebiet der Schwelle bei $\cot\beta_0 < 0$ ein ausgeprägtes Maximum besitzt. Bei $\cot\beta_0 > 0$ ändert sich der Querschnitt beim Durchgang durch die Schwellenenergie sprunghaft.

Wenn die Schwellenreaktion der Emission eines geladenen Teilchens entspricht, so enthält der Koeffizient a in (8.5.11), der proportional dem Quadrat des Matrixelements (8.5.1) der Wechselwirkung ist, den Faktor

$$\exp\left\{-\frac{2\pi Z_B Z_b e^2}{\hbar v_b}\right\},$$

wobei $v_b = \sqrt{2(\varepsilon_a - \varepsilon_0)/\mu}$ ist. Der Koeffizient a geht deshalb bei $\varepsilon_a \to \varepsilon_0$ gegen Null. Die Schwellenreaktion mit Emission eines geladenen Teilchens kann somit keinen bedeutenden Einfluß auf den Querschnitt der elastischen Streuung besitzen.

8.6. Bestimmung der Wirkungsquerschnitte aus Bedingungen, die der Wellenfunktion an der Kernoberfläche auferlegt werden. BREIT-WIGNER-Formeln

Die grundlegende Aufgabe der Streutheorie ist es, die Streumatrix mit den physikalischen Eigenschaften des Kerns und der gestreuten Teilchen zu verknüpfen. Im Prinzip ist es möglich, die Streumatrix zu berechnen, wenn die Wellenfunktionen bekannt sind, die den Kernzustand beschreiben, und wenn man die Wechselwirkung zwischen den einfallenden Teilchen und den Nukleonen im Kern kennt. Die praktische Lösung dieser Aufgabe ist jedoch gegenwärtig nicht möglich, da wir einerseits nicht wissen, wie die Wellenfunktionen der komplizierten Kerne aussehen, und weil andererseits große mathematische Schwierigkeiten auftreten. Deshalb muß man zu indirekten Methoden greifen, bei denen keine konkreten Voraussetzungen über die innere Struktur der Kerne benutzt werden.

Wir betrachten das Element $S_{aa} \equiv S$ der Streumatrix, das den Querschnitt der elastischen Streuung und den Reaktionsquerschnitt bestimmt. Die Größe S, die das Verhalten der Wellenfunktion $\varphi_a(r)$ [Gl. (8.2.4)] der Relativbewegung von Teilchen und Kern im Eingangskanal charakterisiert, kann durch den Wert ihrer logarithmischen Ableitung ausgedrückt werden. Die logarithmische Ableitung ist dabei auf einer Kugelfläche zu nehmen, die das Gebiet, in dem die Kernkräfte wirksam sind, von dem Gebiet trennt, in dem keine Kernkräfte auftreten. Diese Fläche wollen wir Kernoberfläche nennen und den entsprechenden Radius R den *Radius des Reaktionskanals.*

Um die Rechnungen zu vereinfachen, betrachten wir die Wechselwirkung von Neutronen kleiner Energie mit einem Kern, wenn an der Streuung nur Wellen mit $l = 0$ teilnehmen. Wie wir bereits wissen, ist dazu notwendig, daß die Wellenlänge der Relativbewegung von Neutron und Kern groß gegen den Kernradius ist.

Die Wellenfunktion $\varphi(r)$ der Relativbewegung von Neutron und Kern besitzt außerhalb des Wirkungsbereichs der Kernkräfte die Form

$$r\,\varphi(r) = e^{-ikr} - S\,e^{ikr}. \qquad (8.6.1)$$

Sie ist auf den Fluß normiert, der gleich der Geschwindigkeit der Relativbewegung ist. Wir können dann nach (8.2.10) und (8.2.12) für den Streuquerschnitt schreiben

$$\sigma_e = \frac{\pi}{k^2} |1 - S|^2 \tag{8.6.2}$$

und für den Reaktionsquerschnitt

$$\sigma_r = \frac{\pi}{k^2} (1 - |S|^2). \tag{8.6.3}$$

Die Streumatrix S kann man durch die dimensionslose logarithmische Ableitung der radialen Wellenfunktion (8.6.1) an der Kernoberfläche ausdrücken:

$$f(\varepsilon) = R \left\{ \frac{\frac{d}{dr}(r\varphi)}{r\varphi} \right\}_{r=R} = -i\,x\,\frac{1 + S\,e^{2ix}}{1 - S\,e^{2ix}}. \tag{8.6.4}$$

Hierbei ist $x = kR$ und R derjenige kleinste Radius, bei dem gerade noch keine Kernkräfte auftreten. Da die Funktion $r\varphi$ und ihre Ableitung auf der Kernoberfläche stetig sein müssen, wird $f(\varepsilon)$ vollständig durch die Bedingungen im Kerninnern ($r \leqq R$) bestimmt.

Aus (8.6.4) folgt

$$S = -e^{-2ix} \frac{x - if}{x + if}.$$

Wir trennen nun in der logarithmischen Ableitung f Real- und Imaginärteil und schreiben $f = f_0 - ih$; dann ergibt sich

$$S = -e^{-2ix} \frac{(x - h) - i f_0}{(x + h) + i f_0}. \tag{8.6.5}$$

Wegen der Bedingung $|S| \leqq 1$ ist notwendig $h \geqq 0$. Wird (8.6.5) in (8.6.2) und (8.6.3) eingesetzt, so finden wir

$$\sigma_e = \frac{4\pi}{k^2} \left| \frac{x}{i(x+h) - f_0} + e^{ix} \sin x \right|^2, \tag{8.6.6}$$

$$\sigma_r = \frac{4\pi}{k^2} \frac{x\,h}{(x+h)^2 + f_0{}^2}. \tag{8.6.7}$$

Setzen wir (8.6.5) in (8.2.15) ein, so können wir den totalen Querschnitt der s-Streuung durch die logarithmische Ableitung ausdrücken:

$$\sigma_t = \frac{2\pi}{k^2} \left\{ 1 + \frac{(x^2 - h^2 - f_0^2)\cos 2x - 2x f_0 \sin 2x}{(x+h)^2 + f_0^2} \right\}. \tag{8.6.7a}$$

Bei $h = 0$ ist $f = f_0$, $|S|^2 = 1$ und $\sigma_r = 0$, d. h., es tritt nur elastische Streuung auf, die durch keinerlei Reaktionen begleitet wird.

Die Größen f_0 und h sind Funktionen der Energie der Relativbewegung. Derjenige Energiewert ε_r, bei dem $f_0(\varepsilon_r) = 0$ ist, wird *Resonanzenergie* genannt. Bei der Resonanzenergie nehmen die Querschnitte (8.6.6) und (8.7.7) ihren maximalen (Resonanz-) Wert an. Wir entwickeln die Funktion $f_0(\varepsilon)$ in der

Umgebung der Resonanzenergie nach Potenzen von $\varepsilon - \varepsilon_r$ und beschränken uns auf das erste Glied der Entwicklung:

$$f_0(\varepsilon) = \left(\frac{df}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=\varepsilon_r} (\varepsilon - \varepsilon_r).$$

Wird berücksichtigt, daß $(df/d\varepsilon)_{\varepsilon=\varepsilon_r} < 0$ ist, und führt man die Bezeichnungen

$$\Gamma_e = -\frac{2x}{\left(\frac{df_0}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=\varepsilon_r}} \quad \text{und} \quad \Gamma_r = -\frac{2h}{\left(\frac{df_0}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=\varepsilon_r}} \tag{8.6.8}$$

ein, so kann man die Querschnitte (8.6.6) und (8.6.7) in der Nähe der Resonanz in folgender Form darstellen:

$$\sigma_r = \frac{\pi}{k^2} \frac{\Gamma_r \Gamma_e}{(\varepsilon - \varepsilon_r)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \tag{8.6.9}$$

mit $\Gamma = \Gamma_e + \Gamma_r$ und

$$\sigma_e = 4\pi \,|A_{\text{res}} + A_{\text{pot}}|^2, \tag{8.6.10}$$

wobei

$$A_{\text{res}} = \frac{1}{k} \frac{\frac{1}{2}\Gamma_e}{\varepsilon - \varepsilon_r - \frac{i}{2}\Gamma} \tag{8.6.11}$$

als *Amplitude der „Resonanz-“* oder *„inneren“ Streuung* bezeichnet wird. Die Größe

$$A_{\text{pot}} = \frac{1}{k} e^{ix} \sin x \tag{8.6.12}$$

heißt *Amplitude der „äußeren“* oder *„Potential“streuung*, da dieser Teil der Streuamplitude nur vom Radius R und der Energie der Relativbewegung abhängt. Man nennt A_{pot} auch manchmal Amplitude der Streuung an einer undurchsichtigen Kugel. Diese Bezeichnung hängt damit zusammen, daß der Streuquerschnitt, der durch diesen Teil der Amplitude bedingt wird,

$$\sigma_e = 4\pi \,|A_{\text{pot}}|^2 = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 kR \approx 4\pi R^2 \tag{8.6.13}$$

ist. Wenn der Kern tatsächlich eine total reflektierende Kugel vom Radius R wäre, so müßte die Wellenfunktion bei $r = R$ verschwinden. In diesem Fall wäre $A_{\text{res}} = 0$, und der Streuquerschnitt würde bereits durch die Formel (8.6.13) bestimmt.

Die Aufspaltung der Amplitude der elastischen Streuung in 2 Anteile, die Amplitude der Resonanzstreuung und die Amplitude der Potentialstreuung, hängt von der Wahl des Radius R ab und ist rein formal. Im Experiment kann man nur die Summe $A_{\text{res}} + A_{\text{pot}}$ messen. Wird (8.6.11) und (8.6.12) in (8.6.10) eingesetzt, so erhalten wir den Querschnitt der elastischen Streuung in der Form

$$\sigma_e = \frac{4\pi}{k^2} \left| \frac{\frac{1}{2}\Gamma_e}{\varepsilon - \varepsilon_r - \frac{i}{2}\Gamma} + e^{ikR} \sin kR \right|^2. \tag{8.6.13a}$$

Schreibt man zur Abkürzung

$$\frac{2(\varepsilon - \varepsilon_r)}{\Gamma} = \cot\delta, \tag{8.6.14}$$

dann wird

$$\frac{\frac{1}{2}\Gamma_e}{\varepsilon - \varepsilon_r - i\frac{\Gamma}{2}} = \frac{\Gamma_e}{\Gamma}\sin\delta\, e^{-i\delta}, \tag{8.6.14'}$$

und (8.6.13a) nimmt eine symmetrische Form an:

$$\sigma_e = \frac{4\pi}{k^2}\left|\frac{\Gamma_e}{\Gamma}\sin\delta\, e^{i\delta} + \sin(kR)\, e^{ikR}\right|^2. \tag{8.6.13b}$$

Die Phasenverschiebung δ, die durch Gl. (8.6.14) bestimmt wird, ist eine Funktion der Energie. Im Fall einer isolierten Resonanz ist bei $\varepsilon \gg \varepsilon_r$ die Phasenverschiebung $\delta \approx 0$; nähert sich ε der Resonanzenergie ε_r, so geht die Phasenverschiebung δ gegen $\pi/2$; durchläuft ε den Resonanzwert, so ändert sich die Phasenverschiebung δ sprunghaft und nimmt den Wert $-\pi/2$ an; bei weiterer Verringerung der Energie ($\varepsilon \ll \varepsilon_r$) geht die Phasenverschiebung δ wieder gegen Null.

Die Formeln (8.6.9) und (8.6.10) beschreiben die Resonanzstreuung bei Energien, die in der Nähe der Resonanzenergie ε_r liegen. Dabei wird vorausgesetzt, daß in der Nähe der betrachteten Energien nur die eine Resonanzstelle ε_r liegt. In der Umgebung von ε_r überwiegt die Amplitude der Resonanzstreuung bei weitem die Amplitude der Potentialstreuung. Deshalb kann man den Querschnitt der elastischen Streuung in der unmittelbaren Umgebung der Resonanz angenähert durch das Quadrat der Amplitude der Resonanzstreuung ausdrücken:

$$(\sigma_e)_{\text{res}} = \frac{\pi}{k^2}\,\frac{\Gamma_e^2}{(\varepsilon - \varepsilon_r)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}. \tag{8.6.15}$$

Die Beziehungen (8.6.9) und (8.6.15) werden als BREIT-WIGNER-*Formeln* oder *Dispersionsformeln* für ein isoliertes Resonanzniveau ($l = 0$) bezeichnet.

Aus ihnen folgt, daß bei $|\varepsilon - \varepsilon_r| = \Gamma/2$ der Wirkungsquerschnitt nur noch die Hälfte seines Maximalwertes beträgt. Γ stellt folglich die Breite der Resonanzkurve (welche die Energieabhängigkeit des Querschnitts wiedergibt) bei Werten des Querschnitts gleich der Hälfte des maximalen Querschnitts, d. h. ihre Halbwertsbreite, dar und wird oft *Resonanzbreite* oder *Breite des Resonanzniveaus* genannt.

Bei der Interpretation der experimentellen Daten über langsame Neutronen ist zu berücksichtigen, daß die Resonanzbreiten der experimentellen Kurven wegen der DOPPLER-Verbreiterung korrigiert werden müssen, die durch die Wärmebewegung (s. Abschn. 8.8.) hervorgerufen wird. Wegen der Wärmebewegung unterscheidet sich die tatsächliche Energie der Relativbewegung von Kern und Neutron von der Energie der Relativbewegung bei ruhendem Kern. Bei kleinen Neutronenenergien wirken auch noch andere Faktoren

außer der Wärmebewegung auf die Breite der Resonanzkurve ein (Kristallstruktur usw.). Es ist deshalb richtiger zu sagen, daß Γ die totale Zerfallswahrscheinlichkeit $\Gamma/\hbar$ bestimmt und nicht die Breite des Resonanzniveaus. Die Größe Γ_e heißt Partialbreite der elastischen Streuung der Neutronen im Eingangskanal. Sie bestimmt die Wahrscheinlichkeit der elastischen Streuung. Γ_r nennt man Partialbreite der Reaktion; sie bestimmt die Zerfallswahrscheinlichkeit des Compoundkerns in alle Kanäle bis auf den Eingangskanal.

Nach (8.6.8) kann die Partialbreite Γ_e in 2 Faktoren aufgespalten werden: in den Faktor $2k$, der nur von der Energie der Relativbewegung von Kern und Neutron abhängt, und den Faktor

$$\gamma_e^2 \equiv -\frac{R}{\left(\frac{d f_0}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=\varepsilon_r}}, \tag{8.6.16}$$

der durch die innere Struktur des Kerns bestimmt wird und den man *reduzierte Breite des Neutronenniveaus* für die elastische Streuung nennt.

Die totale Reaktionswahrscheinlichkeit ist gleich der Summe der Reaktionswahrscheinlichkeiten für die verschiedenen Kanäle:

$$W = \sum_b W_b \quad \text{oder} \quad \Gamma_r = \sum_b \Gamma_{rb}.$$

Wenn die Hypothese von N. Bohr [8,5] richtig ist, daß der Zerfall des Compoundkerns nicht von der Art seiner Bildung abhängt, so kann man aus der Kenntnis des totalen Reaktionsquerschnitts den Reaktionsquerschnitt σ_{rb} für einen bestimmten Kanal erhalten, indem man σ_r mit der relativen Wahrscheinlichkeit einer Reaktion im Kanal b, d. h. mit Γ_{rb}/Γ_r, multipliziert. Es ergibt sich

$$\sigma_{rb} = \frac{\pi}{k^2} \frac{\Gamma_e \Gamma_{rb}}{(\varepsilon - \varepsilon_r)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}. \tag{8.6.17}$$

Die Bohrsche Hypothese, daß der Zerfall des Compoundkerns unabhängig davon ist, auf welchem Wege dieser gebildet wurde, erwies sich als außerordentlich fruchtbar für die Beschreibung von Experimenten mit Nukleonen kleiner Energien. Mit ihrer Hilfe gelang es, eine ganze Reihe wesentlicher Besonderheiten der Kernreaktionen zu erklären. Die Hypothese trifft jedoch nicht immer zu. In einigen Fällen werden die Reaktionsprodukte mit Energien emittiert, die beträchtlich über den Energien liegen, die man auf Grund der Vorstellung einer gleichmäßigen Energieverteilung zwischen allen Komponenten des Compoundkerns erwarten müßte. Weiterhin wird oft eine Bevorzugung der Vorwärtsstreuung beobachtet, was ebenfalls der Bohrschen Hypothese widerspricht.

Wie wir im Abschn. 8.10. zeigen werden, ist die Anwendung der Bohrschen Hypothese dann gerechtfertigt, wenn die Energie des einfallenden Teilchens im Gebiet isolierter Resonanzen des Compoundkerns liegt. In diesem Fall verläuft die Kernreaktion durch einen Quantenzustand des

Compoundkerns, und es ist klar, daß die Eigenschaften dieses Zustandes unabhängig davon sind, auf welche Weise er erzeugt wurde. Diese Schlußfolgerung gilt nur angenähert, da die Resonanzen des Compoundkerns eine endliche Breite besitzen. Wegen der Überlappung der Resonanzkurven von benachbarten Resonanzen wird in Wirklichkeit niemals nur ein Quantenzustand realisiert. Aus dem Verhältnis der Niveaubreiten zum Abstand zwischen den Niveaus läßt sich abschätzen, inwieweit die BOHRsche Hypothese erfüllt ist.

Es existiert ein Gebiet im Bereich mittlerer Energien, in dem die Resonanzbreiten von der gleichen Größenordnung sind wie die Abstände zwischen den Resonanzen. In diesem Fall werden gleichzeitig mehrere Zustände angeregt. Die Phasenverschiebungen zwischen diesen Zuständen hängen davon ab, auf welche Weise der Kern angeregt wurde. Die BOHRsche Hypothese ist hierbei nicht erfüllt.

Die BOHRsche Hypothese gilt dann angenähert, wenn die Energie des Compoundkerns in einem Gebiet liegt, in dem sich die Zustände stark überlappen. In diesem Fall nehmen sehr viele Zustände an der Reaktion teil. Ihre relativen Phasenverschiebungen sind zufällig verteilt. Der Zerfall des Compoundkerns erfolgt aus einem Zustand des statistischen Gleichgewichts; deshalb hängen die Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen Zerfallstypen nicht davon ab, wie der Compoundkern bei den genannten Anregungen gebildet wurde.

Bei noch größeren Anregungsenergien (> 50 MeV), wenn die freie Weglänge des Nukleons in der Kernmaterie wegen der Verringerung des Streuquerschnitts für das einzelne Nukleon beträchtliche Werte annimmt, können die Kernreaktionen erfolgreich unter der Annahme beschrieben werden, daß das schnelle Nukleon, das den Kern durchläuft, nur mit einzelnen Nukleonen in Wechselwirkung tritt, ohne einen Compoundkern zu bilden (s. Abschn. 15.2. und 15.3.).

Es ist klar, daß außer den beiden Grenzfällen, nämlich einerseits der Verteilung der Energie des einfallenden Teilchens auf alle Freiheitsgrade des Compoundkerns und andererseits der Wechselwirkung des einfallenden Teilchens mit einzelnen Nukleonen, die entweder auf der Kernoberfläche liegen (bei mittleren Teilchenenergien) oder sich innerhalb des Kerns befinden (bei hohen Energien), auch intermediäre Fälle verwirklicht werden, bei denen das schnelle Teilchen seine Energie an die Nukleonen abgibt, die sich in der Nähe des Auftreffpunkts befinden (örtliche Erhitzung), wobei die Energie bis zum Moment des Zerfalls nicht auf die anderen Freiheitsgrade übertragen werden kann.

Die BREIT-WIGNER-Formeln wurden von uns aus den exakten Formeln (8.6.6) und (8.6.7) für die Wirkungsquerschnitte hergeleitet. Wir entwickelten den Realteil f_0 der logarithmischen Ableitung in der Umgebung der Resonanz in eine Reihe und berücksichtigten dabei nur das erste Glied. In einem Gebiet der Größenordnung des Niveauabstandes D verändert sich die Funktion f_0 beträchtlich. Deshalb ist die Zerlegung wie auch die BREIT-WIGNER-Formeln nur in der Umgebung der Resonanz gültig, und zwar in

einem Intervall, das klein ist gegen D. Die in die Formeln eingehenden Parameter Γ_e, Γ_r, ε_r betrachtet man meist als empirische Größen, da die theoretische Bestimmung ihrer Größenordnung nur bei sehr starken Vereinfachungen möglich ist. Die im Experiment beobachteten Resonanzen ε_r entsprechen Zuständen des Compoundkerns mit der Anregungsenergie $E_r = \varepsilon_r + E_0$, wobei E_0 die Energie ist, die man bei der Anlagerung eines Neutrons mit der Energie 0 an den Targetkern erhält.

Da der Streuquerschnitt (8.6.10) das Quadrat der Summe der Amplituden von Resonanz- und Potentialstreuung ist, wird manchmal wegen der Interferenz der beiden Anteile im Querschnitt der elastischen Streuung ein charakteristisches Minimum auf der einen Seite der Resonanzkurve und ein langsamerer Abfall auf der anderen Seite der Kurve beobachtet. Ist die Amplitude der Potentialstreuung positiv, so liegt das Minimum auf der Seite der kleineren Energien, im andern Fall auf der Seite größerer Energien. Zur Veranschaulichung dieser Erscheinung ist in Abb. 56 der experimentelle totale Streuquerschnitt für die Streuung von Neutronen an Schwefelkernen dargestellt. Es ist die Resonanz gezeigt, die zwischen 350 und 400 keV liegt. Die gestrichelte Kurve zeigt den Verlauf, wie er auf Grund der Dispersionsformel zu erwarten wäre.

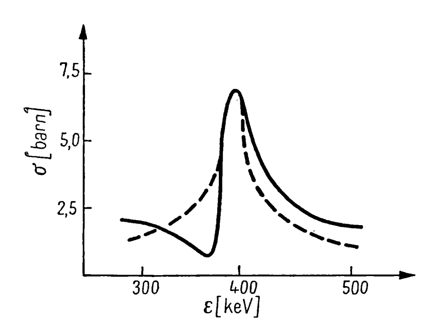


Abb. 56. Totaler Wirkungsquerschnitt für die Streuung von Neutronen an Schwefelkernen bei Energien im Resonanzgebiet

Die Partialbreite Γ_e ist energieabhängig. In einem kleinen Wertebereich der Energie ε kann man diese Abhängigkeit jedoch vernachlässigen. Dann folgt aus (8.6.9) und (8.6.15), daß bei $\varepsilon = \varepsilon_r$ gilt

$$(\sigma_e)_{\max} = \frac{4\pi}{k^2}\left(\frac{\Gamma_e}{\Gamma}\right)^2, \tag{8.6.18}$$

$$(\sigma_r)_{\max} = \frac{4\pi}{k^2}\frac{\Gamma_r \Gamma_e}{\Gamma^2}. \tag{8.6.19}$$

Wenn außer der elastischen Streuung noch andere Reaktionen möglich sind ($\Gamma_e \neq \Gamma$), so wirkt sich das nur im Gebiet der Resonanz wesentlich auf den Querschnitt der elastischen Streuung aus. Bei Energien, die weit von ε_r entfernt liegen, hat der Wert von Γ wenig Einfluß auf den Querschnitt der elastischen Streuung. Im Fall der rein elastischen Streuung, die bei der Streuung langsamer Neutronen an Kernen mittlerer Massenzahl auftritt, ist $\Gamma \approx \Gamma_e$, und der Maximalwert des Querschnitts der elastischen Streuung ist gleich dem Quadrat der de Broglieschen Wellenlänge der Relativbewegung:

$$(\sigma_e)_{\max} = 4\pi\,\lambda^2.$$

Wenn die Resonanzenergie im Gebiet kleiner Energien liegt, ist der Resonanzquerschnitt der rein elastischen Streuung um ein vielfaches größer als der geometrische Querschnitt des Kerns.

Bei der Streuung von langsamen Neutronen an schweren Kernen sind elastische Streuung, Einfang und Spaltung möglich. Dabei überwiegt die Einfangsbreite Γ_γ, welche die Wahrscheinlichkeit des Neutroneneinfangs mit nachfolgender Emission eines γ-Quants beschreibt, d. h., es ist $\Gamma = \Gamma_e + \Gamma_r + \Gamma_\gamma + \dots \approx \Gamma_\gamma$ (mit Ausnahme einiger Spezialfälle). Der maximale Reaktionsquerschnitt ist deshalb nach (8.6.19)

$$[\sigma_r(\mathrm{n}, \gamma)]_{\max} = \frac{4\pi}{k^2} \frac{\Gamma_e}{\Gamma_\gamma}. \tag{8.6.20}$$

Wird der maximale Querschnitt (8.6.20) gemessen, so kann man das Verhältnis der Neutronenbreite Γ_e zur Breite der Einfangreaktion bestimmen. So wird z. B. beim Kern ^{115}In eine Resonanz bei 1,44 eV beobachtet. Der maximale Reaktionsquerschnitt des (n, γ)-Prozesses ist gleich $3 \cdot 10^4$ barn. Die Gesamtbreite $\Gamma \approx \Gamma_\gamma$ wird aus der Resonanzkurve bestimmt und beträgt 0,08 eV. Damit folgt aus (8.6.20) $\Gamma_e = 1{,}3 \cdot 10^{-3}$ eV. Der maximale Querschnitt der (n, γ)-Reaktion erreicht beim Einfang thermischer Neutronen durch das ^{135}Xe, einem radioaktiven Spaltprodukt des Urans, den Wert $3{,}5 \cdot 10^6$ barn, was den geometrischen Querschnitt des Kerns um den Faktor $2 \cdot 10^6$ übertrifft. Der (n, γ)-Querschnitt für das stabile Samariumisotop ^{149}Sm beträgt $5{,}3 \cdot 10^4$ barn. Beide Nuklide treten in Kernreaktoren auf. Wegen ihres großen Einfangvermögens für Neutronen wirkt sich die Anwesenheit von ^{135}Xe und ^{149}Sm wesentlich auf den Betrieb von Reaktoren aus, die mit thermischen Neutronen arbeiten.

Für Kerne mit mittleren Massenzahlen und für die schweren magischen Kerne, bei denen der Abstand zwischen den Energieniveaus groß ist, tritt bei Energien unter der Energie des ersten angeregten Niveaus keine unelastische Streuung auf. Deshalb sind die Resonanzen, die im Gebiet der Kerne mit mittleren Massenzahlen beobachtet werden, vorwiegend Resonanzen der elastischen Streuung. So enthält z. B. der Querschnitt der Streuung von Neutronen an Aluminium im Gebiet von 100 keV einige Resonanzen, deren Breite von der Größenordnung 5 ··· 20 keV ist. Die Resonanzen im Gebiet von 500 keV besitzen eine Neutronenbreite von etwa 30 keV. Die Partialbreite Γ_γ der γ-Strahlung ist 10^3mal kleiner und liegt im Bereich von 3 ··· 30 eV.

Im Gebiet der mittleren Massenzahlen gibt es einige Kerne mit stark ausgeprägten isolierten Resonanzen. So besitzt z. B. Kobalt ein ausgeprägtes Resonanzmaximum bei 115 eV, Mangan ein solches bei 300 eV. Die anderen Resonanzen dieser Elemente liegen bei bedeutend höheren Energien und liefern kleinere Maximalwerte der Querschnitte. Abb. 57 zeigt in logarithmischem Maßstab den totalen Wirkungsquerschnitt für die Streuung von Neutronen an Goldkernen im Resonanzgebiet, Abb. 58 den totalen Streuquerschnitt für Caesium [8,3].

Wird die Streuung von Neutronen mit $l > 0$ oder die Streuung von geladenen Teilchen (p, d, α, ...) betrachtet, so muß bei der Berechnung der Querschnitte

der elastischen Streuung und der Reaktion die zusätzliche potentielle Energie im Gebiet $r > R$ berücksichtigt werden. Im Fall geladener Teilchen (Ladung $Z_1 e$) wird zur Wechselwirkungsenergie der Term $Z Z_1 e^2/r$ hinzugefügt. Bei $l \neq 0$ muß man die zusätzliche potentielle Energie $\hbar^2 l(l+1)/2\mu r^2$ beachten. Da beide Energien einer Abstoßung entsprechen, verkleinert sich die Wahrscheinlichkeit für die Beobachtung eines Teilchens an der Kernoberfläche im Vergleich zur Wahrscheinlichkeit der Beobachtung

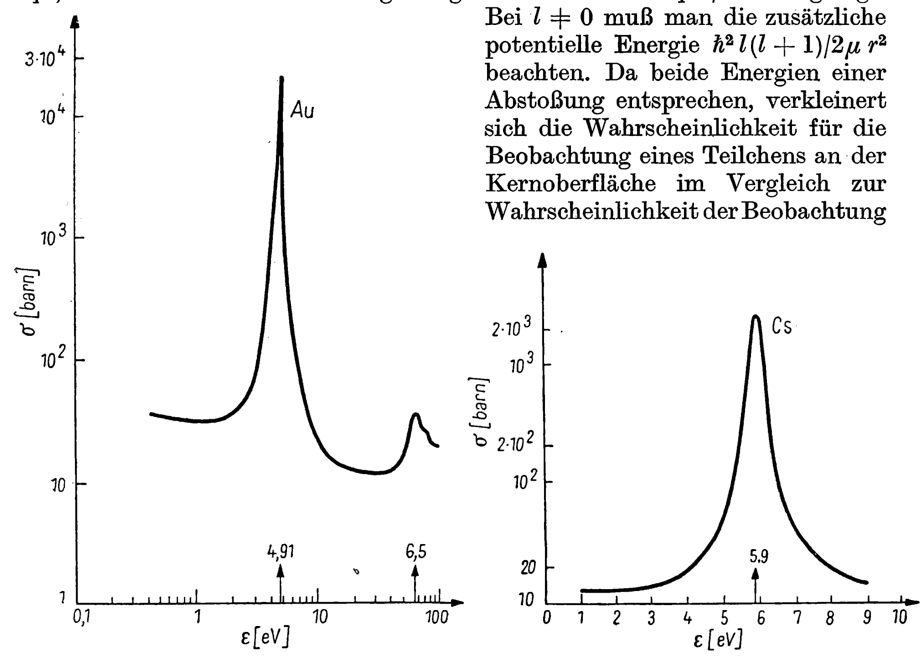


Abb. 57. Totaler Wirkungsquerschnitt für die Streuung von Neutronen an Goldkernen

Abb. 58. Totaler Wirkungsquerschnitt für die Streuung von Neutronen an Caesiumkernen

von Neutronen mit $l = 0$. Man führt eine Größe ein, die diese Verminderung charakterisiert. Sie wird *Durchlässigkeit* P_l genannt und durch die Gleichung

$$P_l = [G_l^2(R) + F_l^2(R)]^{-1} \tag{8.6.21}$$

definiert, wobei die Funktionen $F_l(x)$ und $G_l(x)$ im Abschn. 7.6. definiert wurden. Für Neutronen mit $l = 0$ ist $P_0 = 1$. Für Protonen beträgt die Durchlässigkeit bei $l = 0$ und $R = 0$

$$P_0 = G_0^{-2}(0) = C^2 = \frac{2\pi\eta}{e^{2\pi\eta} - 1}, \qquad \eta = \frac{e^2 Z Z_1}{\hbar v},$$

d. h., sie ist gleich der Durchlässigkeit des Coulomb-Walls.

$P_l \ll 1$ bedeutet, daß die Teilchen die Kernoberfläche nicht merklich durchdringen und folglich die Intensität der Reaktion klein sein muß.

Die Partialbreite für die Streuung von Neutronen mit dem Drehimpuls l kann in der Form

$$\Gamma_e = 2k P_l \gamma_e^2 \tag{8.6.22}$$

geschrieben werden, wobei γ_e^2 die reduzierte Niveaubreite ist.

8.7. Berechnung der Wirkungsquerschnitte unter den einfachsten Annahmen über die inneren Eigenschaften des Kerns

Wir wollen den Wirkungsquerschnitt der elastischen Streuung und der Reaktion für Neutronen berechnen, deren Wellenlänge $\lambda\!\!\!^-$ klein gegen den Kernradius ist, und dabei voraussetzen, daß alle Neutronen, die mit dem Kern in Wechselwirkung treten, auch von dem Kern absorbiert werden. Man bezeichnet dieses Modell als *Modell des absolut schwarzen Kerns.* Da $\lambda\!\!\!^- \ll R$ ist, kann man die quasiklassische Näherung benutzen. Wenn der Kern den Radius R besitzt, werden alle Teilchen mit ihm in Wechselwirkung treten, deren Bahndrehimpulse l kleiner oder gleich $k\,R$ sind. Deshalb ist die Streumatrix für die Streuung von Neutronen an einem absolut schwarzen Kern vom Radius R

$$S_{aa}^{(l)} = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad l \leqq k\,R, \\ 1 & \text{für} \quad l > k\,R. \end{cases} \tag{8.7.1}$$

Aus (8.2.10) und (8.2.12) folgt dann

$$\sigma_e = \sigma_r = \frac{\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{kR} (2l+1) = \frac{\pi}{k^2} (k\,R + 1)^2 = \pi (R + \lambda\!\!\!^-)^2. \tag{8.7.2}$$

Der totale Querschnitt ist $\sigma_t = \sigma_e + \sigma_r = 2\pi (R + \lambda\!\!\!^-)^2$. In [8,4] wurde die unelastische Streuung (der Reaktionsquerschnitt) von monoenergetischen Neutronen mit den Energien 4,5, 7,0 und 14,1 MeV an den Kernen Ti, Cr, Fe, Ni, Cu, Ag, Sn, Pb und Bi gemessen. Dabei wurde festgestellt, daß bei diesen Energien der Reaktionsquerschnitt befriedigend durch die Gleichung $\sigma_r = \pi (R + \lambda\!\!\!^-)^2$ wiedergegeben werden kann.

Das Experiment zeigt, daß der totale Querschnitt σ_t seinen asymptotischen Wert bei Energien der Größenordnung 50 MeV erreicht. Dieser asymptotische Wert ist gleich dem doppelten geometrischen Querschnitt des Kerns. Bei diesen Energien ist jedoch die Annahme, daß die Neutronen alle vom Kern absorbiert werden, nicht mehr richtig (s. Abschn. 13.5. und 15.2.). Die durchgeführte Rechnung ist einfach, weil angenommen wurde, daß der partielle Reaktionsquerschnitt $\sigma_r^{(l)}$ bei $\lambda\!\!\!^- \ll R$ entweder gleich Null ist oder seinen maximal möglichen Wert erreicht, wenn er gleich dem Querschnitt der elastischen Streuung ist. In diesem Fall ist der Querschnitt der elastischen Streuung vollständig durch die Schatten- oder Diffraktionsstreuung bedingt (s. Abschn. 15.1.). Diese ist überwiegend nach vorn gerichtet, und zwar in den Raumwinkel

$$\Omega \approx \frac{\lambda\!\!\!^-}{R}.$$

Im vorangehenden Abschnitt ist gezeigt worden, daß man den Querschnitt der elastischen Streuung, den Reaktionsquerschnitt und den totalen Querschnitt berechnen kann, wenn die logarithmische Ableitung der radialen Wellenfunktion auf der Kernoberfläche bekannt ist. Der Wert dieser Ableitung

wird durch die Struktur des Kerns und des einfallenden Teilchens, durch ihre Spins und die Energie der Relativbewegung bestimmt. Die logarithmische Ableitung kann z. Z. nur unter großen Vereinfachungen theoretisch berechnet werden. Eine der fruchtbaren Hypothesen, durch die viele Eigenschaften der Kernreaktionen erklärt werden konnten, war die BOHRsche Hypothese (vgl. auch Abschn. 8.6.), nach der man die Kernreaktion in 2 Stadien unterteilen kann: a) die Bildung des Compoundkerns und b) den Zerfall des Compoundkerns in die Reaktionsprodukte.

Die BOHRsche Hypothese beruht auf der Vorstellung, daß der Kern ein System von Teilchen darstellt, zwischen denen eine sehr starke Wechselwirkung besteht. Es wurde angenommen, daß beim Eindringen eines äußeren Nukleons in den Wirkungsbereich der Kernkräfte seine Energie schnell auf die übrigen Nukleonen des Kerns verteilt wird, d. h., daß die freie Weglänge des äußeren Nukleons in der Kernmaterie klein gegen die Kernabmessungen ist.[1]) Im Ergebnis einer vielfachen Umverteilung der Energie vergeht eine lange Zeit, bis auf ein Teilchen wieder eine ausreichende Energie konzentriert ist und dieses Teilchen den Compoundkern verlassen kann. Deshalb kann man den Zerfall des Compoundkerns in die Reaktionsprodukte unabhängig von der Art seiner Bildung betrachten (s. Abschn. 8.6. und 8.10.).

Nach BOHR kann man also den Querschnitt der Reaktion $\sigma(a, b)$, der dem Eingangskanal a und dem Ausgangskanal b entspricht, in der Form

$$\sigma(a, b) = \sigma_c(a)\, W_c(b) \tag{8.7.3}$$

darstellen, wobei $\sigma_c(a)$ der Querschnitt für die Bildung des Compoundkerns im Kanal a und $W_c(b)$ die Zerfallswahrscheinlichkeit des Compoundkerns c im Kanal b ist; dabei gilt $\sum_b W_c(b) = 1$, wenn die Summe über alle möglichen offenen Reaktionskanäle erstreckt wird. Für die elastische Streuung, die nicht durch das Stadium des Compoundkerns verläuft, kann (8.7.3) nicht angewendet werden, da diese Streuung mit der einfallenden Welle kohärent ist und deshalb nicht als von der einfallenden Welle unabhängiger Prozeß betrachtet werden kann.

Wir wollen jetzt den Fall untersuchen, daß die Energie des einfallenden Teilchens (einige MeV für Kerne mit mittleren und großen Massenzahlen) dazu ausreicht, den Compoundkern mit Anregungsenergien zu bilden, die im Kontinuumbereich des Spektrums liegen. Wir nehmen an, daß der

---

[1]) Wenn man annimmt, daß der Querschnitt der Nukleon-Nukleon-Streuung nicht durch die Anwesenheit anderer Nukleonen beeinflußt wird, ist die freie Weglänge eines Neutrons mit einer kinetischen Energie unter 20 MeV in der Kernmaterie

$$\Lambda = \frac{1}{\varrho\,\sigma} = \frac{4\pi R^3}{3A}\,\frac{1}{\sigma} \approx 0{,}4 \cdot 10^{-13}\ \text{cm}.$$

Es ist gegenwärtig sichergestellt, daß die Berücksichtigung des PAULI-Prinzips die freie Weglänge von Nukleonen kleiner Energien in der Kernmaterie beträchtlich vergrößert. So beträgt nach der Arbeit [8,6] die mittlere freie Weglänge bei Energien von $1 \cdots 3$ MeV etwa 10^{-12} cm.

Compoundkern auf mehrere verschiedene Arten zerfallen kann, so daß es für den Endkern viele verschiedene Zustände gibt. Wenn außerdem die Wechselwirkung des einfallenden Teilchens mit den Nukleonen des Kerns so stark ist, daß das Teilchen im Zeitraum der Wechselwirkung mit dem Kern seine Energie an andere Nukleonen des Kerns abgeben kann (dazu ist notwendig, daß das Teilchen nicht allzu schnell ist, d. h., seine Energie muß kleiner als 50 MeV sein), so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich die gesamte Anregungsenergie auf dem ersten Teilchen konzentriert, verschwindend klein. Unter diesen Bedingungen kann man den Prozeß so betrachten, als ginge im Kern eine vollständige Absorption der einfallenden Teilchen gegebener Energie und eine Emission anderer Teilchen oder desselben Teilchens mit anderer Energie vor sich, d. h., als sei der Kern „absolut schwarz".

Wenn man in grober Näherung [8,7] die Bewegung des einfallenden Teilchens im Kern durch eine Funktion $\varphi(r)$ beschreibt, die nur von r abhängt, so kann man die Unmöglichkeit (sehr kleine Wahrscheinlichkeit) einer elastischen Streuung über das Compoundkernstadium mathematisch durch die Annahme ausdrücken, daß die Wellenfunktion φ im Innern des Kerns nur durch eine einlaufende Welle beschrieben wird, d. h., daß

$$r\,\varphi = \text{const}\; e^{-iKr} \qquad (8.7.4)$$

ist, wobei K mit der mittleren kinetischen Energie des Nukleons im Kern zusammenhängt. Es ist $K^2 = k^2 + K_0^2$; mit k wird die Wellenzahl der Relativbewegung bezeichnet, die mit der Energie ε der Relativbewegung über die Beziehung $k = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2\varepsilon\,\mu}$ verknüpft ist, und mit K_0 der Betrag des Wellenvektors für den Fall, daß das einfallende Teilchen die Energie 0 besitzt: $K_0 \approx 10^{13}\ \text{cm}^{-1}$. In dem betrachteten Modell werden also die inneren Eigenschaften des Kerns durch die beiden Parameter K_0 und R charakterisiert.

Unter Benutzung von (8.7.4) berechnen wir die logarithmische Ableitung auf der Kernoberfläche:

$$f = R\left\{\frac{\dfrac{d(r\,\varphi)}{dr}}{r\,\varphi}\right\}_{r=R} = -i\,X. \qquad (8.7.5)$$

Hierbei ist $X = K\,R$. Im Modell des schwarzen Kerns ist folglich die logarithmische Ableitung f rein imaginär, d. h., es ist $f_0 = 0$, $h = X$. Da in diesem Modell der Zerfall des Kerns in den Eingangskanal ausgeschlossen wird, stimmt der Querschnitt σ_c für die Bildung des Compoundkerns mit dem Reaktionsquerschnitt überein. Wird (8.7.5) in (8.7.7) eingesetzt, so erhalten wir

$$\sigma_r = \sigma_c = \frac{\pi}{k^2}\,\frac{4\,x\,X}{(x+X)^2} = \frac{\pi}{k^2}\,T \qquad (8.7.6)$$

mit

$$T = \frac{4\,k\,K}{(k+K)^2}.$$

Im Anwendungsbereich des Modells des schwarzen Kerns stellt somit der Querschnitt für die Bildung des Compoundkerns eine monotone (monoton abnehmende) Funktion der Energie dar. Da π/k^2 der maximal mögliche

Querschnitt bei $l = 0$ ist, läßt (8.7.6) eine einfache Interpretation zu. Den Faktor T kann man als Durchlaßgrad auffassen. Wenn eine Welle mit der Wellenzahl k senkrecht auf die ebene Grenze eines unendlich ausgedehnten Mediums mit dem Brechungsindex $n = K/k$ auftrifft, so ist der Durchlaßgrad

$$T = \frac{4n}{(1+n)^2}.$$

Bei $k \ll K$ kann man die Formel (8.7.6) durch einen Näherungsausdruck ersetzen:

$$\sigma_c \approx \frac{4\pi}{kK} \approx \frac{\text{const}}{\sqrt{\varepsilon}}, \tag{8.7.7}$$

d. h., bei kleinen Energien ist der Reaktionsquerschnitt (oder der Querschnitt für die Bildung des Compoundkerns) umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus der Energie. Dies ist das gut bekannte $1/v$-Gesetz für die Wahrscheinlichkeit der Absorption langsamer Neutronen.

Einen Näherungsausdruck für den Querschnitt der Bildung des Compoundkerns für den Fall $l \neq 0$ kann man erhalten, wenn man den maximal möglichen Querschnitt $\frac{\pi}{k^2}(2l+1)$ mit T multipliziert; es gilt also

$$\sigma_c^{(l)} = \sigma_r^{(l)} = (2l+1)\frac{\pi}{k^2}\frac{4kK}{(k+K)^2}. \tag{8.7.8}$$

Bei $\lambda\!\!\!^{-} \ll R$ kann man die quasiklassische Näherung verwenden. Nimmt man an, daß $\sigma_c = \sum_{l=0}^{kR} \sigma_c^{(l)}$ ist, so erhält man

$$\sigma_c = \pi(R + \lambda\!\!\!^{-})^2 \frac{4kK}{(k+K)^2}. \tag{8.7.9}$$

Bei hinreichend großen k geht (8.7.9) in den Näherungsausdruck

$$\sigma_c = \pi(R + \lambda\!\!\!^{-})^2 \approx \pi R^2$$

über.

Wird (8.7.5) in (8.6.6) und (8.6.7a) eingesetzt, so erhalten wir den Wirkungsquerschnitt der elastischen s-Streuung ohne Bildung des Compoundkerns:

$$\sigma_e^0 = \frac{4\pi}{k^2}\left\{\frac{k^2}{(k+K)^2} + \frac{K-k}{K+k}\sin^2 kR\right\}, \tag{8.7.10}$$

und den totalen Streuquerschnitt:

$$\sigma_t^0 = \frac{2\pi}{k^2}\left\{1 + \frac{k-K}{k+K}\cos 2kR\right\}. \tag{8.7.11}$$

Bei $kR \ll 1$ ist $\cos 2kR \approx 1$ und $\sin kR \approx 0$. Es gilt also

$$\sigma_t^0 = \frac{4\pi}{k(k+K)} \approx \frac{4\pi}{kK},$$

$$\sigma_e^0 = \frac{4\pi}{(k+K)^2} \approx \frac{4\pi}{K^2} \ll \sigma_t,$$

d. h., in dieser Näherung ist $\sigma_t^0 \approx \sigma_r = 4\pi/kK$. Man muß jedoch beachten, daß die oben angeführten Formeln nur bei ausreichend großen Neutronen-

energien anwendbar sind, bei denen der Kern mit einem schwarzen Körper verglichen werden kann. Deshalb ist der Fall $kR \ll 1$ als mathematische Extrapolation der Formeln (8.7.10) und (8.7.11) zu betrachten.

Untersucht man die Wechselwirkung von Neutronen kleiner Energie[1]) mit einem Kern, so darf die Möglichkeit der elastischen Streuung nach der Bildung des Compoundkerns nicht vernachlässigt werden. Wenn wir wieder von der groben Näherung ausgehen, daß die Bewegung des einfallenden Teilchens innerhalb des Kerns (in der Nähe seiner Oberfläche) durch eine Funktion der Koordinate r beschrieben werden kann, so darf diese Funktion jetzt nicht mehr als einlaufende Welle geschrieben werden, sondern man muß sie als Superposition einer einlaufenden und einer auslaufenden Welle darstellen. Die auslaufende Welle hat dabei im allgemeinen eine kleinere Amplitude und ist in der Phase um eine Größe ζ verschoben, die von der Energie des einfallenden Teilchens und dem Kernbau abhängt. Bei hinreichend langsamen Neutronen, deren Energie nicht zur Anregung des niedrigsten Niveaus des Targetkerns ausreicht, wird das einfallende Neutron bei Vernachlässigung der Einfangreaktion und der Spaltung in denselben Kanal emittiert, in dem es in den Kern gelangte, d. h., es ist nur eine elastische Streuung der Neutronen möglich. Dieser Fall wird bei der Streuung von langsamen Neutronen an Kernen mit mittleren Massenzahlen realisiert. In Tab. 25 ist das Verhältnis Γ_e/Γ für einige Kerne angeführt [8,8].

Tabelle 25

Das Verhältnis Γ_e/Γ für einige Kerne mittlerer Massenzahl

Kern	ε_r [eV]	Γ_e/Γ
^{27}Al	>4100	$>0{,}99$
^{55}Mn	345, 2400	$\approx 0{,}99$
^{59}Co	115	0,94
Cu	$10^3 \cdots 10^4$	0,95
Ga	$10^2 \cdots 10^3$	$\approx 0{,}99$
^{75}As	$10^2 \cdots 10^3$	$\approx 0{,}75$
^{103}Ru	1,28	0,043
^{152}Sm	10	0,66
^{181}Ta	4	0,12
^{186}W	15	0,81

Wenn nur elastische Streuung auftritt, so muß die Phasenverschiebung ζ der auslaufenden Welle im Innern des Kerns (in der Nähe der Oberfläche) eine reelle Zahl sein. Es ist folglich

$$r\varphi = \mathrm{e}^{-iKr} + \mathrm{e}^{i(Kr+2\zeta)} = 2\mathrm{e}^{i\zeta}\cos(Kr+\zeta).$$

[1]) Als Gebiet kleiner Energien bezeichnen wir den Energiebereich oberhalb thermischer Energien und unterhalb 100 keV. Bei diesen Energien ist die Neutronenstreuung eine fast reine s-Streuung.

Die logarithmische Ableitung f besitzt den reellen Wert

$$f = -X \tan(X + \zeta). \tag{8.7.12}$$

Das Argument $z(\varepsilon) \equiv X + \zeta$ des Tangens ist eine Funktion der Energie der Relativbewegung von Neutron und Kern. Die logarithmische Ableitung (8.7.12) besitzt bei $z(\varepsilon_r) = n\pi$ (n = ganze Zahl) Nullstellen, die den Resonanzenergien ε_r entsprechen. Wird angenommen, daß $z(\varepsilon)$ eine monoton wachsende Funktion von ε ist (Abb. 59), so kann man sie in der Umgebung einer der Resonanzenergien ε_r als Gerade darstellen:

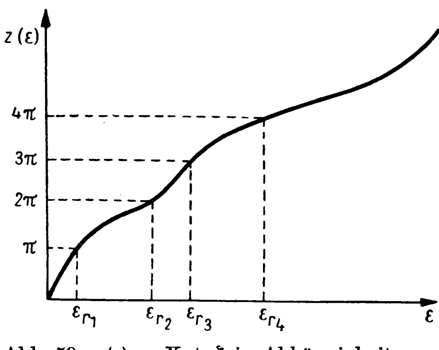


Abb. 59. $z(\varepsilon) = X + \zeta$ in Abhängigkeit von der Energie ε

$$z(\varepsilon) = \frac{\pi}{D^*}(\varepsilon - \varepsilon_r) \tag{8.7.13}$$

mit

$$\frac{\pi}{D^*} \equiv \left[\frac{\partial z(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right]_{\varepsilon=\varepsilon_r}.$$

Die Größe D^* unterscheidet sich in der Umgebung der Energie $\varepsilon = \varepsilon_r$ nur wenig vom mittleren Abstand zwischen den Resonanzniveaus, die vom Neutron angeregt werden können, d. h. vom Abstand zwischen Niveaus mit bestimmtem Gesamtdrehimpuls, bestimmter Parität usw.

Im Gebiet der r-ten Resonanz muß also die logarithmische Ableitung die Form

$$f = -K R \tan\frac{\pi}{D^*}(\varepsilon - \varepsilon_r)$$

besitzen. Vernachlässigt man die Energieabhängigkeit von K (in einem kleinen Energiegebiet) und benutzt (8.6.8), so ergibt sich für die Breite der elastischen Streuung von Neutronen kleiner Energien der Ausdruck

$$\Gamma_e = \frac{2k\,D^*}{\pi K}. \tag{8.7.14}$$

Resonanzerscheinungen werden auftreten, wenn die Partialbreiten klein gegen den Niveauabstand sind. Ist $D^* \approx D$, so erhält man nach (8.7.14) als Bedingung für das Auftreten von Resonanzniveaus $k \ll K$.

Benutzt man den Begriff der reduzierten Niveaubreite (8.6.16), so kann man $\Gamma_e = 2k\,\gamma_e^2$ schreiben, wobei die reduzierte Breite der elastischen Streuung

$$\gamma_e^2 = \frac{D^*}{\pi K}$$

ist.

Die Größe D^*, die angenähert gleich dem Niveauabstand des Compoundkerns ist, läßt sich aus (8.7.14) berechnen, wenn die experimentellen Werte

der Neutronenbreiten Γ_e bekannt sind. In Tab. 26 sind die experimentellen Werte für Γ_e und ε_r sowie die nach (8.7.14) berechneten Werte von D^* für einige Kerne bei $K = 10^{13}\,\mathrm{cm}^{-1}$ angeführt.

Tabelle 26

Die Parameter der Resonanzniveaus einiger Kerne

Targetkern	ε_r [keV]	Γ_e [keV]	D^* [keV]
^{23}Na	3	0,17	26
^{23}Na	60	3	100
^{24}Mg	2540	150	670
^{27}Al	155	10	200
^{32}S	115	25	520

Bei der Streuung von langsamen Neutronen an schweren Kernen (keine magischen Kerne) sind elastische Streuung, Einfang und Spaltung möglich. Mit Ausnahme einiger besonderer Fälle ist dabei die Neutronenbreite klein gegen die Strahlungsbreite. Bei schweren (nichtmagischen) Kernen mit geraden Massenzahlen ist der Abstand zwischen den Niveaus von der Größenordnung 100 keV, bei vielen Kernen mit ungeraden Massenzahlen von der Größenordnung 10 keV.

Bei der Streuung von Neutronen kleiner Energien an schweren Kernen und von Neutronen mittlerer Energien an Kernen mit mittleren Massenzahlen kann der Zerfall des Compoundkerns sowohl zur elastischen Streuung wie auch zu Umwandlungsreaktionen führen. In diesem Fall kann man die Wellenfunktion innerhalb des Kerns (in der Nähe der Kernoberfläche) in folgender Form darstellen:

$$r\,\varphi = 2\mathrm{e}^{i(\zeta + i q)} \cos(K r + \zeta + i q). \tag{8.7.15}$$

Da die Amplitude der auslaufenden Welle nicht größer sein kann als die der einlaufenden Welle, ist $q \geqq 0$. Der Fall $q = 0$ entspricht der schon weiter oben betrachteten rein elastischen Streuung. q ist eine Funktion der Energie der Relativbewegung. Berechnet man die logarithmische Ableitung der Funktion (8.7.15) für $r = R$, so erhält man

$$f = -KR \tan\{z(\varepsilon) + i q\},$$

wobei $z(\varepsilon) = K R + \zeta$ ist. Wird für $z(\varepsilon)$ im Gebiet der Resonanzenergie ε_r der Näherungsausdruck (8.7.13) angenommen, so kann man schreiben

$$f = -KR \tan\left\{\frac{\pi}{D^*}(\varepsilon - \varepsilon_r) + i q\right\}.$$

In einem kleinen Energiebereich in der Nähe der Resonanzenergie ist

$$f = \left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\right)\Bigg|_{\substack{\varepsilon=\varepsilon_r \\ q=0}} (\varepsilon - \varepsilon_r) + \left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)\Bigg|_{\substack{\varepsilon=\varepsilon_r \\ q=0}} q$$

und folglich

$$f = -K R \frac{\pi}{D^*} (\varepsilon - \varepsilon_r) - i q K R. \tag{8.7.16}$$

Aus (8.7.16) ist sofort zu ersehen, daß die Partialbreite der elastischen Neutronenstreuung $\Gamma_e = 2K D^*/\pi k$ mit (8.7.14) zusammenfällt und daß die Partialbreite für die Reaktion durch die Gleichung

$$\Gamma_r = -\frac{2h}{\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}} = \frac{2 q D^*}{\pi}$$

ausgedrückt wird.

Die potentielle Energie $\hbar^2 l(l+1)/2\mu r^2$ und die Coulomb-Abstoßung, die im Eingangskanal wirken, führen zu einer Reflexion der Nukleonen an der Kernoberfläche. Zur Berechnung des Reflexionsvermögens $(1 - T)$ und des Durchlaßgrades T stellen wir die Wellenfunktion $\varphi(r)$ der Relativbewegung (mit dem Drehimpuls $\hbar l$) von Nukleon und Kern in der Form

$$r \varphi = \psi^* + b \psi, \qquad r \geqq R \tag{8.7.17}$$

dar, wobei mit ψ^* und ψ die Wellenfunktionen der einfallenden und auslaufenden Wellen bezeichnet werden, die auf den Fluß normiert sind; R ist der Kernradius. Das Reflexionsvermögen der Wellen im Eingangskanal ist gleich $|b|^2$, der Durchlaßgrad

$$T = 1 - |b|^2. \tag{8.7.18}$$

Wir setzen voraus, daß man die Wellenfunktion im Kern in der Nähe seiner Oberfläche in der Form (8.7.4) darstellen kann, d. h., daß

$$r \varphi = \text{const} \cdot \exp(-i K r), \qquad r \geqq R \tag{8.7.19}$$

ist. Werden die logarithmischen Ableitungen der Funktionen (8.7.17) und (8.7.19) auf der Kernoberfläche gleichgesetzt, so erhalten wir

$$\left\{ \frac{\frac{\psi^*}{\psi}\left(\frac{r \frac{\partial \psi^*}{\partial r}}{\psi^*}\right) + b \left(\frac{r \frac{\partial \psi}{\partial r}}{\psi}\right)}{\frac{\psi^*}{\psi} + b} \right\}_{r=R} = -i K R. \tag{8.7.20}$$

Die Gl. (8.7.20) gestattet, den Koeffizienten $|b|^2$ durch die logarithmischen Ableitungen der Wellenfunktionen ψ und ψ^* im Eingangskanal sowie durch $X \equiv K R$ auszudrücken. Wird (8.7.20) nach b aufgelöst, so finden wir

$$|b|^2 = \left| \frac{\left(\frac{r \frac{\partial \psi}{\partial r}}{\psi}\right)^*_{r=R} + i X}{\left(\frac{r \frac{\partial \psi}{\partial r}}{\psi}\right)_{r=R} + i X} \right|. \tag{8.7.21}$$

Die Berechnung des Reflexionsvermögens und des Durchlaßgrades führt somit auf die Berechnung der logarithmischen Ableitung der Funktion ψ

im Eingangskanal an der Stelle $r = R$. Wir wollen $|b|^2$ für Neutronen mit dem Drehimpuls $\hbar\, l$ berechnen. Außerhalb des Kerns muß unbedingt das zusätzliche Potential

$$V(r) = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2}, \qquad r \geqq R \tag{8.7.22}$$

berücksichtigt werden. Die Wellenfunktion ψ des Neutrons muß deshalb der Gleichung

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} + k^2\right)\psi = 0, \qquad r > R \tag{8.7.23}$$

genügen, wobei $k^2 = 2\mu\,\varepsilon/\hbar^2$ die Energie der Relativbewegung von Neutron und Kern ist.

Die allgemeine Lösung der Gl. (8.7.23) kann durch eine Linearkombination der Funktionen

$$G_l = \varrho\, j_l(\varrho), \tag{8.7.24}$$

$$F_l = \varrho\, n_l(\varrho) \tag{8.7.25}$$

ausgedrückt werden, wobei

$$\varrho = k r \quad \text{und} \quad j_l(\varrho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\varrho}}\, J_{l+1/2}(\varrho)$$

eine sphärische BESSEL-Funktion,

$$n_l(\varrho) = (-1)^{l+1} \sqrt{\frac{\pi}{2\varrho}}\, J_{-l-1/2}(\varrho)$$

eine sphärische NEUMANN-Funktion sind. Die sphärischen BESSEL-Funktionen und sphärischen NEUMANN-Funktionen lassen sich durch die trigonometrischen Funktionen darstellen. So ist

$$j^0(\varrho) = \frac{\sin\varrho}{\varrho}, \qquad n_0(\varrho) = -\frac{\cos\varrho}{\varrho},$$

$$j_1(\varrho) = \frac{\sin\varrho}{\varrho^2} - \frac{\cos\varrho}{\varrho}, \qquad n_1(\varrho) = -\frac{\cos\varrho}{\varrho^2} - \frac{\sin\varrho}{\varrho},$$

$$j_2(\varrho) = \left(\frac{3}{\varrho^2} - \frac{1}{\varrho}\right)\sin\varrho - \frac{3}{\varrho^2}\cos\varrho, \quad n_2(\varrho) = -\left(\frac{3}{\varrho^3} - \frac{1}{\varrho}\right)\cos\varrho - \frac{3}{\varrho^2}\sin\varrho, \ldots$$

Die Funktionen G_l und F_l sind so normiert, daß sie folgender Beziehung genügen:

$$G_l \frac{\partial F_l}{\partial \varrho} - F_l \frac{\partial G_l}{\partial \varrho} = 1. \tag{8.7.26}$$

Die Lösungen der Gl. (8.7.23), die auslaufenden Wellen entsprechen, die auf den Einheitsfluß normiert sind, kann man durch (8.7.24) und (8.7.25) ausdrücken:

$$\psi_l(\varrho) = \sqrt{\frac{\mu}{\hbar k}}\,(G_l + i F_l). \tag{8.7.27}$$

Die logarithmische Ableitung von (8.7.27) auf der Kernoberfläche kann in der Form

$$\left(\varrho \frac{\frac{\partial \psi_l}{\partial \varrho}}{\psi_l}\right)_{r=R} = k R P_l \left\{F_l \frac{\partial F_l}{\partial \varrho} + G_l \frac{\partial G_l}{\partial \varrho} + i\right\}_{r=R} = k R \left\{i P_l - \frac{1}{2 P_l} \frac{\partial P_l}{\partial x}\right\} \qquad (8.7.28)$$

geschrieben werden, wobei

$$P_l = [F_l^2 + G_l^2]_{r=R}^{-1}, \qquad x = k R \qquad (8.7.29)$$

die schon oben eingeführte Durchlässigkeit ist.

Auf der Kernoberfläche wird der Wert der Funktion ψ_l durch die Gleichung

$$\{\psi_l(\varrho)\}_{r=R} = \left(\frac{\mu}{k \hbar P_l}\right)^{1/2} \exp(i \varphi_l) \qquad (8.7.30)$$

gegeben, wobei die Phase φ_l aus der Bedingung

$$\left(\frac{\psi_l}{\psi_l^*}\right)_{r=R} = \exp(2 i \varphi_l)$$

zu berechnen ist. Nach (8.7.30) bestimmt somit die Durchlässigkeit P_l die Amplitude der Welle ψ_l auf der Kernoberfläche im Eingangskanal. Da $P_0 = 1$ ist, folgt aus (8.7.30)

$$P_l = \left\{\frac{|\psi_0|^2}{|\psi_l|^2}\right\}_{r=R}. \qquad (8.7.31)$$

Wir wollen die drei ersten Werte der Neutronendurchlässigkeit anführen ($x = k R$):

$$P_0 = 1,$$
$$P_1 = \frac{x^2}{1 + x^2}, \qquad (8.7.32)$$
$$P_2 = \frac{x^4}{9 + 3x^2 + x^4}.$$

Wird (8.7.28) in (8.7.21) eingesetzt, so erhält man das Reflexionsvermögen für die Neutronen:

$$|b|^2 = \frac{k^2 \left(\frac{1}{P_l} \frac{\partial P_l}{\partial x}\right)^2 + 4 (k P_l - K)^2}{k^2 \left(\frac{1}{P_l} \frac{\partial P_l}{\partial x}\right)^2 + 4 (k P_l + K)^2}. \qquad (8.7.33)$$

Der Durchlaßgrad der Kernoberfläche für Neutronen beträgt

$$T = 1 - |b|^2 = \frac{16 k K P_l}{k^2 \left(\frac{1}{P_l} \frac{\partial P_l}{\partial x}\right)^2 + (k P_l + K)^2}. \qquad (8.7.34)$$

Bei kleinen Energien, d. h. bei $k \ll K$, folgt aus (8.7.34) der Näherungsausdruck

$$T \approx \frac{4 k P_l}{K}, \qquad k \ll K. \qquad (8.7.34')$$

Natürlich sind der Durchlaßgrad T für Nukleonen, die sich aus dem äußeren Gebiet in das Kerninnere bewegen, und der Durchlaßgrad für Nukleonen, die sich aus dem Kerninnern heraus in das äußere Gebiet bewegen, einander gleich.

Die Gln. (8.7.34) und (8.7.29) behalten ihre Gültigkeit auch für Protonen, wenn man unter F_l und G_l die unabhängigen Lösungen der Gleichung

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2\mu Z e^2}{\hbar^2 r} + k^2\right)\psi = 0$$

versteht, die den Bedingungen (8.7.26) genügen. Tabellen für diese Funktionen kann man in der Arbeit [8,9] finden.

8.8. Bestimmung von Parametern der Resonanztheorie aus den experimentellen Werten

Bei der elementaren Ableitung der BREIT-WIGNER-Formeln in den vorangehenden Abschnitten wurde der Spin von Kern und Nukleon nicht berücksichtigt. Bevor wir auf die Möglichkeiten zur experimentellen Bestimmung der Parameter aus den BREIT-WIGNER-Formeln eingehen, untersuchen wir, wie sich diese Formeln bei Berücksichtigung der Spinzustände von Kern und Nukleon ändern.

Wir bezeichnen den Kernspin mit j. Da der Nukleonenspin gleich $^1/_2$ ist, erhält man für den Kanalspin aus der Vektoraddition von Kern- und Nukleonenspin

$$S = j \pm \frac{1}{2}.$$

Wenn der Bahndrehimpuls der Relativbewegung von Kern und Nukleon gleich l ist, so erhält man für den Gesamtspin J des Systems aus der Vektoraddition die Werte

$$S + l \geqq J \geqq |l - S|.$$

Neben dem Gesamtdrehimpuls J bestimmt die Projektion M_J des Gesamtdrehimpulses und die Parität den Zustand des Systems. Die Elemente der Streumatrix und folglich auch die Wirkungsquerschnitte können nur vom Gesamtdrehimpuls und der Parität, nicht aber von M_J abhängen, da man eine Änderung von M_J durch Drehung des Koordinatensystems erzeugen kann, die nicht auf die Dynamik des Stoßes einwirken darf. Die Resonanzreaktionen verlaufen meist bei kleinen Relativenergien von Kern und Nukleon, so daß an der Streuung nur Zustände mit $l = 0$ teilnehmen. In diesem Fall ist der Gesamtdrehimpuls des Systems gleich dem Kanalspin ($J = S$). Jedem Wert des Gesamtdrehimpulses entsprechen $2J + 1$ Orientierungen des Gesamtdrehimpulses im Raum, die sich durch ihre Projektionen auf eine ausgezeichnete Achse unterscheiden. Wenn der Kern nicht orientiert ist und wenn mit einem Bündel nichtpolarisierter Teilchen gearbeitet wird, so sind in der ebenen Welle $2(2j + 1)$ inkohärente Partialwellen mit dem Drehimpuls $l = 0$ vorhanden, die sich durch ihre Spinzustände voneinander unter-

scheiden. Deshalb ist die relative Zahl von Zuständen mit bestimmtem Gesamtdrehimpuls

$$g(J) = \frac{2J+1}{2(2j+1)}, \tag{8.8.1}$$

wobei $\sum_J g(J) = 1$ ist. Bei Reaktionen mit Nukleonen ist $J = j \pm {}^1/_2$, und es gilt

$$g = \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{1}{2j+1}\right).$$

In dem allgemeineren Fall, daß der Teilchenspin gleich s ist und in der Streuung Wellen mit $l \neq 0$ wesentlich sind, erhält man für das statistische Gewicht

$$g(J) = \frac{2J+1}{(2s+1)(2l+1)(2j+1)}. \tag{8.8.2}$$

Wie wir sahen, wird im Resonanzgebiet der Reaktionsquerschnitt durch die BREIT-WIGNER-Formeln ausgedrückt. Jeder Anregungsenergie des Compoundkerns entspricht ein Zustand mit definiertem Drehimpuls und definierter Parität. Die Parameter ε_r, Γ_e und Γ_r, welche in die BREIT-WIGNER-Formeln eingehen, werden durch den Zustand des Compoundkerns bestimmt und können sich nur für Zustände mit unterschiedlichen Werten von J und der Parität unterscheiden. Die BREIT-WIGNER-Formel für den Reaktionsquerschnitt muß deshalb bei Berücksichtigung von Kernspin und Nukleonenspin die Form

$$\sigma_r = g(J)\frac{\pi}{k^2}\frac{\Gamma_e \Gamma_r}{(\varepsilon-\varepsilon_r)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}, \qquad \Gamma = \Gamma_e + \Gamma_r \tag{8.8.3}$$

für jeden solchen Zustand besitzen. Bei der Berechnung des Streuquerschnitts muß beachtet werden, daß die Amplitude der Potentialstreuung (äußeren Streuung) praktisch nicht vom Kanalspin abhängt; man kann deshalb schreiben

$$\sigma_e = 4\pi g(J)\left|\frac{\frac{\Gamma_e}{2}}{k\left(\varepsilon - \varepsilon_r + i\frac{\Gamma}{2}\right)} + A_{\text{pot}}\right|^2 + 4\pi[1-g(J)]\,|A_{\text{pot}}|^2, \tag{8.8.4}$$

wobei A_{pot} durch (8.6.12) definiert ist. Der zweite Summand in (8.8.4) ist der Beitrag der Potentialstreuung aus allen Kanälen, deren Spin verschieden von J ist ($l = 0$).

Für Kerne mit dem Spin 0 ist bei $l = 0$ der Faktor $g(J) = 1$, für Kerne mit großem Spin ist $g \approx {}^1/_2$.

Bezeichnet man den Maximalwert des Streu- und des Reaktionsquerschnitts an den Resonanzstellen mit σ_{e0} bzw. σ_{r0}, so kann man unter Vernachlässigung des Beitrags der Potentialstreuung schreiben

$$\sigma_{r0} = \frac{4\pi}{k^2} g(J)\frac{\Gamma_e\Gamma_r}{\Gamma^2}, \qquad \sigma_{e0} = \frac{4\pi}{k^2} g(J)\frac{\Gamma_e^2}{\Gamma^2}.$$

Der Maximalwert des totalen Querschnitts an der Resonanzstelle ist dann

$$\sigma_0 = \sigma_{r0} + \sigma_{e0} = \frac{4\pi}{k^2} g(J) \frac{\Gamma_e}{\Gamma}. \tag{8.8.5}$$

Der Gesamtquerschnitt $\sigma_t = \sigma_r + \sigma_e$ wird beim Durchgang von Nukleonen durch Materie gemessen. Besonders oft werden solche Messungen mit Neutronen durchgeführt, da hierbei die Erscheinungen nicht durch den Einfluß der COULOMB-Wechselwirkung kompliziert werden.

In der Praxis wird die Bestimmung der Niveauparameter stark durch die Wärmebewegung der Targetkerne (DOPPLER-Effekt) und durch das endliche Auflösungsvermögen der angewendeten Apparatur erschwert.

Betrachten wir kurz den Einfluß des DOPPLER-Effekts [8,10]. In den BREIT-WIGNER-Formeln hat man unter ε die Energie der Relativbewegung von Nukleon und Targetkern zu verstehen. Wenn die Nukleonen im Laborsystem die streng konstante Geschwindigkeit $\mathfrak{V}$ besitzen und die thermische Geschwindigkeit des Kerns $\mathfrak{u}$ ist, so gilt

$$\varepsilon = \frac{\mu(\mathfrak{V} - \mathfrak{u})^2}{2}, \tag{8.8.6}$$

wobei $\mu = \frac{MA}{A+1}$ die reduzierte Masse ist. Bis auf Glieder genau, welche die Geschwindigkeit der Wärmebewegung quadratisch enthalten, kann man schreiben

$$\varepsilon = \frac{\mu V^2}{2} - \mu \mathfrak{V} \mathfrak{u}.$$

Wenn wir die Bezeichnung $\varepsilon_n = \frac{\mu V^2}{2}$ einführen, folgt schließlich

$$\varepsilon = \varepsilon_n - \sqrt{2\mu \varepsilon_n}\, u, \tag{8.8.7}$$

wobei u die Geschwindigkeitskomponente der Wärmebewegung in Richtung des Flusses der einfallenden Nukleonen ist.

Wir wollen annehmen, daß die Geschwindigkeitsverteilung der Targetkerne die gleiche ist wie die von Gasmolekülen:

$$f(u)\, du = \sqrt{\frac{MA}{2\pi k T}} \exp\left\{-\frac{M A u^2}{2 k T}\right\} du.$$

Dann wird wegen (8.8.6) und (8.8.7) die Verteilung der Geschwindigkeiten der Relativbewegung durch den Ausdruck

$$f(\varepsilon)\, d\varepsilon = -\frac{1}{D\sqrt{\pi}} \exp\left\{-\left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_n}{D}\right)^2\right\} d\varepsilon \tag{8.8.8}$$

bestimmt. Hierbei ist $D = 2\sqrt{\frac{\varepsilon_n k T}{A+1}}$ die sogenannte DOPPLER-*Breite*. Bei $A = 100$, $\varepsilon_n = 100$ eV und $k T = 0{,}025$ eV beträgt die DOPPLER-Breite z. B. 0,31 eV.

Wir schreiben den Reaktionsquerschnitt in der Nähe der Resonanzenergie ε_r in der Form

$$\sigma_r(\varepsilon) = \frac{\sigma_{r0}}{1 + \frac{4(\varepsilon - \varepsilon_r)^2}{\Gamma^2}}, \tag{8.8.9}$$

wobei $\sigma_{r0} = \frac{4\pi}{k^2} g \frac{\Gamma_e \Gamma_r}{\Gamma^2}$ ist. Um den im Experiment gemessenen Reaktionsquerschnitt als Funktion der Energie ε_n zu erhalten, muß man (8.8.9) über alle möglichen Werte der Relativenergie mitteln, d. h., (8.8.9) muß mit $f(\varepsilon)\, d\varepsilon$ multipliziert und über ε integriert werden. Wir erhalten dann

$$\sigma_r(\varepsilon_n) = \int_0^\infty \sigma_r(\varepsilon)\, f(\varepsilon)\, d\varepsilon = \sigma_{r0}\, \Psi\left(\frac{D}{\Gamma}, \xi\right), \tag{8.8.10}$$

wobei $\xi = 2(\varepsilon_n - \varepsilon_r)/\Gamma$ die Abweichung von der Resonanz in Einheiten $\Gamma/2$ ist;

$$\Psi\left(\frac{D}{\Gamma}, \xi\right) = \frac{\Gamma}{2\sqrt{\pi} D} \int \frac{\exp\left\{-\frac{\Gamma^2(\xi - x)^2}{4D^2}\right\}}{1 + x^2} dx \tag{8.8.11}$$

stellt eine Funktion dar, die in der Dispersionstheorie ausführlich untersucht wurde [8,11]. Sie besitzt ein Maximum an der Stelle $\xi = 2(\varepsilon_n - \varepsilon_r)/\Gamma = 0$,

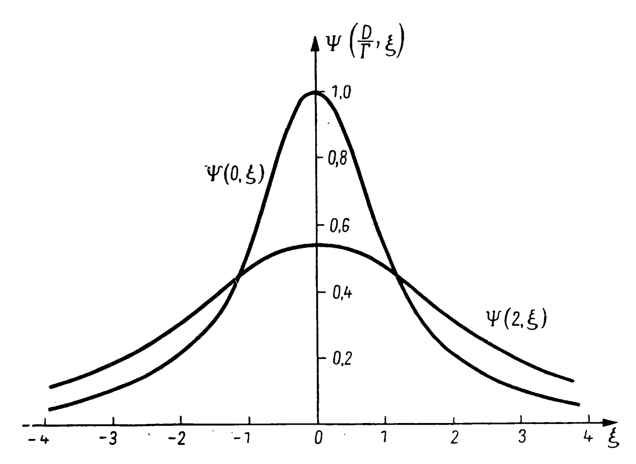


Abb. 60. Kurven für die DOPPLER-Verbreitung der Reaktionsquerschnitte

d. h., sie nimmt ihren Maximalwert an, wenn die Energie der Nukleonen gleich der Resonanzenergie ist. Ist die DOPPLER-Breite gleich Null, so gilt

$$\Psi(0, \xi) = (1 + \xi^2)^{-1},$$

und der Querschnitt (8.8.10) fällt mit (8.8.9) zusammen, wie es auch zu erwarten war. Alle Kurven $\Psi(D/\Gamma, \xi)$ für Werte $D/\Gamma \neq 0$ schneiden die Kurve $\Psi(0, \xi)$ in der Umgebung der Punkte $\xi = \pm 1$ (Abb. 60); innerhalb

dieses Gebietes liegen sie unterhalb dieser Kurve, außerhalb des Gebietes über ihr; in großen Entfernungen gehen sie asymptotisch gegen sie. Die Resonanzbreite der Kurve $\Psi(D/\Gamma, \xi)$ wächst mit zunehmendem D/Γ. Die Funktion $\Psi(D/\Gamma, \xi)$, welche die Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts von der Energie bestimmt, geht in folgenden Grenzfällen in einfache Funktionen über:

a) In großer Entfernung von der Resonanz, wenn also $|\xi| \gg D/\Gamma$, d. h. $|\varepsilon_n - \varepsilon_r| \gg D$ ist, fällt $\Psi(D/\Gamma, \xi)$ mit $\Psi(0, \xi)$ zusammen. Auf Energiegebiete, die weit entfernt von der Resonanz liegen, hat folglich die Wärmebewegung nur geringen Einfluß.

b) Wenn $|\xi| \ll D/\Gamma$ und $D > \Gamma$ ist, d. h., wenn die natürliche Breite Γ klein gegen die Doppler-Breite ist und sich die Nukleonenenergie wenig von der Resonanzenergie unterscheidet, ist

$$\Psi\left(\frac{D}{\Gamma}, \xi\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma}{D} \exp\left\{-\left[\frac{\Gamma(\varepsilon_n - \varepsilon_r)}{D}\right]^2\right\}.$$

An der Resonanzstelle haben wir

$$\Psi\left(\frac{D}{\Gamma}, 0\right) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma}{2D} e^{-\Gamma^2/4D^2}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\Gamma/2D} e^{-x^2} dx\right).$$

Bei $\Gamma \gg D$ ist $\Psi(D/\Gamma, 0) \approx 1$. Der Querschnitt an der Resonanzstelle wird durch die Wärmebewegung praktisch nicht verringert. Bei $\Gamma \ll D$ ist $\Psi(D/\Gamma, 0) \approx \sqrt{\pi}/2 \cdot \Gamma/D$, und der Querschnitt an der Resonanzstelle wird wegen der Doppler-Verbreiterung stark verringert. Da jedoch

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Psi\left(\frac{D}{\Gamma}, x\right) dx = \pi$$

gilt, wird die Fläche, die durch die Resonanzkurve begrenzt wird, durch die Wärmebewegung der Targetkerne nicht verändert.

Von Lamb [8,12] wurde folgendes gezeigt: Betrachtet man den festen Körper nach dem Debyeschen Modell, so behalten alle angeführten Formeln für die Berücksichtigung der Wärmebewegung ihre Gültigkeit, wenn entweder die natürliche oder die Doppler-Breite groß gegen das Produkt der Debye-Temperatur und der Boltzmann-Konstanten k ist. Es ist nur notwendig, die Doppler-Breite aus der Formel $D = 2\sqrt{\varepsilon_n Q}$ zu berechnen, wobei Q die mittlere Energie je Schwingungsfreiheitsgrad ist.

Wir wollen noch kurz auf die Meßmethoden für die verschiedenen Größen eingehen, welche die Resonanzreaktion charakterisieren. Am häufigsten wird der Wirkungsquerschnitt dadurch bestimmt, daß man die Schwächung eines Nukleonenbündels beim Durchgang durch Proben bestimmter Dicke mißt. Mit solchen Experimenten kann man den totalen Wirkungsquerschnitt $\sigma_t = \sigma_r + \sigma_e$ finden, d. h. die Summe der Querschnitte aller Prozesse, als deren Ergebnis Neutronen aus dem Bündel entfernt werden. Bei diesen Versuchen wird unmittelbar das Verhältnis der Intensität I des Neutronen-

stroms nach dem Durchgang durch die Probe zur Intensität I_0 des Neutronenstroms ohne Probe gemessen. Dieses Verhältnis heißt *Durchlaßgrad* und ist mit dem Wirkungsquerschnitt σ_t durch die Beziehung

$$T = \frac{I}{I_0} = \exp(-n\,\sigma_t\,d)$$

verknüpft, wobei mit n die Zahl der Atome in 1 cm³ der Probe bezeichnet wird.

Da auch ein Teil der gestreuten Nukleonen auf den Detektor gelangt, mit dem die Intensität des Nukleonenstrahls nach dem Durchgang durch die Probe gemessen wird, muß eine entsprechende Korrektion eingeführt werden, um den tatsächlichen Wert von σ_t zu erhalten. Ist diese Korrektion klein, so sagt man, daß der Versuch bei „guter Geometrie" durchgeführt wurde, ist sie groß, so sagt man, das Experiment wurde bei „schlechter Geometrie" ausgeführt.

Der Durchlaßgrad ist eine Funktion der Neutronenenergie. Er nimmt seinen Minimalwert an der Resonanzstelle an ($\varepsilon = \varepsilon_r$) und geht außerhalb der Resonanz gegen Eins (wenn eine Korrektion für die Potentialstreuung eingeführt wird).

Wenn man die Größe $T(\varepsilon)$ mit unendlich großer Auflösung messen könnte, so bekäme man die Energieabhängigkeit von σ_t; man könnte z. B. den Wert von σ_t an der Resonanzstelle (wir bezeichneten diesen Wert oben mit σ_0) und auch die Gesamtbreite Γ bestimmen. Aber selbst in diesem idealen Fall würde die Aufspaltung der Gesamtbreite Γ in Γ_e, Γ_γ und andere Partialbreiten zusätzliche Messungen oder Voraussetzungen erfordern, da wir bei bekanntem Γ und σ_0 über (8.8.5) nur das Produkt $g\,\Gamma_e$ und nicht Γ_e selbst ermitteln können.

Wenn D klein gegen die Breite der Resonanzkurve ist, so kann man die Messungen mit dünnen Proben durchführen und nach Anbringung der entsprechenden Korrektionen für die Auflösung des Monochromators aus den Resonanzkurven die Grundcharakteristiken des gemessenen Resonanzniveaus bestimmen.

Um eine Korrektion für die Auflösung des Monochromators im Gebiet der Energie einführen zu können, muß man die Auflösungsfunktion $R(\varepsilon - \varepsilon')$ des Monochromators kennen. Diese Funktion genügt der Bedingung $\int R(\varepsilon - \varepsilon')\,d\varepsilon' = 1$. Den mit dem Gerät gemessenen Querschnitt $\overline{\sigma(\varepsilon)}$ erhält man dann aus dem tatsächlichen Querschnitt über die Beziehung

$$\overline{\sigma(\varepsilon)} = \int \sigma(\varepsilon')\,R(\varepsilon - \varepsilon')\,d\varepsilon'.$$

In den einfachsten Fällen, die eine analytische Behandlung zulassen, wird die Auflösungsfunktion $R(\varepsilon - \varepsilon')$ als Rechteck mit der Breite Ω oder als GAUSS-Funktion mit der Halbwertsbreite Ω dargestellt. Gibt man $R(\varepsilon - \varepsilon')$ in Form eines Rechtecks vor und ist

$$\sigma(\varepsilon) = \frac{\sigma_0}{1 + \frac{4}{\Gamma^2}(\varepsilon - \varepsilon_r)^2}, \qquad \sigma_0 = \frac{\pi}{k^2}\,g\,\frac{\Gamma_e}{\Gamma}, \tag{8.8.12}$$

so erhält man bei Vernachlässigung der schwachen Energieabhängigkeit von σ_0 nach (8.8.12) folgenden Ausdruck für $\overline{\sigma(\varepsilon)}$:

$$\overline{\sigma(\varepsilon)} = \frac{\sigma_0}{\Omega} \int\limits_{\varepsilon - \frac{\Omega}{2}}^{\varepsilon + \frac{\Omega}{2}} \left\{1 + \frac{4}{\Gamma^2}(\varepsilon' - \varepsilon_r)^2\right\}^{-1} d\varepsilon' =$$

$$= \frac{\sigma_0 \Gamma}{2\Omega} \left\{\arctan\left[\frac{2(\varepsilon - \varepsilon_r)}{\Gamma} + \frac{\Omega}{\Gamma}\right] - \arctan\left[\frac{2(\varepsilon - \varepsilon_r)}{\Gamma} - \frac{\Omega}{\Gamma}\right]\right\}.$$

Der Resonanzwert $\overline{\sigma(\varepsilon_r)}$ ist folglich[1])

$$\sigma(\varepsilon_r) = \frac{\sigma_0 \Gamma}{\Omega} \arctan\frac{\Omega}{\Gamma} \approx \begin{cases} \sigma_0\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right)^3\right] & \text{für } \frac{\Omega}{\Gamma} \ll 1, \\ \sigma_0 \frac{\Gamma}{\Omega}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\Gamma}{\Omega}\right) & \text{für } \frac{\Gamma}{\Omega} \ll 1. \end{cases} \tag{8.8.13}$$

Der Wirkungsquerschnitt wird somit wegen der endlichen Auflösung des Gerätes an der Resonanzstelle vermindert. Besonders groß ist diese Verminderung bei $\Gamma \ll \Omega$. Für $\Gamma < \Omega/10$ ist es praktisch unmöglich, „dünne“ Proben zu benutzen, da das Neutronenbündel nur sehr wenig geschwächt wird. Die Verkleinerung des Querschnitts an der Resonanzstelle hängt mit der Verbreiterung der Resonanzkurve $\overline{\sigma(\varepsilon)}$ zusammen. Dabei ist wesentlich, daß die Fläche unter der Resonanzkurve nicht von der Auflösung des Gerätes abhängt:

$$\int \overline{\sigma(\varepsilon)}\, d\varepsilon = \int \sigma(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{\pi \sigma_0}{2} \Gamma.$$

Wenn das Auflösungsvermögen der Geräte Experimente mit dünnen Proben nicht zuläßt, sondern große Korrektionen erfordert, wird zur Messung der Resonanzparameter oft die sogenannte Flächenmethode benutzt. Diese Methode erfordert keinerlei Korrektionen für die Doppler-Verbreiterung und die Auflösung des Gerätes. Sie gestattet jedoch nur, das Produkt $\sigma_0 \Gamma$ zu bestimmen. Die Flächenmethode wurde in den Arbeiten [8,13] untersucht.

Bei Messungen mit „dicken“ Proben ist bei guter Auflösung der Durchlaßgrad

$$T(\varepsilon) = \exp - \left\{\frac{n \sigma_0 d}{1 + \frac{4}{\Gamma^2}(\varepsilon - \varepsilon_r)^2}\right\} \tag{8.8.14}$$

für einen großen Teil der Resonanzkurve nur wenig von Null verschieden. Deshalb sind Messungen des Durchlaßgrades nur in den Gebieten möglich, in denen die Resonanzkurve abfällt. So ist bei $n \sigma_0 d > 10$ $T(\varepsilon) \approx 0$, wenn $\frac{4}{\Gamma^2}(\varepsilon - \varepsilon_r)^2 < 1$ ist. Unter diesen Bedingungen kann man in Gebieten, für

---

[1]) Wir benutzen hier die asymptotischen Ausdrücke $\arctan x \approx x - \frac{x^3}{3}$ bei $x \ll 1$ und $\arctan x \approx \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x}$ bei $x \gg 1$.

die $T(\varepsilon) \neq 0$ ist, die 1 gegen $\frac{4}{\Gamma^2}(\varepsilon - \varepsilon_r)$ vernachlässigen und (8.8.14) in der Form

$$T(\varepsilon) \approx \exp\left\{-\frac{n\,\sigma_0\,\Gamma^2 d}{(\varepsilon - \varepsilon_r)^2}\right\} \quad \text{für} \quad |\varepsilon - \varepsilon_r| > \frac{\Gamma}{2} \tag{8.8.15}$$

schreiben. Die Energieabhängigkeit von $T(\varepsilon)$ gestattet in diesem Fall die Bestimmung von $\sigma_0\,\Gamma^2$, was zusammen mit dem Produkt $\sigma_0\,\Gamma$ aus den Messungen mit dünnen Proben σ_0 und Γ einzeln ergibt.

Bei schlechter Auflösung ($\Gamma \ll \Omega$) sind Messungen mit dünnen Proben wegen der starken Verkleinerung des Maximalwerts des Querschnitts an der Resonanzstelle überhaupt nicht möglich [vgl. (8.8.13)]. Es ist deshalb notwendig, Messungen mit dicken Proben durchzuführen. In diesem Fall muß man die Verzerrung des Durchlaßgrades (8.8.14) berücksichtigen, welche durch die Auflösungsfunktion des Gerätes hervorgerufen wird. Der gemessene Durchlaßgrad ist

$$\overline{T(\varepsilon)} = \int R(\varepsilon - \varepsilon')\exp\left\{-\frac{n\,\sigma_0\,\Gamma^2 d}{(\varepsilon' - \varepsilon_r)^2}\right\} d\varepsilon'. \tag{8.8.16}$$

Kennt man die Auflösungsfunktion des Meßgerätes, so kann man mit (8.8.16) die Größe $\overline{T(\varepsilon)}$ durch $\sigma_0\,\Gamma^2$ ausdrücken. Nach der Einführung entsprechender Korrektionen für die Auflösung der Geräte liefern somit die Messungen mit dicken Proben das Produkt $\sigma_0\,\Gamma^2$. Aus der Größe

$$\sigma_0\,\Gamma^2 = \frac{4\pi}{k^2}\,g\,\Gamma_e\,\Gamma$$

kann man Rückschlüsse auf $g\,\Gamma_e$ ziehen, wenn man bestimmte Voraussetzungen über Γ_γ benutzt, das im Gebiet kleiner Neutronenenergien zusammen mit Γ_e die Gesamtbreite bestimmt ($\Gamma = \Gamma_e + \Gamma_\gamma$). Benutzt man diesen Wert von Γ, so erhält man

$$\sigma_0\Gamma^2 = \frac{4\pi}{k^2}\,g(\Gamma_e\Gamma_\gamma + \Gamma_e^2)$$

oder

$$\Gamma_e = \frac{1}{2}\left\{\sqrt{\Gamma_\gamma^2 + \frac{k^2\,\sigma_0\,\Gamma^2}{\pi g}} - \Gamma_\gamma\right\}.$$

8.9. Mittelung der Reaktionsquerschnitte über die Resonanzen

Gut auflösbare Resonanzen treten bei der Wechselwirkung von Neutronen kleiner Energie mit leichten und mittleren Kernen auf. Bei der Streuung von Neutronen mit Energien über 10 keV an Kernen kleiner und mittlerer Massenzahlen überwiegt die Resonanzstreuung die Einfangreaktion. So ist z. B. bei einer Neutronenenergie von 1 MeV im Gebiet $A \approx 20$ die Breite der Resonanzstreuung Γ_e von der Größenordnung einiger 1000 eV, Γ_γ dagegen etwa gleich 5 eV. Bei wachsender Energie der einfallenden Neutronen werden außer den Reaktionen (n, n′), (n, γ) die Reaktionen (n, p) und (n, α) möglich.

Da Protonen und α-Teilchen den Potentialwall überwinden müssen, ist $\Gamma_e > \Gamma_{\mathrm{p}}, \Gamma_\alpha$. So besitzen z. B. bei Energien von 5 MeV die Wirkungsquerschnitte für den Kern ^{27}Al folgende Werte:

$$\sigma(\mathrm{n, n}) + \sigma(\mathrm{n, n'}) = 0{,}8 \text{ barn}, \quad \sigma(\mathrm{n, p}) = 0{,}03 \text{ barn},$$
$$\sigma(\mathrm{n}, \alpha) = 0{,}001 \text{ barn}, \quad \sigma(\mathrm{n}, \gamma) = 5 \cdot 10^{-5} \text{ barn}.$$

Für die schweren Kerne bestehen im Gebiet $\varepsilon < 100$ keV zwischen der Breite der Einfangreaktion Γ_γ, der Breite der elastischen und unelastischen Neutronenstreuung Γ_e, der Breite der Protonenemission Γ_{p} und der Breite für die Emission von α-Teilchen Γ_α folgende Ungleichungen:

$$\Gamma_\gamma > \Gamma_e > \Gamma_{\mathrm{p}}, \Gamma_\alpha.$$

Bei den schweren Kernen sind die Abstände zwischen den Niveaus des Compoundkerns, die beim Einfang von Neutronen mit Energien von mehr als einigen 10 keV angeregt werden, bereits so klein, daß es nicht möglich ist, die Resonanzen mit den gegenwärtig noch unzureichend monochromatischen Neutronenbündeln und wegen der DOPPLER-Verbreiterung der Niveaus aufzulösen (s. Abschn. 8.8.). Um die experimentellen Kurven mit den theoretischen vergleichen zu können, müssen die theoretischen Wirkungsquerschnitte über ein Energieintervall $\Delta\varepsilon$ gemittelt werden, das viele Resonanzen enthält.

Wir definieren den mittleren Wirkungsquerschnitt der Reaktion im Intervall $\Delta\varepsilon$ mit Hilfe der Formel

$$\langle\sigma_r\rangle = \frac{1}{\Delta\varepsilon} \int\limits_{\varepsilon - \frac{\Delta\varepsilon}{2}}^{\varepsilon + \frac{\Delta\varepsilon}{2}} \sigma_r(\varepsilon)\, d\varepsilon. \tag{8.9.1}$$

Da die Wirkungsquerschnitte im Gebiet der Resonanzenergien ε_{r_i} scharfe Maxima besitzen, spielen im Integral in Gl. (8.9.1) diejenigen Energien die Hauptrolle, die in der Umgebung von Resonanzniveaus liegen. In jedem dieser Gebiete wird der Reaktionsquerschnitt durch die Formel

$$\sigma_{r_i} = \frac{\pi}{k^2} \frac{\Gamma_{r_i} \Gamma_{e_i}}{(\varepsilon - \varepsilon_i)^2 + \frac{\Gamma_i^2}{4}}$$

gegeben. Man kann deshalb schreiben

$$\langle\sigma_r\rangle = \frac{\pi}{\Delta\varepsilon} \sum_{r_i} \int \frac{1}{k^2} \frac{\Gamma_{r_i} \Gamma_{e_i}}{(\varepsilon - \varepsilon_i)^2 + \frac{\Gamma_i^2}{4}}\, d\varepsilon.$$

Die Größen k, Γ_{r_i}, Γ_{e_i} ändern sich nur wenig mit der Energie. Man kann sie deshalb vor das Integralzeichen ziehen. Die Integrationsgrenzen können bei kleinem Γ (scharfes Maximum) auf $-\infty$ bis $+\infty$ erweitert werden.

Mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{a}$$

erhalten wir dann

$$\langle \sigma_r \rangle = \frac{2\pi^2 \overline{\Gamma_r}\, \overline{\Gamma_e}}{k^2 \overline{\Gamma}} \frac{\nu}{\Delta \varepsilon}.$$

Hierbei ist $\nu = \Delta\varepsilon/D$ die Anzahl der Resonanzen im Intervall $\Delta\varepsilon$; $\overline{\Gamma_r}$, $\overline{\Gamma_e}$ und $\overline{\Gamma}$ sind die Mittelwerte[1]) der entsprechenden Resonanzbreiten im Intervall $\Delta\varepsilon$. Endgültig erhalten wir, daß der über die Resonanzen gemittelte Reaktionsquerschnitt proportional der mittleren Niveaudichte des Compoundkerns ist:

$$\langle \sigma_r \rangle = \frac{2\pi^2 \Gamma_e \Gamma_r}{k^2 \Gamma D}. \tag{8.9.2}$$

Benutzt man den Näherungsausdruck (8.7.14) für Γ_e

$$\Gamma_e = \frac{2k D^*}{\pi K},$$

so ergibt sich

$$\langle \sigma_r \rangle = \frac{4\pi D^*}{k K D} \frac{\Gamma_r}{\Gamma}.$$

Bei großen Energien ist $\Gamma_r \approx \Gamma$; nimmt man weiterhin $D^* \approx D$ an, so erhält man

$$\langle \sigma_r \rangle = \frac{4\pi}{k K}, \tag{8.9.3}$$

was mit dem entsprechenden Ausdruck (8.7.7) übereinstimmt.

Der über die Resonanzen gemittelte Querschnitt entspricht also dem Querschnitt für die Streuung an einem kugelförmigen Potentialtopf. Die Tiefe dieses Topfes muß so gewählt sein, daß die innere Wellenzahl des Neutrons gleich K ist und die einfallende Neutronenwelle vollständig im Kern absorbiert wird.

Die Formel (8.9.2) läßt sich leicht auf den Fall $l \neq 0$ verallgemeinern. Dazu muß der maximal mögliche Wert des Querschnitts bei $l = 0$ in (8.9.2) durch den maximal möglichen Wert des Querschnitts für $l \neq 0$ ersetzt und die Größe D für Niveaus mit dem gegebenen l benutzt werden. Es ergibt sich

$$\langle \sigma_r^{(l)} \rangle = \frac{2\pi^2}{k^2} (2l + 1) \frac{\Gamma_e \Gamma_r}{\Gamma D_l}. \tag{8.9.4}$$

Den totalen Reaktionsquerschnitt (für alle l) erhält man durch Summation von (8.9.4) über alle $l \leq k d$:

$$\langle \sigma_r \rangle = \sum_l \langle \sigma_r^{(l)} \rangle = 2\pi^2 (d + \lambda)^2 \frac{\Gamma_e \Gamma_r}{\Gamma D}.$$

---

[1]) Da in diesem Abschnitt nur noch die Mittelwerte der Breiten benutzt werden, lassen wir den Querstrich in Zukunft fort.

Wir betrachten jetzt den speziellen Fall des Einfangs eines Neutrons mit dem Bahndrehimpuls $\hbar\, l$ mit nachfolgender Emission eines γ-Quants. Den Wirkungsquerschnitt dieser Reaktion werden wir kurz mit $\sigma^{(l)}(n, \gamma)$ bezeichnen. Man erhält ihn, wenn man (8.9.4) mit dem Quotienten Γ_γ/Γ_r multipliziert:

$$\langle\sigma^{(l)}(n, \gamma)\rangle = \frac{2\pi^2}{k^2}(2l+1)\frac{\Gamma_e \Gamma_\gamma}{\Gamma D_l}. \tag{8.9.5}$$

Wie wir schon am Anfang dieses Abschnitts bemerkten, ist bei der Streuung von Neutronen mit Energien über 10 keV an leichten und mittelschweren Kernen $\Gamma_e > \Gamma_\gamma$. Wenn die Breiten der anderen Reaktionen ebenfalls klein sind, so wird $\Gamma \approx \Gamma_e$, und der über die Resonanzen gemittelte Einfangquerschnitt nimmt die Form

$$\langle\sigma^{(l)}(n, \gamma)\rangle = \frac{2\pi^2}{k^2}(2l+1)\frac{\Gamma_\gamma}{D_l} \tag{8.9.6}$$

an. Wenn an der Reaktion nur Neutronen mit $l = 0$ beteiligt sind, wird

$$\langle\sigma^{(0)}(n, \gamma)\rangle = \frac{2\pi^2}{k^2}\frac{\Gamma_\gamma}{D_0}. \tag{8.9.7}$$

Der Einfangquerschnitt ist somit umgekehrt proportional zur Energie der Relativbewegung: $\langle\sigma^{(0)}(n, \gamma)\rangle \sim 1/\varepsilon$. Dieses Gesetz wird durch die experimentellen Werte über den Einfang von Neutronen bis zu Energien von 1 MeV bestätigt [8,14]. Bei weiterer Erhöhung der Energie geben auch Werte mit $l \neq 0$ einen Beitrag zum Gesamtquerschnitt des Neutroneneinfangs. Außerdem muß die Energieabhängigkeit des mittleren Niveauabstands D berücksichtigt werden; all dies führt zu einem langsameren Abnehmen des Querschnitts mit der Energie als $1/\varepsilon$. Den Effekt der größeren Werte von l kann man dadurch berücksichtigen, daß man (8.9.6) über alle $l \leq k\, d$ summiert. Es wird dann

$$\langle\sigma(n, \gamma)\rangle = 2\pi^2(d + \lambda\!\!\!^{-})^2\frac{\Gamma_\gamma}{D} \tag{8.9.8}$$

mit $D = \overline{D_l}$. Für $\lambda\!\!\!^{-} \gg d$ geht Gl. (8.9.8) in (8.9.7) über. Die Formel (8.9.7) gibt den über die Resonanzen gemittelten Wirkungsquerschnitt des Neutroneneinfangs als Funktion der Einfangbreite Γ_γ und des mittleren Niveauabstands D des Compoundkerns bei gegebener Anregung wieder.

Die Einfangbreite ist für Elemente mit $A > 100$ recht gut bekannt. Sie beträgt $\Gamma_\gamma \approx 0{,}1$ eV. Bei Verminderung der Massenzahl A auf $A = 20$ wächst Γ_γ bis auf einige eV an. Die Abb. 61, die der Arbeit [8,15] entnommen wurde, gibt eine Vorstellung von der Abhängigkeit der Einfangbreite von A. Unter Benutzung

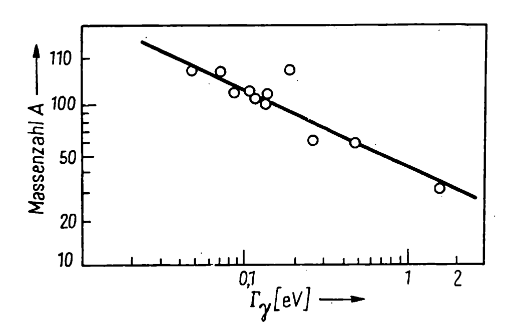


Abb. 61. Abhängigkeit der Strahlungsbreite von der Massenzahl

Die experimentellen Werte sind als Kreise eingezeichnet

dieser Werte von Γ_γ und der gemessenen Werte $\langle\sigma(n, \gamma)\rangle$ kann man mit Hilfe von (8.9.7) den mittleren Abstand D_0 zwischen den Niveaus bestimmen, die von den s-Neutronen im Compoundkern angeregt werden. In Tab. 27 sind einige Werte von D_0 angeführt, die aus den experimentellen Werten von $\langle\sigma(n, \gamma)\rangle$ für die Neutronenenergie 1 MeV berechnet wurden [8,14].

Tabelle 27

Werte von D_0 für einige Kerne

Nuklid	Spin	σ_{therm} [barn]	σ(1 MeV) [mbarn]	$E_r = \varepsilon_r + E_0$	D_0 [eV]
^{23}Na	$^3/_2$	0,49	0,26	7,39	$4{,}8 \cdot 10^4$
^{26}Mg	0	0,049	0,6	6,61	$1{,}7 \cdot 10^4$
^{27}Al	$^5/_2$	0,215	0,37	8,3	$2{,}5 \cdot 10^4$
^{40}Ar	0	1,2	0,93	7,22	$4{,}4 \cdot 10^3$
^{41}K	$^3/_2$	1,0	2,9	8,27	$1{,}3 \cdot 10^3$
^{48}Ca	0	1,1	1,9	5,39	$1{,}5 \cdot 10^3$
^{64}Ni	0	2,6	5,1	7,34	$2{,}9 \cdot 10^2$
^{63}Cu	$^3/_2$	4,0	11,4	8,74	$1{,}3 \cdot 10^2$
^{107}Ag	$^1/_2$	32	85	8,41	6
^{115}In	$^9/_2$	52	57	8,09	1,9
^{127}J	$^5/_2$	6,7	105	8,33	3,3
^{136}Xe	0	0,15	1	5,69	$3{,}02 \cdot 10^2$
^{138}Ba	0	0,5	2,3	6,26	$1{,}35 \cdot 10^2$
^{139}La	$^7/_2$	8,4	5,0	6,55	63
^{140}Ce	0	0,27	5,4	6,85	52
^{204}Hg	0	0,43	102	7,19	1,26
^{208}Pb	0	0,0006	2,0	5,06	61
^{209}Bi	$^9/_2$	0,017	3,4	5,27	35

Es ist interessant, diese experimentellen Daten mit den Aussagen der statistischen Theorie über den mittleren Niveauabstand zu vergleichen. Nach der statistischen Theorie kann die Niveaudichte oder die mittlere Anzahl von Niveaus im Energieintervall 1 MeV (gleich $10^6/D_0$) durch die Gleichung [s. Gl. (4.11.6)]

$$\frac{10^6}{D_0} = C \exp\left(2\sqrt{\beta E^*}\right) \tag{8.9.9}$$

ausgedrückt werden, wobei E^* die Anregungsenergie des Kerns ist. Die Parameter β und C hängen von der Massenzahl des Kerns ab. In Abb. 62,

Tabelle 28

Werte der Parameter β und C, die den mittleren Niveauabstand angeregter Kerne bestimmen

A	27	63	115	181	231
β [MeV^{-1}]	0,45	2	8	10	12
C [MeV^{-1}]	0,5	0,3	0,02	0,01	0,005

die der Arbeit [8,14] entnommen wurde, ist D_0 in Abhängigkeit von A nach Gl. (8.9.9) dargestellt, wobei die Parameterwerte von Tab. 28 benutzt wurden.

Die nach Gl. (8.9.7) berechneten Werte von D_0 sind in Abb. 62 für die nichtmagischen Kerne mit geradem A durch Kreise und für die nichtmagischen Kerne mit ungeradem A durch Kreuze dargestellt. Wie in der Arbeit [8,14] bemerkt wird, unterscheiden sich die Werte von D_0 für Kerne mit dem Spin $^9/_2$ und $^7/_2$ wenig von den entsprechenden Werten von D_0 für benachbarte Kerne mit kleineren Spins.

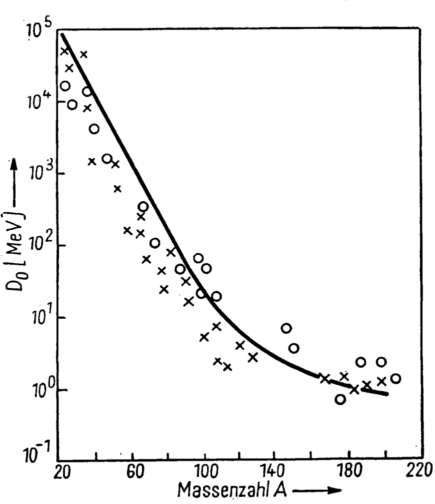


Abb. 62. Abhängigkeit des mittleren Niveauabstands von der Massenzahl

8.10.* Streumatrix für Resonanzreaktionen

In diesem Abschnitt werden wir eine strengere Theorie der Resonanzreaktionen darlegen. Wir werden speziell versuchen, die Bedingungen aufzuklären, bei denen die Bohrsche Hypothese gilt, daß der Zerfall des Compoundkerns unabhängig davon erfolgt, wie er gebildet wurde.

Der Einfachheit halber werden wir im weiteren annehmen, daß der im Ergebnis der Reaktion entstehende Compoundkern nur in 2 Teile zerfällt. In diesem Fall kann man den Begriff des Reaktionskanals benutzen, wie er im Abschn. 8.2. eingeführt wurde. Aufgabe der Theorie der Kernreaktionen ist die Berechnung der Streumatrix (oder des Reaktionsquerschnitts) für jeden Reaktionskanal.

Wegen der kleinen Reichweite der spezifischen Kernkräfte kann man den $3A$-dimensionalen Konfigurationsraum eines Systems von A Nukleonen für jeden Reaktionskanal in zwei Gebiete aufspalten, ein inneres und ein äußeres Gebiet. Als inneres Gebiet bezeichnen wir das Gebiet, das durch die von Wigner und Eisenbud [8,16] eingeführte Hyperkugel (σ) abgetrennt wird und in dem die spezifischen Kernkräfte zwischen allen Nukleonen in Erscheinung treten. Als äußeres Gebiet bezeichnen wir das Gebiet des Konfigurationsraums außerhalb der Hyperkugel σ, in dem zwischen den Reaktionsprodukten keine spezifischen Kernkräfte mehr wirken. Den Radius d dieser Hyperkugel werden wir *Kanalradius* nennen. Bei dieser Aufspaltung des Konfigurationsraums wird das Verhalten des Systems im äußeren Gebiet durch einen Hamilton-Operator bestimmt, der die Relativbewegung der Reaktionsprodukte in jedem Kanal beschreibt. Den Einfluß des komplizierten Verhaltens des Systems im inneren Gebiet auf das äußere Gebiet kann man durch Randbedingungen auf der Grenzfläche bestimmen.

Bewegungsintegrale für das System von A Nukleonen sind die Gesamtenergie E, die Parität, der Gesamtdrehimpuls J und seine Projektion M auf

eine ausgezeichnete Richtung. Wir betrachten einen stationären Zustand, der bestimmten Werten dieser Größen entspricht. Dieser Zustand wird durch eine Wellenfunktion beschrieben, welche der SCHRÖDINGER-Gleichung

$$H\Phi_{EJM} = E\Phi_{EJM} \tag{8.10.1}$$

genügt.

Die Lösungen der Gl. (8.10.1) für das innere bzw. das äußere Gebiet seien Φ^{I} bzw. Φ^{II}. Im äußeren Gebiet kann die Wellenfunktion Φ^{II} in der Form

$$\Phi^{\mathrm{II}}_{EJM} = \sum_{\alpha,l} \varphi_{\alpha l}(r_\alpha)\frac{1}{r_\alpha}\psi^{JM}_{\alpha l}(\ldots, r_i, \ldots) \tag{8.10.2}$$

geschrieben werden, wobei über alle Kanäle α der Reaktion zu summieren ist und sich die Summe über l in jedem Reaktionskanal über alle möglichen Werte der Quantenzahl des Bahndrehimpulses erstreckt. Für alle offenen Kanäle[1]), d. h. für alle Reaktionskanäle, die bei gegebener Anregungsenergie des Compoundkerns energetisch möglich sind, gilt

$$\psi^{JM}_{\alpha l}(r_i) = \sum_{m=-l}^{l}\sum_{m_j}(l\,j\,m\,m_j\,|\,J\,M)\,Y_{lm}\,\chi_{jm_j}. \tag{8.10.3}$$

Hierbei sind die $(l\,j\,m\,m_j\,|\,J\,M)$ die Vektoradditionskoeffizienten, Y_{lm} die Kugelfunktionen, welche die Emissionsrichtung der Reaktionsprodukte im Kanal α bestimmen, r_α der Relativabstand zwischen den Reaktionsprodukten, χ_{jm_j} die Wellenfunktionen der Spinzustände und der inneren Bewegung der Nukleonen in den getrennten Reaktionsprodukten und $\varphi_{\alpha l}(r_\alpha)$ die radialen Wellenfunktionen der Relativbewegung der Reaktionsprodukte im Kanal α. Die Funktionen $\varphi_{\alpha l}(r_\alpha)$ genügen der Wellengleichung

$$\left\{\frac{d^2}{dr_\alpha^2} + k_\alpha^2 - \frac{2\mu_\alpha}{\hbar^2}V_{\alpha l}\right\}\varphi_{\alpha l}(r_\alpha) = 0, \qquad r_\alpha > d, \tag{8.10.4}$$

wobei $k_\alpha^2 = 2\mu_\alpha\,\varepsilon_\alpha/\hbar^2$, ε_α die Energie der Relativbewegung, μ_α die reduzierte Masse im Kanal α und

$$V_{\alpha l} = \frac{l(l+1)}{r_\alpha^2} + \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r_\alpha}$$

das äußere Potential der COULOMB-Kräfte und der Zentrifugalkräfte sind.

---

[1]) Die Wellenfunktionen $\psi_{\alpha l}$ der geschlossenen Kanäle können beliebig gewählt werden. Es ist nur notwendig, daß sie zusammen mit den Funktionen $\psi_{\alpha l}$ der offenen Kanäle ein vollständiges Orthogonalsystem bilden. Zur Vereinfachung der Theorie werden in der Summe (8.10.2) die geschlossenen Kanäle meist weggelassen. Man nimmt dazu an, daß ihre Radien so groß sind, daß die Wellenfunktion Φ^{II} vollständig im inneren Gebiet liegt. Bei der Betrachtung von Niveauverschiebungen und bei der Untersuchung des Verhaltens der Querschnitte in der Nähe der Schwelle müssen jedoch in der Summe (8.10.2) auch die Kanäle berücksichtigt werden, die nahe bei der Schwelle liegen (s. [8,17]).

Die allgemeine Lösung der Gl. (8.10.4) kann als Linearkombination der beiden gut untersuchten[1]) linear unabhängigen Lösungen $F_{\alpha l}(\varrho)$ und $G_{\alpha l}(\varrho)$ dargestellt werden. F ist im Nullpunkt regulär, G irregulär, $\varrho = k_\alpha r_\alpha$. Zur Vereinfachung der Schreibweise werden wir im weiteren das Indexpaar αl durch den einen Index s ersetzen.

Bei der Untersuchung der Lösung der Gl. (8.10.1) im äußeren Gebiet werden uns die Werte der Funktionen $F_s(\varrho)$ und $G_s(\varrho)$ und die Werte ihrer Ableitungen nach ϱ (die wir durch einen Strich an der entsprechenden Funktion bezeichnen werden) auf der Fläche σ interessieren. Diese 4 Größen sind jedoch nicht alle linear unabhängig. Es besteht zwischen ihnen die einfache Beziehung

$$F_s' G_s - G_s' F_s = \text{const.}$$

Die Funktionen F und G werden meist so normiert, daß die Konstante gleich 1 ist. Es genügt also, auf der Fläche σ drei unabhängige Größen zu kennen. Als unabhängige Größen wählen wir den Real- und Imaginärteil der logarithmischen Ableitung der auf den Einheitsfluß normierten auslaufenden Wellen

$$\varphi_s = \sqrt{\frac{\mu_s}{\hbar k_s}}\,(G_s + i F_s)$$

auf der Fläche σ:[2])

$$\left\{\varrho_s \frac{\varphi_s'}{\varphi_s}\right\}_{\varrho_s = d_s k_s} = (\xi_s + i\,\zeta_s)\,d_s, \qquad (8.10.5)$$

---

[1]) Für Neutronen ist z. B. $F_l(\varrho) = \sqrt{\frac{\pi\varrho}{2}}\,J_{l+1/2}(\varrho)$, $G_l(\varrho) = -\sqrt{\frac{\pi\varrho}{2}}\,N_{l+1/2}(\varrho)$, wobei $J_{l+1/2}$ und $N_{l+1/2}$ die Bessel- bzw. Neumann-Funktionen vom Index $l + 1/2$ sind. Diese Funktionen zeigen folgendes asymptotisches Verhalten ($\varrho \to \infty$):

$$F_l(\varrho) \approx \sin\left(\varrho - \frac{l\pi}{2}\right), \qquad G(\varrho) \approx \cos\left(\varrho - \frac{l\pi}{2}\right).$$

Für geladene Teilchen besitzen die Funktionen $F_l(\varrho)$ und $G_l(\varrho)$ bei großen ϱ die asymptotische Form

$$F_l(\varrho) \approx \sin\left(\varrho - \frac{l\pi}{2} - \eta \ln 2\varrho + \sigma\right),$$

$$G_l(\varrho) \approx \cos\left(\varrho - \frac{l\pi}{2} - \eta \ln 2\varrho + \sigma\right),$$

wobei $\eta = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v}$ und $\sigma = \arg\Gamma(1 + l + i\eta)$ ist. Die Werte der Funktionen F und G und die Werte ihrer Ableitungen bei $\eta > 0$ sind in den Tabellen in [8,9] angegeben.

[2]) Für geladene Teilchen ist $\varphi_s = \sqrt{\frac{\mu_s}{\hbar k_s}}\,(G_s + i F_s)\,e^{-i\sigma_l}$, wobei σ_l die Coulomb-Phasenverschiebung ist, welche durch die reine Coulomb-Streuung bedingt wird. Sie ergibt sich aus der Beziehung $\exp(2i\,\sigma_l) = \frac{(l + i\eta)!}{(l - i\eta)!}$ mit $\eta = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v}$. Bei negativer Energie der Relativbewegung (geschlossener Kanal) wird φ durch die exponentiell abfallende Whittaker-Funktion $W_{-\eta,\,l+1/2}(2\varrho)$ beschrieben, wobei η mit dem oben definierten Wert zusammenfällt. Dann ist $\zeta = 0$ und $\xi = k\frac{W'}{W}$ (s. [8,18]).

und als dritte unabhängige Größe die Phase Ω_s, die durch die Bedingung

$$\left\{\frac{\varphi_s}{\varphi_s^*}\right\}_{\varrho_s=d_s k_s} = \exp\{2i\,\Omega_s\} \tag{8.10.6}$$

definiert wird; d_s ist der Radius des Kanals s. Die Größen ξ_s und ζ_s werden durch G_s und F_s über die einfachen Beziehungen

$$\left.\begin{aligned}\xi_s\,d_s &= \{\varrho_s\,P_s[F_s\,F_s' + G_s\,G_s']\}_{\varrho_s=k_s d_s},\\ \zeta_s\,d_s &= \{\varrho_s\,P_s\}_{\varrho_s=k_s d_s}\end{aligned}\right\} \tag{8.10.7}$$

ausgedrückt, wobei $P_s = (F_s^2 + G_s^2)^{-1}$ die in Abschn. 8.6. eingeführte Durchlässigkeit ist. Für Neutronen mit dem Bahndrehimpuls 0 ist $\xi_s = 0$, $\zeta_s = k_s$, $\Omega_s = k_s\,d_s$ und $P_s = 1$.

Auf der Oberfläche σ besitzt die Funktion φ_s die Form

$$\{\varphi_s\}_{r_s=d_s} = \sqrt{\frac{\mu_s}{\hbar\,k_s\,P_s}}\;\mathrm{e}^{i\Omega_s}. \tag{8.10.8}$$

Die Wellenfunktion (8.10.2) kann im äußeren Gebiet durch die auslaufenden Wellen φ_s und die einlaufenden Wellen φ_s^* aller Kanäle dargestellt werden:

$$\Phi^{\mathrm{II}} = \sum_s \Phi_s^{\mathrm{II}}.$$

Hierbei ist

$$\Phi_s^{\mathrm{II}} = (a_s\,\varphi_s^* - b_s\,\varphi_s)\,\frac{\psi_s}{r_s},$$

wobei die Funktionen ψ_s [s. Gl. (8.10.3)] auf der Oberfläche σ orthonormiert sind:

$$\int \psi_s^*\,\psi_{s'}\,d\sigma = \delta_{s s'}.$$

Mit dem Integralzeichen wird die Summation über die Spins des Kanals, die Integration über alle Winkelvariablen des Kanals s und die Integration über alle inneren Koordinaten (r_i) der Reaktionsprodukte bezeichnet. Die Amplitude b_s der auslaufenden Welle im Kanal s wird über die Streumatrix S durch die Amplituden der in allen Kanälen einlaufenden Wellen bestimmt:

$$b_s = \sum_{s'} S_{s s'}\,a_{s'}.$$

Wir wollen annehmen, daß $a_s = \delta_{st}$ ist, d. h., daß die Amplitude der einlaufenden Welle nur in einem (dem Eingangs-) Kanal t verschieden von Null ist. Dann besitzt die Wellenfunktion, welche die über den Kanal t hervorgerufene Reaktion im Kanal s beschreibt, die Form

$$\Phi_{st}^{\mathrm{II}} = (\varphi_s^*\,\delta_{st} - \varphi_s\,S_{st})\,\frac{\psi_s}{r_s}. \tag{8.10.9}$$

Werden am System nach dem Auseinanderfliegen der Reaktionsprodukte Messungen durchgeführt, so lassen sich deren Ergebnisse durch die Streumatrix S ausdrücken. Die S-Matrix beschreibt das asymptotische Verhalten der Wellenfunktionen und spiegelt nur teilweise die Eigenschaften der Wellenfunktionen im inneren Gebiet wider.

Um einen Zusammenhang zwischen der Streumatrix und den Eigenschaften der Wellenfunktionen im inneren Gebiet zu finden, führen wir nach [8,16] im inneren Gebiet ein vollständiges System orthonormierter Eigenfunktionen X_λ des Operators H ein, die den Grenzbedingungen

$$\int \psi_s \frac{d(r X_\lambda)}{dr}\, d\sigma \equiv \int \psi_s \left(X_\lambda + r \frac{d X_\lambda}{dr}\right) d\sigma = 0 \qquad (8.10.10)$$

genügen. Die Eigenfunktionen X_λ beschreiben keine realen Zustände des Compoundkerns, da sie keinen zerfallenden Zuständen entsprechen. Für einige Energien E jedoch, die in der Nähe von Resonanzen liegen, sind die Zustände des Compoundkerns fast als stationäre Zustände zu betrachten, wenn die Abstände zwischen den Resonanzniveaus groß gegen ihre Breite sind. In diesem Fall spiegeln die Funktionen X_λ, wenn auch sehr grob, die Eigenschaften realer Zustände wider.

Die Lösung von (8.10.1) für das innere Gebiet und eine Reaktion mit dem Eingangskanal t kann man in folgender Form darstellen:

$$\Phi_t^{\mathrm{I}} = \sum_\lambda C_{t\lambda} X_\lambda .$$

Zur Bestimmung der Koeffizienten $C_{t\lambda}$ benutzen wir, daß die Funktionen Φ_t^{I} und X_λ^* den Gleichungen $H \Phi_t^{\mathrm{I}} = E \Phi_t^{\mathrm{I}}$ und $H X_\lambda^* = E_1 X_\lambda^*$ genügen. Wird die erste dieser Gleichungen mit X_λ^* und die zweite mit Φ_t multipliziert und werden die beiden Gleichungen voneinander subtrahiert, so erhalten wir unter Berücksichtigung der Orthogonalität und Normierung der Funktionen

$$\int (X_\lambda^* H \Phi_t^{\mathrm{I}} - \Phi_t^{\mathrm{I}} H X_\lambda^*)\, d\tau = (E - E_\lambda)\, C_{t\lambda} .$$

Wir zerlegen die Funktion Φ_t^{I} in eine Summe von Funktionen $\Phi_t^{\mathrm{I}} = \sum_s \Phi_{st}^{\mathrm{I}}$ entsprechend der Zahl der Reaktionskanäle. Wird in jedem der Kanäle (in der Nähe des Kanaleingangs) der HAMILTON-Operator in der Form $H = H_s - \frac{\hbar^2}{2\mu_s} \Delta_s$ dargestellt und der GREENsche Satz benutzt, so kann man jedes Volumenintegral auf ein „Oberflächenintegral" zurückführen. Berücksichtigt man noch, daß H_s keinen Beitrag zum Oberflächenintegral liefert, so erhält man

$$-\int (X_\lambda^* H \Phi_t^{\mathrm{I}} - \Phi_t^{\mathrm{I}} H X_\lambda^*)\, d\tau = \sum_s \frac{\hbar}{2\mu_s} \int \left\{ r X_\lambda^* \frac{\partial (r \Phi_{st}^{\mathrm{I}})}{\partial r} - \Phi_{st}^{\mathrm{I}} \frac{\partial (r X_\lambda^*)}{\partial r} \right\} d\sigma .$$

Am Eingang jedes Kanals gilt $\{r \Phi_{st}^{\mathrm{I}}\}_\sigma = \varphi_s \psi_s$. Deshalb hat man unter Berücksichtigung von (8.10.10)

$$\int \Phi_{st}^{\mathrm{I}} \frac{\partial (r X_\lambda^*)}{\partial r}\, r\, d\sigma = \varphi_s \int \psi_s \frac{\partial (r X_\lambda)^*}{\partial r}\, d\sigma = 0 .$$

Es ist somit

$$\Phi_t^{\mathrm{I}} = \sum_{\lambda, s} \frac{\dfrac{\hbar^2}{2\mu_s} \displaystyle\int r X_\lambda^* \frac{\partial (r \Phi_{st}^{\mathrm{I}})}{\partial r}\, d\sigma}{E_\lambda - E} X_\lambda .$$

Werden beide Seiten dieser Gleichung mit $\psi_s^* r$ multipliziert und über σ integriert, so erhält man mit

$$\alpha_{st} = \frac{\hbar}{\sqrt{2\mu_s}} \int \Phi_{st}^{\mathrm{I}} \psi_s^* r \, d\sigma, \tag{8.10.11}$$

$$\beta_{st} = \frac{\hbar}{\sqrt{2\mu_s}} \int \psi_s^* \frac{\partial (r \Phi_{st}^{\mathrm{I}})}{\partial r} \, d\sigma, \tag{8.10.12}$$

$$\gamma_{\lambda s} = \frac{\hbar}{\sqrt{2\mu_s}} \int X_\lambda \psi_s^* r \, d\sigma \tag{8.10.13}$$

und der aus (8.10.12) folgenden Gleichung

$$\left\{ \frac{\partial (r \Phi_{st}^{\mathrm{I}})}{\partial r} \right\}_\sigma = \frac{\sqrt{2\mu_s}}{\hbar} \beta_{st} \psi_s \tag{8.10.14}$$

die Beziehung

$$\alpha_{st} = \sum_\lambda \sum_{s'} \frac{\gamma_{\lambda s'}^* \gamma_{\lambda s}}{E_\lambda - E} \beta_{s't}.$$

Wird die Bezeichnung

$$R_{ss'} = \sum_\lambda \frac{\gamma_{\lambda s} \gamma_{\lambda s'}^*}{E_\lambda - E} \tag{8.10.15}$$

eingeführt, so kann man schreiben

$$\alpha_{st} = \sum_{s'} R_{ss'} \beta_{s't} \tag{8.10.16}$$

oder, in Tensorschreibweise,

$$R = \sum_\lambda \frac{(\gamma_\lambda \times \gamma_\lambda)}{E_\lambda - E}, \tag{8.10.15a}$$

$$\alpha = R \beta. \tag{8.10.16a}$$

Mit dem Symbol $(a \times b)$ wird eine Matrix mit den Komponenten

$$(a \times b)_{ss'} = a_s b_{s'}$$

bezeichnet. Die in (8.10.11) bis (8.10.13) eingeführten Größen charakterisieren die Reaktion im Kanal s, die über den Kanal t hervorgerufen wurde. Die Matrix (8.10.15), die wir im weiteren *R-Matrix* oder *Hilfsmatrix* („derivative matrice“) nennen werden, besitzt die Dimension einer Länge und hängt von der Energie E sowie vom Gesamtdrehimpuls J ab. Über die Größen $\gamma_{\lambda s}$ und E_λ hängt sie ebenfalls von inneren Eigenschaften des Compoundkerns und den Randbedingungen für die Funktionen X_λ ab. Obwohl die Größen $\gamma_{\lambda s}$ und E_λ selbst nicht eindeutig bestimmt sind (wegen der Willkür bei der Wahl der Randbedingungen für die Funktionen X_λ), besitzen die Integralbeziehungen einen definierten physikalischen Sinn (z. B. Summenregel, Streumatrix u. a.) [8,8].

Die R-Matrix verknüpft in jedem Kanal den Wert der Wellenfunktion und ihrer Normalableitung auf der Fläche σ. Wir benutzen diese Beziehung, um die Streumatrix durch die R-Matrix auszudrücken. Werden die Wellen-

funktionen des äußeren und des inneren Gebietes am Eingang des Kanals s gleichgesetzt, so erhalten wir unter Berücksichtigung von (8.10.9) und

$$\{\Phi^{\mathrm{I}}_{st}\}_\sigma = \sqrt{\frac{2\mu_s}{\hbar^2}}\,\frac{\psi_s}{r_s}\,\alpha_{st}$$

die Gleichung

$$\sqrt{\frac{2\mu_s}{\hbar^2}}\,\alpha_{st} = (\delta_{st}\,\varphi_s^* - S_{st}\,\varphi_s)\,. \tag{8.10.17}$$

Wir benutzen die Gleichungen (8.10.16) und (8.10.8) und führen die Diagonal- („Potential"-) Matrizen

$$\omega_{st} = \delta_{st}\,\mathrm{e}^{-i\Omega_s}, \tag{8.10.18}$$

$$A_{st} = \delta_{st}\sqrt{\frac{2k_s P_s}{\hbar}} \tag{8.10.19}$$

ein. Die Größen φ_s und P_s, die in obige Gleichungen eingehen, werden durch die Wellenfunktion der Relativbewegung der Reaktionsprodukte (8.10.8), die vom Potential V_s im Kanal s abhängt, bestimmt. Bei Berücksichtigung dieser Matrizen kann die Gl. (8.10.17) folgendermaßen umgeschrieben werden:

$$\omega_{st} - \sum_{s'} \omega_{ss'}^{-1}\,S_{s't} = \sum_{s',s''} A_{ss'}\,R_{s's''}\,\beta_{s''t} \tag{8.10.20}$$

oder kurz

$$\omega - \omega^{-1} S = A\,R\,\beta\,. \tag{8.10.20a}$$

Werden nun die Ableitungen der mit r multiplizierten Wellenfunktionen vom inneren und äußeren Gebiet in Richtung der Normalen zur Fläche σ gebildet [siehe Gl. (8.10.14) und (8.10.9)] und am Eingang des Kanals s gleichgesetzt, so erhalten wir

$$\sqrt{\frac{2\mu_s}{\hbar^2}}\,\beta_{st} = \delta_{st}\frac{\partial\varphi_s^*}{\partial r_s} - \frac{\partial\varphi_s}{\partial r_s}\,S_{st}\,.$$

Mit (8.10.5), (8.10.8), (8.10.18), (8.10.19) und der diagonalen „Potential"-matrix

$$B_{ss'} = \delta_{ss'}\sqrt{\frac{\hbar}{2k_s P_s}}\,(\xi_s - i\,\zeta_s) \tag{8.10.21}$$

erhalten wir die Matrizengleichung

$$\beta = \omega\,B - B^*\,\omega^{-1}\,S\,. \tag{8.10.22}$$

Setzt man (8.10.22) in (8.10.20a) ein, so erhält man nach einfachen Umformungen einen expliziten Ausdruck für die Streumatrix S in Abhängigkeit von der R-Matrix:

$$S = \omega\,\frac{1 - A\,R\,B}{1 - A\,R\,B^*}\,\omega\,. \tag{8.10.23}$$

In dem speziellen Fall der Reaktionen mit Neutronen, deren Bahndrehimpuls gleich Null ist, ergibt sich

$$A_{st} = \delta_{st}\sqrt{\frac{2k_s}{\hbar}}, \qquad B_{st} = -i\sqrt{\frac{\hbar k}{2}}\,\delta_{st}, \qquad \omega = \mathrm{e}^{-ik_s d_s}\,.$$

Setzt man (8.10.19) und (8.10.21) in (8.10.23) ein, so kann man S auf die Form

$$S = \omega V \omega \tag{8.10.24}$$

bringen, wobei ω die Bedeutung (8.10.18) besitzt und

$$V \equiv \frac{1 - A R B}{1 - A R B^*} = 1 + 2i \sqrt{\zeta_s}(1 - RL)^{-1} R \sqrt{\zeta_s} \tag{8.10.24a}$$

eine symmetrische unitäre Matrix ist. Die Symmetrie der Matrix V folgt aus der Symmetrie der Matrix S, die Unitarität ist unmittelbar einzusehen. Die Matrizen aus (8.10.24a) besitzen folgende Bedeutung:

$$\left.\begin{aligned} L_{ss'} &= \delta_{ss'}(\xi_s + i\zeta_s), \\ (\sqrt{\xi})_{ss'} &= \delta_{ss'} \sqrt{\zeta_s}. \end{aligned}\right\} \tag{8.10.25}$$

Die Gl. (8.10.24) verknüpft die Streumatrix mit der R-Matrix, die ihrerseits von der Wahl der Fläche σ und von den Randbedingungen für die Funktionen X_λ auf σ abhängt. Ungeachtet dessen hängt die Streumatrix selbst nicht von der Willkür in dieser Wahl ab.

Im Prinzip wird durch (8.10.24) die Streumatrix vollständig bestimmt. Die Formel ist jedoch für die praktische Benutzung unbequem, da sie die reziproke Matrix $(1 - R L)^{-1}$ enthält. Ein expliziter Ausdruck kann für die Streumatrix in einigen Grenzfällen erhalten werden, so z. B., wenn an der Reaktion nur ein oder zwei Kanäle beteiligt [8,19] oder wenn in der R-Matrix nur ein oder zwei Summanden wesentlich sind (dies gilt im Gebiet isolierter Resonanzen, wenn $E \approx E_\lambda$ und $\Gamma_\lambda \ll E_{\lambda+1} - E_\lambda$ sind).

Wir stellen die R-Matrix als Summe zweier Glieder dar:

$$R = R^1 + R^0, \tag{8.10.26}$$

wobei

$$R^1 = \sum_\lambda \frac{(\gamma_\lambda \times \gamma_\lambda)}{E_\lambda - E} \tag{8.10.27}$$

ist. Die Summe über λ enthält einen oder mehrere Summanden, deren Energieabhängigkeit noch wesentlich ist. R^0 berücksichtigt die praktisch energieunabhängigen Beiträge von den restlichen Niveaus. Im weiteren werden wir annehmen, daß R^0 eine Diagonalmatrix ist.

Bei dieser Aufspaltung der R-Matrix haben wir

$$(1 - R L)^{-1} R = (1 - R^0 L)^{-1} R^0 + (1 - R^0 L)^{-1} (1 - R^1 L^1)^{-1} R^1 (1 - L R^0)^{-1} \tag{8.10.28}$$

mit

$$L^1 = L(1 - R^0 L)^{-1}. \tag{8.10.29}$$

Zur Berechnung von $(1 - R^1 L^1)^{-1} R^1$ setzen wir

$$(1 - R^1 L^1)^{-1} R^1 = \sum_{\nu,\mu} A_{\nu\mu}(\gamma_\nu \times \gamma_\mu). \tag{8.10.30}$$

Werden beide Seiten dieser Gleichung mit

$$(1 - R^1 L^1) \equiv 1 - \sum_\lambda \frac{(\gamma_\lambda \times \gamma_\lambda) L^1}{E_\lambda - E}$$

multipliziert, so erhalten wir

$$\sum_{\lambda,\mu} \frac{(\gamma_\lambda \times \gamma_\lambda)\,\delta_{\mu\lambda}}{E_\lambda - E} = \sum_{\nu,\mu} A_{\nu\mu}(\gamma_\nu \times \gamma_\mu) - \sum_{\nu,\mu,\lambda} A_{\nu\mu} \frac{(\gamma_\lambda \times \gamma_\lambda)\,L^1(\gamma_\nu \times \gamma_\mu)}{E_\lambda - E}.$$

Benutzt man die Identitäten $(a \times b)\,L = (a \times b\,L)$ und $(a \times b)\,(c \times d) = (b\,c)\,(a \times d)$, so folgt

$$\sum_{\lambda,\mu} (\gamma_\lambda \times \gamma_\mu) \left\{ \frac{\delta_{\mu\lambda}}{E_\lambda - E} - A_{\lambda\mu} + \sum_\nu \frac{(\gamma_\lambda \gamma_\nu L^1)}{E_\lambda - E} A_{\nu\mu} \right\} = 0.$$

Diese Gleichung wird für alle λ, μ erfüllt, wenn

$$(E_\lambda - E)\,A_{\lambda\mu} - \sum_\nu \alpha_{\lambda\nu} A_{\nu\mu} = \delta_{\mu\lambda} \tag{8.10.31}$$

ist, wobei

$$\begin{aligned} \alpha_{\lambda\mu} \equiv (\gamma_\lambda \gamma_\nu L^1) &= \frac{\gamma_\lambda L(1 - R^0 L^*)\,\gamma_\nu}{(1 - R^0 L)(1 - R^0 L^*)} = \\ &= \beta_\lambda L(1 - R^0 L^*)\,\beta_\lambda^* = \Delta_{\lambda\nu} + i\,\frac{\Gamma_{\lambda\nu}}{2} \end{aligned} \tag{8.10.32}$$

gesetzt wurde. Bei der Ableitung der Beziehung (8.10.32) wurden die Ausdrücke (8.10.29) und (8.10.25) benutzt. Dabei ist

$$\Delta_{\lambda\mu} \equiv \beta_\lambda [\xi - R^0(\xi^2 + \zeta^2)]\,\beta_\mu^*, \tag{8.10.33}$$

$$\Gamma_{\lambda\nu} = 2(\beta_\lambda \zeta \beta_\nu^*) = 2 \sum_s \beta_{\lambda s} \zeta_s \beta_{\nu s}^*, \tag{8.10.34}$$

$$\beta_\lambda \equiv \frac{\gamma_\lambda}{1 - R^0 L} = \gamma_\lambda e^{i\delta} \tau \tag{8.10.35}$$

mit

$$\tau = \{(1 - R^0 \xi)^2 + (R^0 \zeta)^2\}^{1/2}\,|1 - R^0 L|^{-2}, \qquad \tan\delta = \frac{R^0 \zeta}{1 - R^0 \xi}.$$

Wird (8.10.30) in (8.10.28) eingesetzt und die Bezeichnung (8.10.35) benutzt, so erhalten wir

$$(1 - R\,L)^{-1} = (1 - R^0 L)^{-1} R^0 + \sum_{\nu,\mu} A_{\nu\mu} (\beta_\nu \times \beta_\mu). \tag{8.10.36}$$

Diesen Ausdruck setzen wir in (8.10.24a) ein und erhalten

$$V = 1 + 2i\,\zeta\,\tau\,e^{i\delta} R^0 + 2i \sum_{\nu,\mu} A_{\nu\mu} \sqrt{\zeta}\,(\beta_\nu \times \beta_\mu)\,\sqrt{\zeta}.$$

Wir nehmen jetzt an, daß die Energie E im Gebiet einer isolierten Resonanz E_λ liegt. Dann enthält R^1 in (8.10.27) nur ein Glied, und das Gleichungssystem (8.10.31) reduziert sich auf die eine Gleichung

$$A_{\lambda\lambda}(E_\lambda - E - \alpha_{\lambda\lambda}) = 1. \tag{8.10.37}$$

Setzen wir (8.10.37) in (8.10.36) ein, so erhalten wir einen expliziten Ausdruck für die symmetrische unitäre Matrix V im Gebiet der isolierten Resonanz:

$$V = 1 + 2i\,\zeta\,\tau\,e^{i\delta} R^0 + 2i\,\frac{\sqrt{\zeta}\,(\beta_\lambda' \times \beta_\lambda')\,\sqrt{\zeta}\,e^{2i\delta}}{E_\lambda' - E - i\,\frac{\Gamma_\lambda}{2}}, \tag{8.10.38}$$

wobei

$$\beta_\lambda = \beta'_\lambda e^{i\delta}, \qquad E'_\lambda = E_\lambda - \Delta_{\lambda\lambda}, \qquad \Gamma_\lambda \equiv \Gamma_{\lambda\lambda} \tag{8.10.39}$$

sind. Die durch Gl. (8.10.33) definierte Größe $\Delta_{\lambda\lambda}$ verschiebt also den Wert der Resonanzenergie.

Der Streuquerschnitt und der Reaktionsquerschnitt (im Eingangskanal t) können durch die Matrix V ausgedrückt werden:

$$\sigma_{st} = \frac{\pi}{k_t^2} g \left|(\omega V \omega - 1)_{st}\right|^2, \tag{8.10.40}$$

wobei g einen Faktor bedeutet, der von den Kanalspins und vom Gesamtspin des Systems abhängt, und ω eine Diagonalmatrix, die durch die Beziehung (8.10.18) definiert wird.

Wird (8.10.38) in (8.10.40) eingesetzt, so kann man den Streuquerschnitt in der Form

$$\sigma_{tt'} = 4\pi g \left|A_{\text{pot}}^{(t)} + A_{\text{res}}\right|^2 \tag{8.10.41}$$

darstellen, wobei

$$A_{\text{pot}}^{(t)} = \frac{1}{k_t} e^{i(\Omega_t - \delta)} \{e^{-i\delta} \sin \Omega_t - \zeta \tau R^0 e^{-i\Omega_t}\} \tag{8.10.42}$$

eine schwach veränderliche Funktion der Energie darstellt. Mit $A_{\text{pot}}^{(t)}$ wird die sogenannte Potentialstreuung bezeichnet, von der ein Teil von den restlichen Resonanzniveaus abhängt. Dieser Teil wird durch die Größen δ, τ und R^0 bestimmt. Wird $R^0 = 0$ gesetzt, so stimmt $A_{\text{pot}}^{(t)} = \frac{1}{k_t} e^{\Omega_t} \sin \Omega_t$ mit der im Abschn. 8.6. eingeführten Amplitude der Potentialstreuung [s. (8.6.12)] überein, die den Einfluß der restlichen Resonanzniveaus nicht berücksichtigt.

Die Amplitude der Resonanzstreuung nimmt bei Berücksichtigung von (8.10.34) die Form

$$A_{\text{res}}^{(t)} = \frac{1}{k_t} \frac{\frac{1}{2}\Gamma_{\lambda t}}{E - E'_\lambda + \frac{i}{2}\Gamma_\lambda}, \qquad \Gamma_{\lambda t} = 2\left|\beta_{\lambda t}\right|^2 \zeta_t \tag{8.10.43}$$

an. Berücksichtigt man

$$E - E'_\lambda = \varepsilon - \varepsilon_\lambda, \tag{8.10.44}$$

so fällt (8.10.43) mit (8.10.11) zusammen. Es bedeuten hierbei ε die Energie der Relativbewegung und ε_λ ihren Resonanzwert. Mit dem griechischen Buchstaben wird — wie auch im folgenden — die Nummer des Niveaus und mit dem lateinischen Buchstaben die Nummer des Kanals bezeichnet.

Das nichtdiagonale Element (8.10.40) liefert den Reaktionsquerschnitt. Wird (8.10.38) eingesetzt, so erhalten wir unter Berücksichtigung von (8.10.44) den Querschnitt für die Reaktion, die im Kanal s beim Eingangskanal t verläuft:

$$\sigma_{st} = \frac{\pi}{k_t^2} g \frac{\Gamma_{\lambda t}\Gamma_{\lambda s}}{(\varepsilon_\lambda - \varepsilon)^2 + \frac{1}{4}\Gamma_\lambda^2}. \tag{8.10.45}$$

Die Gl. (8.10.45) kann als Produkt zweier Faktoren geschrieben werden:

$$\sigma_{st} = \left\{\frac{\pi}{k_t^2}\, g \frac{\Gamma_{\lambda t}\,\Gamma_\lambda}{(\varepsilon_\lambda - \varepsilon)^2 + \frac{1}{4}\Gamma_\lambda}\right\}\left\{\frac{\Gamma_{\lambda s}}{\Gamma_\lambda}\right\}, \qquad (8.10.45\,\mathrm{a})$$

von denen man den ersten als Querschnitt für die Bildung des Compoundkerns über den Kanal t und den zweiten als Relativwahrscheinlichkeit für den Zerfall über den Kanal s interpretieren kann. *Im Gebiet einer isolierten Resonanz ist also die* BOHR*sche Annahme gültig, daß die Bildung des Compoundkerns und sein Zerfall über einen der Kanäle voneinander unabhängige Prozesse sind.*

Bei Energien in der Umgebung einer isolierten Resonanz ist in der R-Matrix nur der eine Summand $R^0 \approx 0$ wesentlich. Deshalb ist $\beta_\lambda = \gamma_\lambda$, und die Gesamtbreite des Niveaus wird

$$\Gamma_\lambda \equiv \Gamma_{\lambda\lambda} = 2\sum_s \zeta_s\,|\gamma_{\lambda s}|^2,$$

die Partialbreite im Kanal s

$$\Gamma_{\lambda s} = 2\zeta_s\,|\gamma_{\lambda s}|^2.$$

Wird (8.10.7a) berücksichtigt, so erhalten wir für Neutronen mit dem Bahndrehimpuls 0 den Wert $\Gamma_{\lambda s} = 2k_s\,|\gamma_{\lambda s}|^2$. Die Größe $|\gamma_{\lambda s}|^2$ wird *reduzierte Niveaubreite* des λ-ten Niveaus im Kanal s genannt (s. Abschn. 8.6.). Sie hängt nur von den inneren Eigenschaften des Compoundkerns ab und besitzt die Dimension Energie mal Länge.

Die Zerfallswahrscheinlichkeit des Zustandes λ des Compoundkerns über den Kanal s wird durch die Größe $\Gamma_{\lambda s}/\hbar$ bestimmt. Diese Wahrscheinlichkeit ist andererseits gleich dem gesamten Teilchenstrom durch eine Kugelfläche mit dem Radius d_s, d. h., es muß gelten

$$\frac{\Gamma_{\lambda s}}{\hbar} = \frac{\hbar}{2i\mu_s}\left\{\varphi_{\lambda s}^*\frac{\partial\varphi_{\lambda s}}{\partial r_s} - \varphi_{\lambda s}\frac{\partial\varphi_{\lambda s}^*}{\partial r_s}\right\}_{r_s=d_s},$$

wobei $\varphi_{\lambda s}$ die Wellenfunktion im Kanal s darstellt. Unter Benutzung von (8.10.5) und (8.10.7) haben wir

$$\Gamma_{\lambda s} = \frac{\hbar^2}{\mu_s}\zeta_s\,|\{\varphi_{\lambda s}\}_\sigma|^2 = \frac{\hbar^2 k_s}{\mu_s}P_s\,|\{\varphi_{\lambda s}\}_\sigma|^2.$$

Wenn die Zerfallswahrscheinlichkeit nicht allzu groß ist ($\Gamma_{\lambda s} \ll D$), so beschreibt X_λ den Zustand des Compoundkerns relativ gut. In diesem Fall ist $\{\varphi_{\lambda s}\}_\sigma = \int X_\lambda\,\psi_s^*\,r\,d\sigma$. Deshalb ist

$$\Gamma_{\lambda s} = 2k_s P_s\,|\gamma_{\lambda s}|^2, \quad \text{wobei} \quad \gamma_{\lambda s} = \frac{\hbar}{\sqrt{2\mu_s}}\int X_\lambda\,\psi_s^*\,r\,d\sigma$$

mit (8.10.13) zusammenfällt.

Die Formel (8.10.45a) zeigt also folgendes: Ist die Gesamtbreite Γ_λ klein gegen den mittleren Abstand zwischen den Niveaus, so werden in allen den Fällen, in denen die Anregungsenergie im Resonanzgebiet liegt, der Streuquerschnitt und der Reaktionsquerschnitt durch die BREIT-WIGNER-

Formel für isolierte Niveaus beschrieben. Der Reaktionsquerschnitt hängt in diesem Fall nicht von der Art und Weise der Bildung des Compoundkerns ab. Die BOHRsche Compoundkernhypothese, die wir im Abschn. 8.7. benutzten, bewährt sich also im Gebiet isolierter Resonanzen.

Wenn sich die Niveaus des Compoundkerns überlappen und wenn man die BETHEsche Annahme [8,20] benutzt, daß die Vorzeichen der $\gamma_{\lambda s}$ für verschiedene Niveaus überhaupt nicht korreliert sind, so ist bei $\mu \neq \nu$ ein Teil der Glieder der Summe (8.10.31) positiv und ein Teil negativ. Ist jedoch $\mu = \nu$, so sind alle Summanden positiv. Die nichtdiagonalen Koeffizienten $A_{\lambda\mu}$ sind folglich beträchtlich kleiner als die diagonalen Koeffizienten (etwa im Verhältnis $1 : N$, wobei N die Zahl der Kanäle ist). Werden die nichtdiagonalen Elemente in (8.10.31) vernachlässigt, so erhalten wir (8.10.37) als Näherungsgleichung für jedes Niveau E_λ. In diesem Fall ist der Reaktionsquerschnitt eine Summe von Gliedern der Form (8.10.45a) für jeweils ein Niveau:

$$\sigma_{st} = \frac{\pi}{k_t^2} g \sum_\lambda \frac{\Gamma_{\lambda t} \Gamma_\lambda}{(\varepsilon_\lambda - \varepsilon)^2 + \frac{1}{4}\Gamma_\lambda^2} \left\{\frac{\Gamma_{\lambda s}}{\Gamma_\lambda}\right\}. \tag{8.10.46}$$

Wird (8.10.46) bei $\overline{\Gamma_{\lambda t}} < D$ (und beliebigem $\overline{\Gamma_\lambda}/D$) über viele Niveaus gemittelt, so erhalten wir die im Abschn. 8.9. betrachteten Ergebnisse. Bei der Überlappung von Niveaus folgt also aus der BETHEschen Annahme, daß der über die Resonanzen gemittelte Absorptionsquerschnitt von der Größenordnung des Kernquerschnitts ist und daß man den Zerfall des Compoundkerns nur für die über die Resonanzen gemittelten Querschnitte als unabhängig von seiner Bildung betrachten kann.

Abschließend zu diesem Abschnitt zeigen wir noch, daß die Summe der reduzierten Breiten $\sum_s |\gamma_{\lambda s}|^2$ über alle Zustände s, die gleichen Reaktionsprodukten entsprechen, einen bestimmten Wert besitzt. Zur Berechnung dieses Wertes greifen wir auf die Definition von $\gamma_{\lambda s}$ zurück [s. (8.10.13)]:

$$\gamma_{\lambda s} = \frac{\hbar d_s}{\sqrt{2\mu_s}} \int X_\lambda \psi_s^* \, d\sigma. \tag{8.10.47}$$

Da uns nur diejenigen Kanäle s interessieren, die gleichen Reaktionsprodukten entsprechen, kann man $d_s = d$ und $\mu_s = \mu$ setzen.

Aus (8.10.47) folgt, daß auf der Fläche σ gilt

$$\frac{\hbar d}{\sqrt{2\mu}} \{X_\lambda\}_\sigma = \sum_s \gamma_{\lambda s} \psi_s. \tag{8.10.48}$$

Nimmt man das Quadrat des Betrags von beiden Seiten der Gl. (8.10.48) und integriert über σ, so erhält man die gesuchte Gleichung:

$$\frac{\hbar^2 d^2}{2\mu} \int |X_\lambda|^2 \, d\sigma = \sum_s |\gamma_{\lambda s}|^2. \tag{8.10.49}$$

Die linke Seite von (8.10.49) kann folgendermaßen abgeschätzt werden: Aus der Normierungsbedingung $\int |X_\lambda|^2 \, dV = 1$ folgt $|X_\lambda|^2 \approx \frac{1}{W^A}$, wobei

W eine Kugel vom Radius d darstellt. Deshalb gilt $\int |X_\lambda|^2 d\sigma \approx \frac{4\pi W^{A-1}}{W^A} \frac{3}{d^3}$. Dann geht (8.10.49) in die Gleichung

$$\sum_s |\gamma_{\lambda s}|^2 = \frac{3\hbar^2}{2\mu d} \tag{8.10.50}$$

über, welche die Bezeichnung *Summenregel der Dispersionstheorie von Kernreaktionen* trägt. Aus (8.10.50) kann man entnehmen, daß die reduzierte Partialbreite der Ungleichung

$$|\gamma_{\lambda s}|^2 \leqq \frac{3\hbar^2}{2\mu d}$$

genügen muß. Nach (8.10.50) spielt also die Größe $f_{\lambda s} \equiv \frac{2\gamma_{\lambda s}^2 \mu d}{3\hbar^2}$, welche die Gleichung $\sum_s f_{\lambda s} = 1$ erfüllt, für die Kernreaktionen eine ähnliche Rolle wie die Oszillatorstärken für die optischen Übergänge in der Atomphysik.

8.11.* Wirkungsquerschnitte beim Auftreten vieler Resonanzen

Wir benutzen die Ergebnisse des vorangehenden Abschnitts und betrachten etwas eingehender den Fall, daß in einem kleinen Energiegebiet viele Resonanzen des Compoundkerns vorhanden sind.

Nach (8.10.24) und (8.10.24a) kann das allgemeine Element der Streumatrix in der Form

$$S_{st} = e^{-i(\Omega_s + \Omega_t)} \left[\delta_{st} + 2i\sqrt{\zeta_s}\left(\frac{R}{1 - RL}\right)_{st} \sqrt{\zeta_t}\right] \tag{8.11.1}$$

geschrieben werden, wobei Ω_s und ζ_s durch die Gln. (8.10.6) und (8.10.7) definiert sind.

Wird die Bethesche Annahme einer statistisch gleichwahrscheinlichen Verteilung der Vorzeichen von γ_λ berücksichtigt, die wir bei der Ableitung von (8.10.46) benutzten, so kann man wegen (8.10.30) und (8.10.31) schreiben

$$\overline{R} \equiv \left(\frac{R}{1 - RL}\right) \approx \sum_\lambda \frac{(\gamma_\lambda \times \gamma_\lambda)}{\varepsilon_\lambda - \varepsilon - i\frac{\Gamma_\lambda}{2}}, \tag{8.11.2}$$

wobei gilt

$$\varepsilon_\lambda - \varepsilon \equiv E_\lambda - E - \Delta_{\lambda\lambda}.$$

Wie aus der allgemeinen Streutheorie bekannt ist, werden der Querschnitt der elastischen Streuung σ_e, der Reaktionsquerschnitt σ_r und der totale Querschnitt σ_t im Kanal s durch das Diagonalelement S_{ss} der Streumatrix ausgedrückt:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_e &= \frac{\pi}{k_s^2} g\,|1 - S_{ss}|^2, \\ \sigma_r &= \frac{\pi}{k_s^2} g(1 - |S_{ss}|^2), \\ \sigma_t &= \sigma_e + \sigma_r = \frac{2\pi}{k_s^2} g(1 - \Re\mathrm{e}\, S_{ss}). \end{aligned}\right\} \tag{8.11.3}$$

Der statistische Faktor ist $g = \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{1}{2J+1}\right)$, wobei J der Spin des Targetkerns ist. Für gg-Kerne ist $J = 0$ und $g = 1$, für Kerne mit großem Spin $g \approx {}^1/_2$.

Zur Berechnung von S_{ss} muß man die Diagonalelemente der Matrix (8.11.2) kennen. Wir gehen in der Gl. (8.11.2) von der Summation zur Integration über, wozu wir die Substitution

$$\sum_\lambda \to \int \frac{d\varepsilon_\lambda}{D_\lambda}$$

vornehmen, wobei D_λ den Abstand zwischen benachbarten Niveaus im Gebiet der λ-ten Resonanz bedeutet. Es wird

$$\left(\frac{R}{1-RL}\right)_{ss} \approx \overline{R}\left(\varepsilon + i\frac{\Gamma}{2}\right) = \int \frac{C_s(\varepsilon_\lambda)\, d\varepsilon_\lambda}{\varepsilon_\lambda - \varepsilon - i\frac{\Gamma}{2}}, \qquad (8.11.4)$$

wobei $\Gamma = \overline{\Gamma_\lambda}$ und $C_s(\varepsilon_\lambda) \equiv \left\langle \frac{|\gamma_{\lambda s}|^2}{D_\lambda} \right\rangle$ die sogenannte *Stärkefunktion* („strength function") [8,21] des Niveaus ε_λ sind, die bis auf den Faktor 4π mit dem *Anlagerungskoeffizienten* zusammenfällt, wie wir noch zeigen werden.

Die Gl. (8.11.4) besitzt die Form einer Dispersionsrelation und gestattet die Berechnung des Diagonalelements der $\overline{R}$-Matrix, wenn die Stärkefunktion für alle Energien bekannt ist. Wird

$$\lim_{\eta \to 0} \int \frac{\eta f(x)\, dx}{x^2 + \eta^2} = \pi f(0) \qquad (8.11.5)$$

berücksichtigt, so erhalten wir die zu (8.11.4) reziproke Relation

$$C_s(\varepsilon) = \lim_{\Gamma \to 0} \frac{1}{\pi} \mathfrak{Im}\left\{\overline{R}_{ss}\left(\varepsilon + i\frac{\Gamma}{2}\right)\right\}, \qquad (8.11.6)$$

die eine unmittelbare Berechnung der Stärkefunktion gestattet, wenn das Diagonalelement $\overline{R}_{ss}$ der $\overline{R}$-Matrix bekannt ist. Von allen Formeln für die Querschnitte (8.11.3), die experimentell bestimmt werden, ist nur die Formel für den totalen Streuquerschnitt σ_t linear in bezug auf das Element S_{ss} der Streumatrix und folglich auch in bezug auf $\overline{R}_{ss}$. Die anderen Querschnitte enthalten das Quadrat dieses Elements. Natürlich wird auch bei der Messung von σ_t unmittelbar nur $\mathfrak{Re}\, S_{ss}$ bestimmt. Zur Berechnung des Imaginärteils müssen notwendig zusätzliche Vorstellungen benutzt werden, die man aus der Analyse bestimmter Kernmodelle erhält.

Wie im Kap. 13 gezeigt werden wird, kann die Wechselwirkung langsamer Neutronen mit mittleren und schweren Kernen durch ein optisches Potential beschrieben werden:

$$V = \begin{cases} -V_0 - iW & \text{für} \quad r < d, \\ 0 & \text{für} \quad r > d. \end{cases}$$

In diesem Fall läßt sich für Neutronen der Energie ε und mit $l \approx 0$ die logarithmische Ableitung der Wellenfunktion auf der Kernoberfläche unmittelbar berechnen:

$$f = X \cot X$$

mit

$$X^2 = \frac{2\mu d^2}{\hbar^2}(\varepsilon + V_0 + iW).$$

Mit μ wird die reduzierte Masse von Neutron und Kern bezeichnet, mit d der Radius des Reaktionskanals.

Da laut Definition die R-Matrix die Wellenfunktion und ihre Normalableitung auf der Kernoberfläche in jedem Kanal verknüpft, kann man schreiben

$$\overline{R}_{ss} = \frac{d}{f} = d\,\frac{\tan X}{X}. \tag{8.11.7}$$

Wird die Beziehung

$$\frac{\tan X}{X} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi^2\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2 - X^2}$$

benutzt, so können wir (8.11.7) in der Form

$$\overline{R}_{ss} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{\hbar^2}{\mu d}}{\varepsilon_n - \varepsilon - iW} \tag{8.11.7a}$$

schreiben, wobei

$$\varepsilon_n \equiv \frac{\pi^2\hbar^2}{\mu d^2}\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2 - V_0 \tag{8.11.8}$$

die Energieniveaus des Neutrons im Feld mit dem Potential V_0 sind.

Jetzt kann man aus der Beziehung (8.11.6) die Stärkefunktion berechnen:

$$C_s(\varepsilon_\lambda) = \left\langle \frac{|\gamma_{\lambda s}|^2}{D_\lambda} \right\rangle = \lim_{W\to 0} \frac{1}{\pi} \sum_n \frac{W\frac{\hbar^2}{\mu d}}{(\varepsilon_n - \varepsilon_\lambda)^2 + W^2}. \tag{8.11.9}$$

Gehen wir in (8.11.9) von der Summe zur Integration über, so können wir den Wert der reduzierten Partialbreite des Niveaus ε_λ abschätzen:

$$\langle |\gamma_{\lambda s}|^2 \rangle \approx \frac{\hbar^2}{\mu d}.$$

Wenn die Resonanzen des Compoundkerns nicht auflösbar sind, führt die Messung des Wirkungsquerschnitts zu effektiven Querschnitten, die über viele Resonanzen gemittelt sind. Wir wollen den Querschnitt der elastischen Streuung, der durch (8.11.3) bestimmt wird, über ein kleines Energieintervall mitteln, das viele Resonanzen enthält. Wir vernachlässigen dabei die Veränderung von k_s^2 im Bereich der Mittelung:

$$\langle \sigma_e \rangle = \frac{\pi}{k_s^2} g \langle |1 - S_{ss}|^2 \rangle = \sigma_{se} + \sigma_{ce}.$$

Hierbei ist

$$\sigma_{se} = \frac{\pi}{k_s^2} g \, |1 - \langle S_{ss} \rangle|^2, \qquad (8.11.10)$$

$$\sigma_{ce} = \frac{\pi}{k_s^2} g \, (\langle |S_{ss}|^2 \rangle - |\langle S_{ss} \rangle|^2). \qquad (8.11.11)$$

Den Querschnitt σ_{se} nennt man [8,22] Querschnitt der elastischen Streuung, die durch das Potential bedingt wird, den Querschnitt σ_{ce} Querschnitt der elastischen Streuung, die über das Stadium des Compoundkerns verläuft, da sie bei Anregungen im Gebiet des Kontinuumspektrums verschwindet, weil in diesem Gebiet die Wahrscheinlichkeit der elastischen Streuung über das Compoundkernstadium verschwindend gering ist. In dem Gebiet jedoch, in dem sich das Matrixelement S_{ss} sehr stark mit der Energie ändert (einzeln gelegene Resonanzen), gilt

$$\langle |S_{ss}|^2 \rangle \neq |\langle S_{ss} \rangle|^2,$$

und der Querschnitt der elastischen Streuung, die über das Stadium des Compoundkerns verläuft, ist verschieden von Null.

Der Mittelwert des Reaktionsquerschnitts ist

$$\langle \sigma_r \rangle = \frac{\pi}{k_s^2} g \, |1 - \langle |S_{ss}|^2 \rangle|. \qquad (8.11.12)$$

Den Gesamtquerschnitt $\sigma_c = \langle \sigma_r \rangle + \sigma_{ce}$ nennt man *Querschnitt für die Bildung des Compoundkerns.* Nach (8.11.12) und (8.11.11) ergibt er sich aus der Gleichung

$$\sigma_c = \frac{\pi}{k_s^2} g \, (1 - |\langle S_{ss} \rangle|^2). \qquad (8.11.13)$$

Wir zeigen nun, daß man den Wirkungsquerschnitt für die Bildung des Compoundkerns durch die Stärkefunktion $C_s(\varepsilon)$ ausdrücken kann. Aus (8.11.1) und (8.11.2) folgt

$$\langle S_{ss} \rangle = \mathrm{e}^{-2i\Omega_s} (1 + 2i \, \zeta_s \, \overline{R}_{ss}). \qquad (8.11.14)$$

Zur Berechnung von $\overline{R}_{ss}$ benutzen wir die Gl. (8.11.4). Werden die Pole der Stärkefunktion nicht berücksichtigt, so folgt aus (8.11.4)

$$\overline{R}_{ss} \approx 2\pi \, i \, C_s(\varepsilon). \qquad (8.11.14\text{a})$$

Wird (8.11.14a) und (8.11.14) in (8.11.13) eingesetzt, so erhalten wir

$$\sigma_c = \frac{\pi}{k_s^2} g \cdot 4\pi \, \zeta_s \, C_s(\varepsilon) \, (1 - 4\pi \zeta_s \, C_s) \approx \frac{4\pi^2}{k_s^2} g \, \zeta_s \, C_s(\varepsilon). \qquad (8.11.15)$$

Der Faktor ζ_s ist durch Formel (8.10.7) definiert. Er charakterisiert die Durchlässigkeit der „äußeren" Potentialschwelle (Coulomb-Feld und Zentrifugalschwelle). Die Größe $\frac{\pi}{k_s^2} g \, \zeta_s$ kann man deshalb Wirkungsquerschnitt für den „Stoß" von Kern und Nukleon nennen und (8.10.15) in der Form

$$\sigma_c = \frac{\pi}{k_s^2} g \, \zeta_s \, \eta_s \qquad (8.11.16)$$

schreiben, wobei η_s als *Anlagerungskoeffizient* bezeichnet wird. Nach (8.10.15) wird der Anlagerungskoeffizient im Kanal s durch die Stärkefunktion bestimmt:

$$\eta_s = 4\pi\, C_s(\varepsilon). \tag{8.11.17}$$

Die Stärkefunktion $C_s(\varepsilon)$ kann unmittelbar aus den Resonanzparametern des Energiegebietes bestimmt werden, das isolierten Resonanzen entspricht. Für langsame Neutronen wird $|\gamma|^2$ durch die Neutronenbreite $\Gamma_e = 2k\,|\gamma|^2$ oder durch die „reduzierte Neutronenbreite" $\Gamma_e^0 = \Gamma_e/\varepsilon_\lambda$ ausgedrückt, wobei ε_λ die kinetische Energie des Neutrons (meist in eV) ist, die zur Resonanz führt. Die Abhängigkeit der Stärkefunktion von der Massenzahl wurde im Gebiet $100 < A < 200$ in der Arbeit [8,23] und im Gebiet $A \approx 50$ in der Arbeit [8,24] gemessen. Es zeigte sich, daß die Stärkefunktion ein gut ausgebildetes Maximum im Gebiet $A \approx 52$ und ein weniger gut ausgeprägtes Maximum im Gebiet $A = 160 \cdots 165$ besitzt.

Wenn angenommen wird, daß Gl. (8.11.9) auch für endliche W gültig ist, d. h., wenn man setzt

$$\left\langle \frac{|\gamma_{\lambda s}|^2}{D_\lambda} \right\rangle = \frac{1}{\pi} \sum_n \frac{\frac{\hbar^2}{\mu d} W}{(\varepsilon_n - \varepsilon)^2 + W^2}, \tag{8.11.18}$$

so kann man aus der Lage der Maxima den Parameter V_0 des optischen Potentials bestimmen.

Da das Maximum bei kleiner Energie beobachtet wird, ergibt sich unter Benutzung von (8.11.8)

$$\varepsilon_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{\mu d^2} \left(\frac{2n-1}{2}\right)^2 - V_0 \approx 0.$$

Für $A = 52$ muß $n = 3$ gesetzt werden, für $A = 160 \cdots 165$ ist $n = 4$. Setzt man

$$d = r_0 A^{1/3} + b_n, \qquad b_n \approx 0{,}6 r_0,$$

so kann man nach [8,25] folgenden Wert erhalten:

$$r_0^2 V_0 = 67 \cdot 10^{-26}\,\text{MeV cm}^2.$$

Bei $r_0 = 1{,}3 \cdot 10^{-13}$ cm wird somit $V_0 = 40$ MeV, bei $r_0 = 1{,}2 \cdot 10^{-13}$ cm ist $V_0 = 47$ MeV.

Geht man bei der Abschätzung der Stärkefunktion vom Modell der starken Kopplung aus (Abschn. 8.7.), so ergibt sich nach (8.7.14)

$$\frac{\langle \gamma^2 \rangle}{D} = \frac{1}{\pi K}, \tag{8.11.19}$$

wobei K die Wellenzahl ist, die der mittleren kinetischen Energie des Neutrons im Kern entspricht. K verändert sich nur schwach bei Änderung der Massenzahl A. Deshalb stimmt das Ergebnis (8.11.19) nicht mit dem Experiment überein.

8.12. Winkelverteilung der Reaktionsprodukte

Die Streuung (elastische und unelastische) und die Kernreaktionen, bei denen zwei Teilchen zusammenstoßen und das System nach dem Stoß in zwei andere Teilchen zerfällt, kann man mathematisch als Stoß zweier Teilchen

im Anfangsstadium und Auseinanderfliegen zweier Teilchen im Endstadium beschreiben. Vor dem Stoß werden wir das System durch den Index a charakterisieren, der uns den Typ und den inneren Zustand der stoßenden Teilchen sowie den Bahndrehimpuls $\mathfrak{l}$ und den Kanalspin $\mathfrak{s}$ bestimmt. Der Kanalspin $\mathfrak{s}$ ist die Vektorsumme von Teilchenspin und Kernspin. Der Zustand des Systems nach dem Stoß wird entsprechend durch den Satz $b, \vec{\lambda}, \vec{\sigma}$ beschrieben.

Die Aufgabe der Streutheorie besteht in der Berechnung des Wirkungsquerschnitts für den Prozeß $a, \mathfrak{l}, \mathfrak{s} \to b, \vec{\lambda}, \vec{\sigma}$. Bei der Addition des Bahndrehimpulses $\mathfrak{l}$ und des Spins $\mathfrak{s}$ des Anfangszustands erhalten wir den Gesamtdrehimpuls $\mathfrak{J}$ des Systems. Der Gesamtdrehimpuls $\mathfrak{J}$, seine Projektion auf eine ausgezeichnete Raumrichtung und die Parität des Zustands sind beim Stoß Bewegungsintegrale. Der Wirkungsquerschnitt des Prozesses $a, \mathfrak{l}, \mathfrak{s} \to b, \vec{\lambda}, \vec{\sigma}$, zu dem der Gesamtdrehimpuls $\mathfrak{J}$ und die Parität Π gehören, wird durch das Element der Streumatrix

$$S_{als;\, b\lambda\sigma}(J, \Pi) \tag{8.12.1}$$

charakterisiert. Die Matrixelemente (8.12.1) hängen von der Stoßenergie ab und bilden eine unitäre Matrix.

Die Wellenfunktion des Anfangszustands des Systems im Eingangskanal a, s kann in der Form

$$\Phi_{as} = \varphi_{as}\, \chi_{sm_s} e^{ik_a z_a} = \varphi_{as} \sum_{l=0}^{\infty} i^l \sqrt{4\pi(2l+1)}\, j_l(k_a r_a)\, Y_{l0}(\vartheta_a, \varphi_a)\, \chi_{sm_s} \tag{8.12.2}$$

geschrieben werden, wobei χ_{sm_s} die Spinfunktion des Kanals und φ_{as} die Wellenfunktion, die den inneren Zustand von Kern und Teilchen beschreibt, sind. Gl. (8.12.2) zeigt bei $k_a r_a \gg 1$ folgendes asymptotisches Verhalten:

$$\Phi_{as} = \varphi_{as} \frac{\sqrt{\pi}}{k_a r_a} \sum_{l=0}^{\infty} i^{l+1} \sqrt{2l+1} \left\{ e^{-i\left(k_a r_a - \frac{l\pi}{2}\right)} - e^{i\left(k_a r_a - \frac{l\pi}{2}\right)} \right\} Y_{l0}\, \chi_{sm_s}. \tag{8.12.3}$$

Wir drücken das Produkt $Y_{l0}\, \chi_{sm_s}$ der Wellenfunktionen Y_{l0} und χ_{sm_s} durch die Spin-Bahn-Funktion[1]) des Gesamtdrehimpulses aus:

$$Y_{l0}\, \chi_{sm_s} = \sum_{J=|l-s|}^{l+s} (l\, s\, 0\, m_s \,|\, J\, m_s)\, G_{lsJm_s}.$$

Dann nimmt die Wellenfunktion des Anfangszustands im Kanal a, s folgende Form an:

$$\Phi_{as} = \varphi_{as} \frac{\sqrt{\pi}}{k_a r_a} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{J} \sqrt{2l+1}\, (l\, s\, 0\, m_s | J\, m_s)\, G_{lsJm_s} \times$$
$$\times \left\{ e^{-i\left(k_a r_a - \frac{l\pi}{2}\right)} - e^{i\left(k_a r_a - \frac{l\pi}{2}\right)} \right\}, \qquad k_a r_a \gg 1. \tag{8.12.3a}$$

---

[1]) Im Anhang 1 sind diese Funktionen mit dem Buchstaben Φ bezeichnet.

Schreibt man die allgemeinste Form der Wellenfunktion des Endzustands im Kanal b, σ (bei vorgegebenen J, Π, m_s) auf, so hat man

$$\Phi_{b\sigma} = \sum_{\lambda=|J-\sigma|}^{J+\sigma} G_{\lambda\sigma J m_s} \varphi_{b\sigma} \times \tag{8.12.4}$$
$$\times \left\{ A_{b\lambda\sigma}^{J\Pi m_s} \frac{\exp\left[-i\left(k_b r_b - \frac{\lambda\pi}{2}\right)\right]}{r_b \sqrt{v_b}} - B_{b\lambda\sigma}^{J\Pi m_s} \frac{\exp\left[i\left(k_b r_b - \frac{\lambda\pi}{2}\right)\right]}{r_b \sqrt{v_b}} \right\}.$$

Der Zusammenhang zwischen den Amplituden der einlaufenden und auslaufenden Kugelwellen wird durch die Streumatrix bestimmt:[1])

$$B_{b\lambda\sigma} = \sum_{b',\lambda',\sigma'} S_{b\lambda\sigma;\, b'\lambda'\sigma'} A_{b'\lambda'\sigma'}. \tag{8.12.5}$$

Aus dem Vergleich von (8.12.4) mit (8.12.3) finden wir

$$A_{b\lambda\sigma} = \frac{i^{\lambda+1}\sqrt{2\lambda+1}\,(\lambda\,\sigma\,0\,m_s|J\,m_s)\sqrt{\pi v_b}}{k_a}\,\delta_{ab}\,\delta_{s\sigma}\,\delta_{\lambda l}. \tag{8.12.6}$$

Wird (8.12.6) in (8.12.5) eingesetzt, so ergibt sich

$$B_{b\lambda\sigma} = \sum_{l=|J-s|}^{J+s} S_{b\lambda\sigma;\,als}\, k_a^{-1} \sqrt{(2l+1)\pi v_a}\,(l\,s\,0\,m_s|\,J\,m_s)\, i^{l+1}. \tag{8.12.7}$$

Unter Benutzung von (8.12.7) und (8.12.6) stellen wir die Wellenfunktion (8.12.4) als Summe einlaufender und auslaufender Wellen dar:

$$\Phi_{b\sigma} = \Phi_{as}\,\delta_{ba}\,\delta_{\sigma s} + \Psi_{b\sigma}. \tag{8.12.8}$$

Hierbei ist

$$\Psi_{b\sigma} = \frac{i}{k_a r_b}\left(\frac{\pi v_a}{v_b}\right)^{1/2} \varphi_{b\sigma} \sum_{J=0}^{\infty} \sum_{l=|J-s|}^{J+s} \sum_{\lambda=|J-\sigma|}^{J+\sigma} i^l \sqrt{2l+1}\,(l\,s\,0\,m_s\,|\,J\,m_s)\, G_{\lambda\sigma J m_s} \times$$
$$\times \exp\left\{i\left(k_b r_b - \frac{\lambda\pi}{2}\right)\right\}[\delta_{ba}\,\delta_{\lambda l}\,\delta_{\sigma s} - S_{b\lambda\sigma;\,als}]. \tag{8.12.9}$$

Wenn der Detektor die Reaktionsprodukte nicht nach dem Gesamtdrehimpuls J des Systems, sondern nach den Werten des Kanalspins und seiner Projektion m_σ sortiert, so bringt man (8.12.9) unter Benutzung von

$$G_{\lambda\sigma J m_s} = \sum_{m_\sigma} (\lambda\,\sigma, m_s - m_\sigma, m_\sigma\,|J m_s) Y_{\lambda, m_s - m_\sigma} \chi_{\sigma m_\sigma}$$

auf die Form

$$\psi_{b\sigma} = \frac{i\,e^{i k_b r_b}}{r_b}\left(\frac{v_a}{v_b}\right)^{1/2} \sum_{m_\sigma} F_{a s m_s}^{b\sigma m_\sigma} \varphi_{b\sigma}\,\chi_{\sigma m_\sigma}, \tag{8.12.10}$$

wobei

$$F_{a s m_s}^{b\sigma m_\sigma} = \frac{\pi}{k_a} \sum_{J=0}^{\infty} \sum_{l=|J-s|}^{J+s} \sum_{\lambda=|J-\sigma|}^{J+\sigma} i^{l-\lambda} \sqrt{2l+1}\,(l\,s\,0\,m_s|J\,m_s)\,Y_{\lambda,\,m_s-m_\sigma} \times$$
$$\times (\lambda\,\sigma, m_s - m_\sigma, m_\sigma|J\,m_s)\,[\delta_{ba}\,\delta_{\lambda l}\,\delta_{s\sigma} - S_{b\lambda\sigma;\,als}] \tag{8.12.11}$$

[1]) Im folgenden werden wir die Indizes J, Π, m_s an den A und B fortlassen.

ist. Die Größe $F^{b\sigma m_\sigma}_{a s m_s}$ kann man [8,26] *Reaktionsamplitude* nennen. Manchmal bezeichnet man auch die Größe

$$A^{b\sigma m_\sigma}_{a s m_s} \equiv \left(\frac{v_a}{v_b}\right)^{1/2} F^{b\sigma m_\sigma}_{a s m_s} \tag{8.12.12}$$

als Reaktionsamplitude.

Unter Benutzung von (8.12.8) und (8.12.10) kann man sich leicht überzeugen, daß der Querschnitt für die Reaktion $a\, s\, m_s \to b\, \sigma\, m_\sigma$, bei der sich das Teilchen nach dem Stoß unter den Winkeln ϑ, φ zum einfallenden Bündel in den Raumwinkel $d\Omega$ bewegt (die Winkel werden im Schwerpunktsystem gemessen), durch die Reaktionsamplitude bestimmt wird:

$$d\sigma_{b\sigma m_\sigma; a s m_s}(\vartheta, \varphi) = |F^{b\sigma m_\sigma}_{a s m_s}|^2\, d\Omega. \tag{8.12.13}$$

Wenn die einfallenden Teilchen polarisiert sind und die Spins sowie die Polarisationen der im Ergebnis der Reaktion entstehenden Teilchen fixiert werden, hängt der Wirkungsquerschnitt der Reaktion im allgemeinen vom Winkel φ ab (s. Kap. 10).

Der Querschnitt der Reaktion $a\, s \to b\, \sigma$ mit nichtpolarisierten Teilchen ergibt sich aus (8.12.13) durch Mittelung über die Spinanfangszustände und Summierung über die Endzustände:

$$d\sigma_{b\sigma; as}(\vartheta) = (2s+1)^{-1} \sum_{m_s, m_\sigma} d\sigma_{b\sigma m_\sigma; a s m_s}(\vartheta, \varphi). \tag{8.12.14}$$

Wie wir noch zeigen werden, hängt der Querschnitt (8.12.14) nicht von φ ab.

Die Experimente werden oft ohne Fixierung des Kanalspins durchgeführt. Dann muß man zum Vergleich mit den experimentellen Daten (8.12.14) über die möglichen Werte von s mitteln und über alle möglichen Werte von σ summieren. Wenn I und i die Spins des Anfangskerns und des einfallenden Teilchens und I' und i' die Spins von Endkern und emittiertem Teilchen sind, so gilt

$$d\sigma_{ba} = \sum_{s=|I-i|}^{I+i} \sum_{\sigma=|I'-i'|}^{I'+i'} g(s)\, d\sigma_{b\sigma; as}, \tag{8.12.15}$$

wobei

$$g(s) = \frac{(2s+1)}{(2I+1)(2i+1)}$$

das statistische Gewicht bedeutet.

Wird (8.12.11) in (8.12.13) eingesetzt, so erhalten wir

$$d\sigma_{b\sigma; as} = \{(2s+1)\, k_a^2\}^{-1} \sum_{J_1, l_1, \lambda_1, J_2, l_2, \lambda_2} i^{-l_1+\lambda_1+l_2-\lambda_2} (\delta_{ba}\, \delta_{\lambda_1 l_1}\, \delta_{\sigma s} - S^{J_1}_{b\lambda_1\sigma; a l_1 s})^* \times$$
$$\times\, \delta_{ba}\, \delta_{\lambda_2 l_2}\, \delta_{\sigma s} - S^{J_2}_{b\lambda_2\sigma; a l_2 \sigma})\, K(J_1\, \lambda_1\, l_1;\, J_2\, \lambda_2\, l_2;\, \sigma\, s;\, \vartheta)\, d\Omega, \tag{8.12.16}$$

wobei

$$K(J_1\, \lambda_1\, l_1;\, J_2\, \lambda_2\, l_2;\, \sigma\, s;\, \vartheta) \equiv$$
$$\equiv \pi(2l_1+1)(2l_2+1) \sum_{m_s, m_\sigma} (l_1\, s\, 0\, m_s | J_1\, m_s)\, (l_2\, s\, 0\, m_s | J_2\, m_s) \times$$
$$\times (\lambda_1\, \sigma, m_s - m_\sigma, m_\sigma | J_1\, m_s) \times$$
$$\times (\lambda_2\, \sigma, m_s - m_\sigma, m_\sigma | J_2\, m_s)\, Y^*_{\lambda_1 m_s - m_\sigma}(\vartheta, \varphi)\, Y_{\lambda_2 m_s - m_\sigma}(\vartheta, \varphi) \tag{8.12.17}$$

eine Größe ist, die nicht von der Art der Kanäle und der Dynamik des Stoßes abhängt, d. h., die unabhängig von der Streumatrix ist. Wird die Gleichung

$$Y^*_{\lambda_1 M}(\vartheta, \varphi)\, Y_{\lambda_2 M}(\vartheta, \varphi) = (-1)^M \sum_L \sqrt{\frac{(2\lambda_1+1)(2\lambda_2+1)}{4\pi(2L+1)}}\, (\lambda_1 \lambda_2 0\, 0 | L 0) \times \\ \times (Y_1 \lambda_2, -M, M | L 0)\, Y_{L0}(\vartheta) \qquad (8.12.18)$$

benutzt, so kann man sich überzeugen, daß die Größe $K(J_1\, \lambda_1\, l_1;\; J_2\, \lambda_2\, l_2;\; \sigma\, s;\; \vartheta)$ nur von ϑ und nicht von φ abhängt.

Bei der Ableitung der Beziehungen wurden keinerlei Voraussetzungen über den Reaktionsmechanismus gemacht. Deshalb sind die Resultate für alle möglichen Stöße gültig, bei denen vor und nach dem Stoß jeweils zwei Teilchen existieren.

Wir wollen noch einige Rückschlüsse über die Winkelverteilungen der Reaktionsprodukte ziehen, die sich aus den oben angeführten Formeln für spezielle Fälle ergeben.

Nehmen wir z. B. an, daß die Energie der Relativbewegung der Energie einer isolierten Resonanz des Compoundkerns entspricht. Da die Eigenschaft dieses Zustands nicht von der Art seiner Bildung abhängt, ist der Zerfall des Kerns (wie im Abschn. 8.10. gezeigt wurde) unabhängig von der Art und Weise der Anregung. Weiterhin besitzt jeder solche Zustand eine definierte Parität. Deshalb muß die Reaktionsamplitude (8.12.11) bei räumlicher Inversion der Bedingung

$$F^{b\sigma m_\sigma}_{a s m_s}(\vartheta - \pi, \varphi + \pi) = \pm F^{b\sigma m_\sigma}_{a s m_s}(\vartheta, \varphi) \qquad (8.12.19)$$

genügen. Das Pluszeichen bezieht sich auf gerade, das Minuszeichen auf ungerade Resonanzniveaus.

Aus (8.12.19) und (8.12.13) folgt, daß der über die Spinzustände m_s und m_σ gemittelte und vom Winkel φ unabhängige Reaktionsquerschnitt der Gleichung

$$d\sigma_{b\sigma;\, as}(\pi - \vartheta) = d\sigma_{b\sigma;\, as}(\vartheta) \qquad (8.12.20)$$

genügen muß, d. h., der differentielle Reaktionsquerschnitt muß symmetrisch bezüglich des Winkels 90° sein. Eine solche Symmetrie muß nicht nur für Reaktionen vorhanden sein, die im Gebiet einer isolierten Resonanz über den Compoundkern verlaufen, sondern auch in all den Fällen, in denen die Wellenfunktion der Reaktion eine bestimmte Parität besitzt, z. B. bei kleinen Energien der Relativbewegung, wenn an der Reaktion nur Zustände mit $l = 0$ teilhaben. In diesem Fall ist die Parität des Zustands, welcher der Kernreaktion entspricht, gleich dem Produkt der Parität des einfallenden Teilchens und der Parität des Targetkerns.

Eine Folge der Gl. (8.12.20) ist, daß man aus Messungen der Winkelverteilung der Reaktionsprodukte nicht die Parität des Zustands feststellen kann. Insbesondere ist es unmöglich, die Parität des isolierten Resonanzniveaus des Compoundkerns zu bestimmen.

Wenn die Energie der Relativbewegung im Gebiet sich überlappender Resonanzen mit kleiner Niveaudichte liegt, so regt das einfallende Teilchen mehrere Zustände des Compoundkerns an. Die Phasenbeziehungen zwischen diesen Zuständen hängen von der Art der Anregung ab. In diesem Fall ist die Annahme der Unabhängigkeit des Zerfalls von der Bildung nicht immer erfüllt. Die Winkelverteilung der Reaktionsprodukte braucht dann die Gl. (8.12.20) nicht zu erfüllen.

Wenn schließlich die Energie der Relativbewegung in einem Gebiet mit großer Zustandsdichte und sich überlappenden Resonanzen liegt, so kann man die statistische Näherung verwenden, bei der eine regellose Verteilung der Phasenbeziehungen zwischen den einzelnen Zuständen des Kerns vor dem Zerfall angenommen wird. Wir zeigen, daß in diesem Fall wiederum die Beziehung (8.12.20) für den differentiellen Reaktionsquerschnitt erfüllt sein muß.

Für die Reaktion $a s \to b \sigma \neq a s$ kann man nach (8.12.16) schreiben

$$\frac{d\sigma_{b\sigma;\,as}}{d\Omega} =$$

$$= [(2s+1)\,k_a^2]^{-1} \sum_{\substack{J_1,\lambda_1,l_1\\ J_2,\lambda_2,l_2}} i^{-l_1+\lambda_1+l_2-\lambda_2}\, S^{*J_1}_{b\sigma\lambda_1;\,asl_1} S^{J_2}_{b\sigma\lambda_2;\,asl_2} K(J_1 l_1 \lambda_1;\; J_2 l_2 \lambda_2;\; \sigma s;\; \vartheta). \tag{8.12.21}$$

Unter Benutzung der Ergebnisse des vorhergehenden Abschnitts [Gln. (8.11.1), (8.11.2)] kann man schreiben

$$S^{*J_1}_{b\sigma\lambda_1;\,asl_1} S^{J_2}_{b\sigma\lambda_2;\,asl_2} = \sum_{\mu_1,\mu_2} \frac{4\gamma^{J_1}_{b\sigma\lambda_1\mu_1}\gamma^{J_1}_{asl_1\mu_1}\sqrt{\zeta_{b\sigma\lambda_1}\zeta_{asl_1}}\;\gamma^{J_2}_{b\sigma l_2\mu_2}\gamma^{J_2}_{as\lambda_2\mu_2}\sqrt{\zeta_{b\sigma\lambda_2}\zeta_{asl_2}}}{\left(\varepsilon_{\mu_1}-\varepsilon+i\dfrac{\Gamma_{\mu_1}}{2}\right)\left(\varepsilon_{\mu_2}-\varepsilon-i\dfrac{\Gamma_{\mu_2}}{2}\right)}. \tag{8.12.22}$$

Da wir angenommen haben, daß die Vorzeichen von γ statistisch verteilt sind, brauchen bei der Summation in (8.12.21) und (8.12.22) nur die Glieder mit $l_1 = l_2$, $\lambda_1 = \lambda_2$, $J_2 = J_1$ und $\mu_1 = \mu_2$ berücksichtigt zu werden, da die restlichen Summanden wegen der regellosen Vorzeichenverteilung nur einen geringen Beitrag liefern. Wenn also die statistische Näherung erfüllt ist, so wird

$$\frac{d\sigma_{b\sigma;\,as}}{d\Omega} = \frac{4}{(2s+1)\,k_a^2} \sum_{J,l,\lambda,\mu} \frac{\zeta_{b\sigma\lambda}\,\zeta_{asl}\,(\gamma_{asl\mu})^2\,(\gamma_{b\sigma\lambda\mu})^2}{(\varepsilon_\mu-\varepsilon)^2+\dfrac{\Gamma_\mu^2}{4}} K(J\lambda l;\; J\lambda l;\; s\sigma;\; \vartheta). \tag{8.12.23}$$

Unter Berücksichtung von (8.12.17) und (8.12.18) kann man sich überzeugen, daß $K(J\lambda l; J\lambda l; s\sigma; \vartheta)$ nur Kugelfunktionen $Y_{L0}(\vartheta)$ mit geradzahligen Werten von L enthält: $L = 0, 2, \ldots$ Die Winkelverteilung (8.12.23) der Reaktionsprodukte muß somit symmetrisch bezüglich des Winkels 90° sein. Tritt eine solche Symmetrie in der betrachteten Reaktion nicht auf (z. B., wenn die Vorwärtsrichtung beträchtlich bevorzugt ist), so deutet dies darauf hin, daß die statistische Annahme, die der Gl. (8.12.23) zugrunde liegt, bei der betreffenden Reaktion nicht erfüllt wird. Der Querschnitt der elastischen Streuung, die über das Stadium des Compoundkerns verläuft, kann in allgemeiner Form nicht berechnet werden, da bei $\{b\sigma\lambda\} = \{asl\}$ in den Summen von (8.12.21) und (8.12.22) auch dann positive Glieder auftreten, wenn die Bedingungen $\mu_1 = \mu_2$ und $J_1 = J_2$ nicht erfüllt sind. Der Querschnitt der elastischen Streuung, die über den Compoundkern verläuft, ist jedoch sehr klein (bei nicht allzu kleinen Energien), weshalb die Details der Winkelverteilung für diese Streuung unwesentlich sind.

Wir haben die Fragen besprochen, die mit dem Auftreten oder dem Fehlen einer Symmetrie bezüglich 90° in der Winkelverteilung der Reaktionsprodukte zusammenhängen. In einigen Fällen kann man konkretere Aussagen über die Winkelverteilung machen, wenn Angaben über den Mechanismus der Kernreaktion vorhanden sind.

In der ebenen Welle, die in der Wellenfunktion des Anfangszustands auftritt, sind alle Bahndrehimpulse $\hbar l$ enthalten. Die Winkelverteilung der Reaktionsprodukte wird nach (8.12.11) und (8.12.13) durch diejenigen Bahndrehimpulse $\hbar l$ bestimmt, die an der gegebenen Reaktion teilnehmen. Der Einfachheit halber wollen wir annehmen, daß an der Reaktion nur der Zustand mit dem Bahndrehimpuls $\hbar L$ aus der einfallenden Welle teilnimmt. Dieser Zustand besitzt die definierte Parität $(-1)^L \Pi_I \Pi_i$, wobei Π_i und Π_I die inneren Paritäten des einfallenden Teilchens und des Kerns sind. In diesem Fall muß nach dem oben Gesagten die Winkelverteilung der Reaktionsprodukte symmetrisch bezüglich 90° sein. Man kann weiter beweisen, daß die Winkelverteilung der Reaktionsprodukte durch ein gerades Polynom von $\cos\vartheta$ beschrieben wird, dessen Grad nicht höher als $2L$ sein kann.

Zum Beweis dieser Behauptung schreiben wir den Teil der Wellenfunktion des Anfangszustands, der dem Bahndrehimpuls $\hbar L$ entspricht, zur Abkürzung in der Form

$$\Psi_a = A\, Y_{Lm}(\vartheta_a, \varphi_a)\, \psi_{s m_s}(\xi_a). \tag{8.12.24}$$

Hierbei bestimmt A die Radialabhängigkeit der Wellenfunktion im Eingangskanal; $\psi_{s m_s}$ ist die normierte Wellenfunktion, die den Kanalspin, seine Projektion auf eine Vorzugsrichtung sowie den inneren Zustand von Teilchen und Kern bestimmt. Nach (8.12.10) kann man dann die Wellenfunktion im Ausgangskanal b in folgender Form schreiben:

$$\Psi_b = B \sum_{m_\sigma} F^{(Lm)}_{m_\sigma m_s}(\vartheta_b, \varphi_b)\, \psi_{\sigma m_\sigma}(\xi_b), \qquad m = m_s - m_\sigma. \tag{8.12.25}$$

Wählt man das Koordinatensystem so, daß die z-Achse in Richtung der Relativbewegung der Teilchen im Eingangskanal liegt, so ist $m = 0$ und der über die Spinprojektionen m_s im Eingangskanal gemittelte differentielle Reaktionsquerschnitt kann in der Form

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \text{const} \sum_{m_\sigma,\, m_s} |F^{(L0)}_{m_\sigma m_s}(\vartheta_b, \varphi_b)|^2 \tag{8.12.26}$$

geschrieben werden.

Der Beweis der oben angeführten Behauptung über die Eigenschaften der Winkelverteilung der Reaktionsprodukte beruht auf den Invarianzeigenschaften des Ausdrucks (8.12.26) bezüglich Drehungen des Koordinatensystems [8,27]. Wir führen ein neues Koordinatensystem ein, das gegenüber dem ersten gedreht ist. Die Koordinaten im neuen System bezeichnen wir durch Striche. Weiterhin benutzen wir die Ergebnisse des Anhangs 1.6., in dem u. a. die Matrixelemente $D^J_{m m'}$ der irreduziblen Darstellung der dreidimensionalen Drehungsgruppe untersucht werden. Beim Übergang zum gestriche-

nen Koordinatensystem transformieren sich dann die Wellenfunktionen nach den Gleichungen

$$Y_{Lm'}(\vartheta', \varphi') = \sum_m D^L_{m'm} Y_{Lm}(\vartheta, \varphi), \tag{8.12.27}$$

$$\psi_{sm'_s}(\xi') = \sum_{m_s} D^s_{m'_s m_s} \psi_{s m_s}(\xi). \tag{8.12.28}$$

Wir betrachten jetzt die einfallende Welle im neuen Koordinatensystem:

$$\Psi'_a = A\, Y_{Lm'}(\vartheta'_a, \varphi'_a)\, \varphi_{sm'_s}(\xi'_a). \tag{8.12.24'}$$

Die Wellenfunktion im Ausgangskanal besitzt in diesem Koordinatensystem die Form

$$\Psi'_b = B \sum_{m'_\sigma} F^{(Lm')}_{m'_\sigma m'_s}(\vartheta'_b, \varphi'_b)\, \psi_{\sigma m'_\sigma}(\xi'_b), \qquad m' = m'_s - m'_\sigma. \tag{8.12.25'}$$

Wegen der physikalischen Äquivalenz der beiden Koordinatensysteme müssen die Reaktionsamplituden in (8.12.25) und (8.12.25′) gleiche Funktionen ihrer Variablen sein.

Unter Benutzung von (8.12.27) und (8.12.28) stellen wir die Funktion (8.12.24′) als Überlagerung von Funktionen (8.12.24) dar:

$$\Psi'_a = A \sum_{m, m_s} D^L_{m'm} D^s_{m'_s m_s} Y_{Lm}(\vartheta_a, \varphi_a)\, \psi_{s m_s}(\xi_a).$$

Die Wellenfunktionen im Ausgangskanal (8.12.25′) müssen Linearkombinationen der Funktionen (8.12.25) mit denselben Koeffizienten sein, d. h., es muß gelten

$$\Psi'_b = B \sum_{m, m_s} D^L_{m'm} D^s_{m_s' m_s} \sum_{m_\sigma} F^{(Lm)}_{m_\sigma m_s}(\vartheta_b, \varphi_b)\, \psi_{\sigma m_\sigma}(\xi_b). \tag{8.12.29}$$

Wird (8.12.29) und (8.12.25′) gleichgesetzt sowie die Gleichung

$$\psi_{\sigma m'_\sigma}(\xi'_\sigma) = \sum_{m_\sigma} D^\sigma_{m'_\sigma m_\sigma} \psi_{\sigma m_\sigma}(\xi_\sigma)$$

benutzt, so liefert der Vergleich der Koeffizienten von $\psi_{\sigma m_\sigma}$ folgende Relation:

$$\sum_{m'_\sigma} F^{(Lm')}_{m'_\sigma m'_s}(\vartheta'_b, \varphi'_b)\, D^\sigma_{m'_\sigma m_\sigma} = \sum_{m, m_s} D^L_{m'm} D^s_{m'_s m_s} F^{(Lm)}_{m_\sigma m_s}(\vartheta_b, \varphi_b). \tag{8.12.30}$$

Wird diese Gleichung mit $D^{*\sigma}_{m''_\sigma m_\sigma}$ multipliziert und über m_σ summiert, so erhalten wir unter Berücksichtigung der Beziehung

$$\sum_{m_\sigma} D^{*\sigma}_{m''_\sigma m_\sigma} D^\sigma_{m'_\sigma m_\sigma} = \delta_{m''_\sigma m'_\sigma} \tag{8.12.31}$$

die Regel für die Transformation der Reaktionsamplituden bei Drehungen des Koordinatensystems:

$$F^{(Lm')}_{m'_\sigma m'_s}(\vartheta'_b, \varphi'_b) = \sum_{m, m_s, m_\sigma} D^L_{m'm} D^s_{m'_s m_s} D^{*\sigma}_{m'_\sigma m_\sigma} F^{(Lm)}_{m_\sigma m_s}(\vartheta_b, \varphi_b) \tag{8.12.32}$$

oder

$$F^{(Lm)}_{m_\sigma m_s}(\vartheta_b, \varphi_b) = \sum_{m', m'_s, m'_\sigma} D^{*L}_{m'm} D^{*s}_{m'_s m_s} D^{\sigma}_{m'_\sigma m_\sigma} F^{(Lm')}_{m'_\sigma m'_s}(\vartheta'_b, \varphi'_b), \qquad m' = m'_s - m'_\sigma.$$

Wird (8.12.32) und (8.12.26) eingesetzt, so erhält man unter Benutzung von Beziehungen der Art (8.12.31) die Relation

$$\frac{d\sigma(\vartheta_b, \varphi_b)}{d\Omega} = \text{const} \sum_{m'} D^{*L}_{m'0} D^{L}_{m'0} \sum_{m'_\sigma, m'_s} F^{(Lm')}_{m'_\sigma m'_s}(\vartheta'_b, \varphi'_b) F^{*(Lm')}_{m'_\sigma m'_s}(\vartheta'_b, \varphi'_b). \quad (8.12.33)$$

Wird das gestrichene Koordinatensystem so gewählt, daß $\vartheta'_b = \varphi'_b = 0$ ist, so gilt

$$D^{L}_{m0} = \sqrt{\frac{4\pi}{2L+1}}\, Y_{Lm}(\vartheta_b, \varphi_b).$$

Wird diese Gleichung berücksichtigt, so kann man bei Anwendung des Additionstheorems für die Kugelfunktionen die Formel (8.12.33) in der endgültigen Form schreiben, wenn die Kugelfunktionen $Y_{L0}(\vartheta_b)$ durch LEGENDREsche Polynome ausgedrückt werden:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \text{const} \sum_{m'_\sigma, m'_s} F^{(L0)}_{m'_\sigma m'_s}(0,0) F^{*(L0)}_{m'_\sigma m'_s}(0,0) \sum_{m'} Y^{*}_{Lm'}(\vartheta_b, \varphi_b) Y_{Lm'}(\vartheta_b, \varphi_b) =$$

$$= \text{const} \sum_{J=0}^{2L} d(J)\, P_J(\cos\vartheta_b), \quad (8.12.34)$$

wobei $d(J) = \sum_{m'} (L\,L\,0\,0 \mid J\,0)\,(L\,L, -m', m' \mid J\,0)$ ist. Die Gl. (8.12.34) beweist die oben formulierte Behauptung.

Wenn in der Reaktion die Anteile mit Bahndrehimpulsen größer als $\hbar L$ unwesentlich sind, so wird die Winkelverteilung der Reaktionsprodukte (im Schwerpunktsystem) durch ein Polynom von $\cos\vartheta_b$ ausgedrückt, dessen Grad $2L$ nicht überschreitet, wie aus (8.12.34) zu ersehen ist. Wenn an der Reaktion Bahndrehimpulse teilhaben, die unterschiedlichen Paritäten entsprechen, so können wegen der Interferenz im differentiellen Reaktionsquerschnitt ungerade Potenzen von $\cos\vartheta_b$ auftreten.

8.13. Polarisation von Nukleonen bei der Kernstreuung

Die Erzeugung und die Analyse von Bündeln polarisierter Elementarteilchen kann eine wertvolle Hilfe bei der Untersuchung der spinabhängigen Wechselwirkungen darstellen.

Polarisierte thermische Neutronen erzeugt man am besten durch die Streuung an Eisen, das sich in einem Magnetfeld befindet [8,28].

Die Methoden zur Polarisation schneller Teilchen basieren auf Streuprozessen mit starken Spin-Bahn-Wechselwirkungen. Nach dem optischen Modell, das im Kap. 13 betrachtet wird, kann die elastische Streuung von

Nukleonen an Kernen durch ein komplexes Potential mit Spin-Bahn-Wechselwirkung beschrieben werden:

$$v(r, \sigma) = -(1 + i\zeta) V(r) + a \frac{1}{r} \frac{dW(r)}{dr} \vec{\sigma} \mathfrak{L}, \tag{8.13.1}$$

wobei $\mathfrak{L} = -i[\mathfrak{r} \nabla]$ und a eine Konstante von der Dimension des Quadrats der Länge sind.

Man kann erwarten, daß ein beliebiger Streuprozeß sowie Kernreaktionen, bei denen die Spin-Bahn-Wechselwirkung eine Rolle spielt, zur Polarisation der emittierten Teilchen führen.

Wir werden die Polarisation von Nukleonen für den Fall untersuchen, daß die Wechselwirkung zwischen Nukleon und Kern durch das Potential (8.13.1) beschrieben wird. Der Einfachheit halber betrachten wir den Fall, daß der Kernspin gleich Null ist.

Die SCHRÖDINGER-Gleichung für den Streuprozeß besitzt dann die Form

$$[\nabla^2 + k^2] \psi = u(r, \sigma) \psi, \quad u(r, \sigma) = \frac{2\mu}{\hbar^2} v(r, \sigma), \tag{8.13.2}$$

wobei μ die reduzierte Masse von Nukleon und Kern ist.

Die allgemeine Lösung von (8.13.2), die mit dem Anfangszustand

$$\Phi_a(\mathfrak{r}, \sigma) = e^{i\mathfrak{k}_a \mathfrak{r}} \chi_{1/2\, m_s}(\sigma) \tag{8.13.3}$$

konsistent ist, kann in der Form

$$\psi = \Phi_a - \frac{1}{4\pi} \int \frac{\exp(i k |\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|)}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|} u(r', \sigma) \psi(\mathfrak{r}', \sigma) \, d\mathfrak{r}', \qquad k = |\mathfrak{k}_a| \tag{8.13.4}$$

geschrieben werden (s. Abschn. 7.2.). In großen Entfernungen vom Kern ist $k|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'| \approx k r - \mathfrak{k}_b \mathfrak{r}'$, $\mathfrak{k}_b = k \mathfrak{r}/r$, und die Funktion (8.13.4) kann in der Form

$$\psi = \Phi_a + F_{m_s}(\vartheta) \frac{\exp(i k r)}{r} \tag{8.13.5}$$

dargestellt werden, wobei die Streuamplitude $F_{m_s}(\vartheta)$ durch das Integral

$$F_{m_s}(\vartheta) = -\frac{1}{4\pi} \int \exp(-i \mathfrak{k}_b \mathfrak{r}') u(r', \sigma) \psi(\mathfrak{r}', \sigma) \, d\mathfrak{r}' \tag{8.13.6}$$

bestimmt wird. Zur Berechnung dieses Integrals muß man die Lösung der Integralgleichung (8.13.4) kennen. Bei hinreichend großen Energien der Relativbewegung von Nukleon und Kern kann man sich auf die erste BORNsche Näherung beschränken. Wird in (8.13.6) an Stelle von ψ die Wellenfunktion des Anfangszustands und der Wert von $u(r, \sigma)$ eingesetzt, so kann man (8.13.6) auf die Form

$$F_{m_s}(\vartheta) = \{A(\vartheta) + \vec{\sigma} \mathfrak{n} B(\vartheta)\} \chi_{1/2\, m_s} \tag{8.13.7}$$

bringen, wobei

$$A(\vartheta) = \frac{\mu(1+i\zeta)}{2\pi\hbar^2}\int V(r)\, e^{i(\mathfrak{k}_a - \mathfrak{k}_b)\mathfrak{r}}\, d\mathfrak{r} = \frac{2\mu(1+i\zeta)}{\hbar^2}\int V(r)\, j_0(q r)\, r^2\, dr, \tag{8.13.8}$$

$$q = |\mathfrak{k}_a - \mathfrak{k}_b| = 2k\sin\frac{\vartheta}{2}$$

und $j_0(q r)$ die sphärische BESSEL-Funktion sind. Weiter ist

$$B(\vartheta) = -\frac{2\mu a}{4\pi\hbar^2(\vec{\sigma}\mathfrak{n})}\int \frac{1}{r}\frac{dW}{dr}\, e^{-i\mathfrak{k}_b\mathfrak{r}}\,\vec{\sigma}\,\mathfrak{L}\, e^{i\mathfrak{k}_a\mathfrak{r}}\, d\mathfrak{r} = -i\frac{2\mu k^2}{\hbar^2 q}\sin\vartheta\int j_1(q r)\left(-\frac{a}{r}\frac{dW(r)}{dr}\right) r^3\, dr. \tag{8.13.9}$$

Hierbei wird mit $\mathfrak{n}$ der Einheitsvektor senkrecht zur Streuebene bezeichnet:

$$[\mathfrak{k}_a\,\mathfrak{k}_b] = \mathfrak{n}\, k^2\sin\vartheta. \tag{8.13.10}$$

Sind die einfallenden Nukleonen nicht polarisiert, so gilt die Gleichung

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2}\sum_{m_s}|F_{m_s}(\vartheta)|^2 = |A(\vartheta)|^2 + |B(\vartheta)|^2. \tag{8.13.11}$$

Der Betrag und die Richtung der Polarisation der gestreuten Nukleonen wird durch den *Polarisationsvektor* gekennzeichnet, den wir durch folgende Gleichung definieren:

$$\mathfrak{P} = \frac{(\psi_f, \vec{\sigma}\,\psi_f)}{(\psi_f, \psi_f)}. \tag{8.13.12}$$

Hierbei ist $\psi_f = \psi - \Phi_a$ die Wellenfunktion der gestreuten Teilchen. Die Klammern (φ, ψ) bedeuten, daß die Größen $\psi^*\psi$ über alle Variablen, die nicht im Experiment gemessen werden, zu summieren und zu integrieren sind. Interessiert man sich z. B. für die Abhängigkeit des Polarisationsvektors vom Streuwinkel, so muß man über alle Spinvariablen summieren. Berücksichtigt man (8.13.5), so kann man (8.13.12) auf die Form

$$\mathfrak{P}(\vartheta) = \frac{\frac{1}{2}\sum_{m_s} F^*_{m_s}(\vartheta)\,\vec{\sigma}\,F_{m_s}(\vartheta)}{\frac{1}{2}\sum_{m_s}|F_{m_s}(\vartheta)|^2} \tag{8.13.12a}$$

bringen. Wird hier der Ausdruck (8.13.7) für die Streuamplitude eingesetzt und (8.13.11) berücksichtigt, so erhält man endgültig

$$\mathfrak{P}(\vartheta) = \mathfrak{n}\,\frac{A^*(\vartheta)\,B(\vartheta) + A(\vartheta)\,B^*(\vartheta)}{|A(\vartheta)|^2 + |B(\vartheta)|^2} = \mathfrak{n}\,\frac{A^*(\vartheta)\,B(\vartheta) + A(\vartheta)\,B^*(\vartheta)}{\frac{d\sigma}{d\Omega}}. \tag{8.13.13}$$

Der Polarisationsvektor ist somit parallel oder antiparallel zum Einheitsvektor $\mathfrak{n}$ gerichtet, der senkrecht zur Streuebene steht. Den Absolutbetrag des Polarisationsvektors nennt man den *Polarisationsgrad.*

Nimmt man an, daß die in (8.13.1) eingehenden potentiellen Energien $V(r)$ und $W(r)$ dieselbe Radialabhängigkeit besitzen, d. h., daß

$$V(r) = V_0\,\varrho(r), \quad W(r) = W_0\,\varrho(r)$$

gilt, so hat man nach (8.13.8) und (8.13.9)

$$A(\vartheta) = \frac{2\mu(1 + i\zeta)\,V_0}{\hbar^2} \int \varrho(r)\, j_0(q\,r)\, r^2\, dr, \tag{8.13.8a}$$

$$B(\vartheta) = i\,\frac{2\mu\, k^2 \sin\vartheta\, W_0\, a}{\hbar^2\, q} \int j_1(q\,r) \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\,\varrho(r)\right) r^3\, dr. \tag{8.13.9a}$$

Wird die Gleichung

$$x^2\, j_0(x) = \frac{d}{d\,x}\left(x^2\, j_1(x)\right)$$

benutzt und (8.13.8a) partiell integriert, so erhalten wir

$$A(\vartheta) = -\frac{2\mu}{\hbar^2\, q}\,(1 + i\,\zeta)\,V_0 \int j_1(q\,r)\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\,\varrho(r)\right) r^3\, dr. \tag{8.13.8b}$$

Mit Hilfe von (8.13.8b) und (8.13.9a) kann der Ausdruck (8.13.13) für den Polarisationsvektor auf die Form

$$\mathfrak{P}(\vartheta) = -\,\mathfrak{n}\,\frac{2\,\dfrac{\zeta\, W_0}{(1+\zeta^2)\,V_0}\,a\,k^2}{1 + \dfrac{a^2\, W_0\, k^4}{(1+\zeta^2)\,V_0}\,\sin^2\vartheta}\,\sin\vartheta \tag{8.13.14}$$

gebracht werden. In der Bornschen Näherung hängt der Polarisationsvektor somit nicht von der Form der Funktion $\varrho(r)$ ab.

Aus (8.13.14) folgt, daß der Polarisationsgrad seinen größten Wert bei Streuwinkeln von etwa 90° annimmt. Bei nicht allzu großen Energien ist der Polarisationsgrad proportional dem Betrag der Spin-Bahn-Wechselwirkung ($\approx a\, W_0$) und dem Verhältnis ζ des Imaginärteils des optischen Potentials zu dessen Realteil. Zur Abschätzung des Polarisationsgrades kann man $V_0 = W_0$ und $a \approx 3 \cdot 10^{-27}$ cm² setzen. Dann ist für Energien der Relativbewegung von der Größenordnung 100 MeV $\zeta \approx 0{,}3$, und der Polarisationsgrad beträgt für Streuwinkel von etwa 90° ungefähr 20%.

Der differentielle Streuquerschnitt für nichtpolarisierte Nukleonen ist

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4\mu^2[(1+\zeta^2)\,V_0^2 + k^4\, a^2\, W_0^2 \sin^2\vartheta]}{\hbar^4\, q^2} \left|\int j_1(q\,r)\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\,\varrho(r)\right] r^3\, d\,r\right|^2. \tag{8.13.15}$$

Nimmt man an, daß die Radialabhängigkeit der Potentiale durch einen rechteckigen Potentialtopf wiedergegeben werden kann, d. h., daß

$$\varrho(r) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad r < R, \\ 0 & \text{für} \quad r > R \end{cases}$$

gilt, so wird

$$-\frac{d}{dr}\,\varrho(r) = \delta(r - R).$$

Führt man die Integration in (8.13.15) aus und setzt den Wert der sphärischen BESSEL-Funktion ein, so erhält man

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4\mu^2[(1+\zeta^2)V_0^2 + k^4 a^2 W_0^2 \sin^2\vartheta]}{\hbar^4} \left[\frac{\sin qR}{(qR)^3} - \frac{\cos qR}{(qR)^2}\right]^2 R^6. \qquad (8.13.16)$$

Untersuchen wir nun die Streuung polarisierter Nukleonen. Wir legen die Quantelungsachse z senkrecht zur Streuebene und die x-Achse in Richtung des Wellenvektors $\mathfrak{k}_a$ des einfallenden Nukleons. Der Spin des Nukleons sei nach „oben" gerichtet. Dann besitzen die Komponenten des Spins und des Einheitsvektors bei der Streuung nach links gleiche Vorzeichen, für die Streuung nach rechts entgegengesetzte Vorzeichen. Unter Benutzung von (8.13.7), (8.13.8b) und (8.13.9a) erhalten wir den differentiellen Streuquerschnitt für Nukleonen mit dem Spin nach „oben":

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{1/2} = |F_{1/2}(\vartheta)|^2 =$$

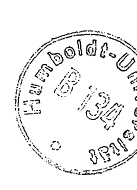
$$= \begin{cases} \dfrac{4\mu^2}{\hbar^4 q^2} \left|\displaystyle\int j_1(qr)\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\varrho(r)\right] r^3\,dr\right|^2 (V_0^2 + [W_0 a k^2 \sin\vartheta - \zeta V_0]^2) & \text{nach links,} \\ \dfrac{4\mu^2}{\hbar^4 q^2} \left|\displaystyle\int j_1(qr)\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\varrho(r)\right] r^3\,dr\right|^2 (V_0^2 + [W_0 a k^2 \sin\vartheta + \zeta V_0]^2) & \text{nach rechts.} \end{cases}$$

Die Intensitäten der nach links und nach rechts gestreuten polarisierten Neutronen sind somit unterschiedlich. Das Nukleon mit nach „oben" gerichtetem Spin wird mit einer kleineren Wahrscheinlichkeit nach links gestreut als unter dem gleichen Winkel nach rechts. Bei der Orientierung des Spins nach „unten" ist das Verhältnis der Wahrscheinlichkeiten für die Streuung nach links und nach rechts umgekehrt.

Die Polarisation von Nukleonen bei der Streuung an Kernen wird oft mit Hilfe der Zweifachstreuung untersucht. Das Nukleonenbündel wird am ersten Target gestreut und dabei teilweise polarisiert. Der Polarisationsgrad wird aus dem Unterschied der Intensitäten des am zweiten Target nach links und unter dem gleichen Winkel nach rechts gestreuten Bündels bestimmt (Rechts-Links-Asymmetrie). Diese Untersuchungen sind wegen der geringen Intensität des vom ersten Target kommenden Bündels polarisierter Nukleonen sehr kompliziert. Deshalb wurden in einer Reihe von Arbeiten polarisierte Nukleonen verwendet, die man durch Kernreaktionen an einigen leichten Kernen erhält. So benutzt man z. B. oft [8,29; 8,30] polarisierte Neutronen (≈ 400 keV), die aus der Reaktion ^{7}Li (p, n) ^{7}Be gewonnen werden.

Außer der oben betrachteten Nukleonenpolarisation, die bei der Streuung von Nukleonen mit einigen 100 MeV an schweren Kernen auftritt, ist die Polarisation von Interesse, die bei der Streuung an Resonanzniveaus entsteht, welche infolge der Spin-Bahn-Wechselwirkung aufgespalten sind. Diese Art der Polarisation wurde zuerst von SCHWINGER [8,31] am Beispiel der Streuung von Neutronen (≈ 1 MeV) an den Kernen des ^{4}He untersucht.

Wir betrachten die Polarisation eines anfänglich unpolarisierten Neutronenbündels bei der Streuung an ^{4}He-Kernen. Wir nehmen an, daß an der



Streuung nur s- und p-Wellen teilhaben. Bei der Streuung von Neutronen am ^{4}He kann der Compoundkern ^{5}He in den Zuständen $s_{1/2}$, $p_{3/2}$, $p_{1/2}$ gebildet werden. Die Zustände $p_{3/2}$ und $p_{1/2}$ entsprechen virtuellen Niveaus, die etwa 1,76 MeV [8,32] voneinander entfernt liegen. Wenn die Energie des Neutrons in das Gebiet der Resonanzenergie des $p_{3/2}$-Niveaus fällt, so werden hauptsächlich die Neutronen gestreut, deren Polarisation parallel zum Bahndrehimpuls gerichtet ist. Im Gebiet der Resonanzenergie des $p_{1/2}$-Niveaus werden vorwiegend Neutronen gestreut, deren Polarisation antiparallel zum Bahndrehimpuls gerichtet ist.

Im allgemeinen Fall kann man zeigen (s. Abschn. 7.4. und [8,33]), daß die Amplitude für die Streuung von Nukleonen an spinlosen Kernen in der Form (8.13.7) dargestellt werden kann:

$$F(\vartheta) = \{A + \vec{\sigma}\,\mathfrak{n}\,B\}\,\chi_{1/2 m_s}, \tag{8.13.7a}$$

d. h., sie besteht aus zwei Summanden, von denen der erste unabhängig von der Spinorientierung bezüglich $\mathfrak{n}$ ist, während der zweite von dieser Orientierung abhängt. Der Polarisationsvektor ist im allgemeinen Fall ebenfalls ein Ausdruck der Form (8.13.13), d. h., es gilt

$$\mathfrak{P}(\vartheta) = \mathfrak{n}\,\frac{A^* B + A B^*}{|A|^2 + |B|^2}; \tag{8.13.13a}$$

dabei ist

$$|A|^2 + |B|^2 = \frac{d\sigma}{d\Omega}. \tag{8.13.13b}$$

Aus (8.13.13a) folgt, daß bei der Streuung eine Polarisation nur dann möglich ist, wenn in (8.13.7a) beide Summanden gleichzeitig verschieden von Null sind. Bei der Streuung nichtpolarisierter Neutronen an Kernen entsteht eine Polarisation der elastisch gestreuten Neutronen also dann, wenn die Streuamplitude sowohl Summanden enthält, die von der Spinorientierung abhängen, wie auch Summanden, die von der Spinorientierung unabhängig sind. Die Polarisation wird durch Interferenz zwischen diesen beiden Teilen der Streuung hervorgerufen. Große Werte des Polarisationsgrades sind dann möglich, wenn die Größe der Interferenz vergleichbar mit dem Streuquerschnitt wird. In dem oben angeführten Beispiel der Streuung von Neutronen am ^{4}He ist die Interferenz der s-Streuung mit der $p_{3/2}$- und $p_{1/2}$-Streuung, die sehr breite Resonanzen besitzen, in einigen Energiegebieten stark und führt zu beträchtlichen Polarisationsgraden. Nach den Rechnungen von Seagrawe [8,34] erreicht die Polarisation bei der Streuung im Energiegebiet von 1 MeV und unter dem Winkel 90° (im Schwerpunktsystem) etwa 80%, bei Energien von etwa 2,5 MeV ändert der Polarisationsvektor sein Vorzeichen, und im Gebiet von etwa 6 MeV erreicht der Polarisationsgrad wieder Werte von 80% und bleibt bis zu Energien von etwa 20 MeV immer noch recht groß.

Eine beträchtliche Polarisation kann man auch bei der Streuung von Protonen an ^{4}He erwarten, da der Compoundkern ^{5}Li virtuelle Energie-

niveaus $p_{3/2}$ und $p_{1/2}$ besitzt, die mit den Energieniveaus des Compoundkerns ^{5}He korrespondieren (Spiegelkerne).

Die Streuung von Neutronen und Protonen am ^{4}He stellt eine der Methoden zur Erzeugung und Analyse von Bündeln polarisierter Nukleonen dar. Bei der Neutronenstreuung am ^{4}He treten die Polarisationseffekte nur in einem bestimmten Energieintervall ($1 \cdots 20$ MeV) auf. Da man Protonen abbremsen kann (durch Energieabgabe bei der Ionisierung des durchlaufenen Mediums), ohne daß eine Depolarisation eintritt, kann man durch Abbremsung (bis zu den gewünschten Energien) und Streuung am ^{5}He die Polarisation von Protonen untersuchen, deren Energie 30 MeV übersteigt.

Zur Erzeugung und Analyse polarisierter Neutronen werden auch die Kerne des ^{12}C und des ^{16}O benutzt (der Compoundkern ^{13}C besitzt die Resonanzniveaus $d_{3/2}$ bei 2,95 MeV und $s_{1/2}$ bei 3,04 MeV).

Betrachten wir nun die Theorie für die Polarisation von Neutronen an Kernen mit dem Spin 0, wenn für die Streuung nur die Phasenverschiebungen δ_0, $\delta_{1/2}$, $\delta_{3/2}$ wesentlich sind, die den Zuständen $s_{1/2}$, $p_{1/2}$ und $p_{3/2}$ entsprechen. Wird die Streuung durch die Phasenverschiebungen bestimmt, so kann man den Polarisationsvektor aus Formel (8.13.13a) erhalten, wobei nach Abschn. 7.4. die Größen A und B, welche in die Streuamplitude eingehen,

$$A = \frac{1}{k}\{\exp(i\,\delta_0)\sin\delta_0 + [2\exp(i\,\delta_{3/2})\sin\delta_{3/2} + \exp(i\,\delta_{1/2})\sin\delta_{1/2}]\cos\vartheta\},$$

$$B = \frac{i\sin\vartheta}{k}\{\exp(i\,\delta_{3/2})\sin\delta_{3/2} - \exp(i\,\delta_{1/2})\sin\delta_{1/2}\}$$

sind. Werden diese Größen in (8.13.13b) und (8.13.13a) eingesetzt, so erhalten wir den differentiellen Reaktionsquerschnitt

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega} = |A|^2 + |B|^2 = \frac{1}{k^2}\Big\{&[\sin^2\delta_0 + 2\sin^2\delta_{3/2} + \sin^2\delta_{1/2}]^2 + \\ &+ \left[\frac{1}{2}\sin 2\delta_0 + \sin 2\delta_{3/2} + \frac{1}{2}\sin 2\delta_{1/2}\right]^2 + \\ &+ \frac{\sin^2\vartheta}{4}(\sin 2\delta_{3/2} - \sin 2\delta_{1/2})^2 + \sin^2\vartheta\,(\sin^2\delta_{3/2} - \sin^2\delta_{1/2})^2\Big\}\end{aligned} \quad (8.13.17)$$

und den Polarisationsvektor

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}(\vartheta) = \mathfrak{n}\,\frac{2\sin\vartheta}{k^2}\Big\{&\frac{1}{2}(\sin 2\delta_{3/2} - \sin 2\delta_{1/2})\left(\frac{1}{2}\sin 2\delta_0 + \sin 2\delta_{3/2} + \frac{1}{2}\sin 2\delta_{1/2}\right) + \\ &+ (\sin^2\delta_{3/2} - \sin^2\delta_{1/2})(\sin^2\delta_0 + 2\sin^2\delta_{3/2} + \sin^2\delta_{1/2})\Big\}\left[\frac{d\sigma}{d\Omega}\right]^{-1}.\end{aligned} \quad (8.13.18)$$

Die energieabhängigen Phasenverschiebungen δ_0, $\delta_{1/2}$ und $\delta_{3/2}$ bestimmen den differentiellen Reaktionsquerschnitt und den Polarisationsvektor sowie deren Energieabhängigkeit.

Bei der Streuung von Neutronen kann man die Phasenverschiebungen δ_i als Summe zweier Glieder darstellen:

$$\delta_i = \beta_i + \gamma_i. \quad (8.13.19)$$

Die γ_i sind die Phasenverschiebungen der Resonanzstreuung, die β_i die Phasenverschiebungen für die Streuung, die nicht über Resonanzen verläuft. Die Abhängigkeit der γ_i von der Energie der Relativbewegung ε von Neutron und Kern wird durch die Resonanzenergie ε_i und die Breite Γ_i der Resonanz bestimmt:

$$\tan\gamma_i = \frac{\Gamma_i}{\varepsilon_i - \varepsilon}. \qquad (8.13.20)$$

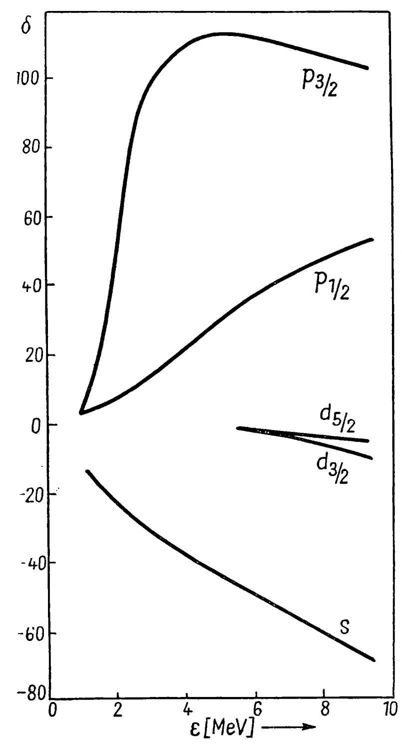


Abb. 63. Phasenverschiebungen δ bei der elastischen Streuung von Protonen am ^{4}He-Kern als Funktion der Protonenenergie

Bei der Streuung von Protonen besteht die Phasenverschiebung aus 3 Summanden:

$$\delta_l = \beta_l + \gamma_l + \alpha_l,$$

wobei die β_l und γ_l die gleiche Bedeutung besitzen wie bei der Streuung von Neutronen, während die α_l die Phasenverschiebungen sind, die durch das Coloumb-Feld hervorgerufen werden und Zuständen mit dem Bahndrehimpuls l entsprechen:

$$\alpha_l = \arg\Gamma\left(l + i\,\frac{Z\,e^2\,\mu}{\hbar^2\,k}\right).$$

Hierbei ist μ die reduzierte Masse. Das Zeichen arg bedeutet, daß das Argument der Gammafunktion Γ zu nehmen ist. In Abb. 63 sind die Phasenverschiebungen dargestellt [8,35], welche die Streuung von Protonen an den Kernen des ^{4}He im Energiegebiet von 1 bis 10 MeV charakterisieren. Mit Hilfe dieser Phasenverschiebungen kann man aus den Formeln (8.13.14) und (8.13.15) den differentiellen Querschnitt der elastischen Streuung und den Polarisationsgrad bei der elastischen Streuung von Protonen an den Kernen des ^{4}He berechnen.

KAPITEL 9*

FORMALE STREUTHEORIE

9.1. Die Streumatrizen S und T

Der allgemeinste Fall der Streuung, der neben der elastischen auch die unelastische Streuung und Kernreaktionen beinhaltet, wird am günstigsten mit einem Formalismus untersucht, der von SCHWINGER und LIPPMANN entwickelt worden ist [9,1]. Die Vorteile dieses Formalismus sind besonders dann augenscheinlich, wenn die übliche Störungsrechnung nicht angewendet werden kann, z. B. in der Theorie der Kernwechselwirkungen.

In der allgemeinen Streutheorie untersucht man die zeitliche Änderung des Zustands von Systemen, die aus zwei in Wechselwirkung stehenden Teilen bestehen. Die Wellenfunktion eines solchen Systems genügt der SCHRÖDINGER-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H \Psi, \tag{9.1.1}$$

in der der Operator H die Summe zweier HAMILTON-Operatoren darstellt:

$$H = H_0 + H_1. \tag{9.1.2}$$

H_0 ist der HAMILTON-Operator für den Fall, daß die beiden Teile des Systems unendlich weit voneinander entfernt sind, während H_1 die Wechselwirkung zwischen den beiden Teilen des Systems beschreibt. Der Operator H_1 geht gegen Null, wenn der Abstand zwischen den Teilen des Systems gegen ∞ geht.

Wir nehmen zunächst an, daß der Operator H_1 bei Vergrößerung des Abstands zwischen den Untersystemen so gegen Null geht, daß bei $r \to \infty$ und bei beliebigem kleinem positivem ε gilt

$$\lim_{r \to \infty} r^{2+\varepsilon} H_1(r) \to 0.$$

Den Fall, daß H_1 Summanden enthält, die mit wachsendem r langsamer abnehmen, betrachten wir später.

Mit Hilfe der unitären Transformation

$$\Psi(t) = \exp\left\{-i H_0 \frac{t}{\hbar}\right\} \Phi(t) \tag{9.1.3}$$

kann die Gl. (9.1.1) in der Wechselwirkungsdarstellung geschrieben werden:

$$i\hbar \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} = W(t)\, \Phi(t). \tag{9.1.4}$$

Hierbei ist

$$W(t) = \exp\left(i H_0 \frac{t}{\hbar}\right) H_1 \exp\left(-i H_0 \frac{t}{\hbar}\right). \tag{9.1.5}$$

Wir suchen die Lösung der Gl. (9.1.4) in der Form

$$\Phi(t) = U_+(t)\,\Phi(-\infty) = U_-(t)\,\Phi(\infty), \tag{9.1.6}$$

wobei $\Phi(-\infty)$ und $\Phi(\infty)$ die Wellenfunktion des Anfangs- und Endzustandes des Gesamtsystems sind. Die Operatoren $U_+(t)$ und $U_-(t)$ sind unitär:

$$U_+^+(t)\,U_+(t) = U_-^+(t)\,U_-(t) = 1, \tag{9.1.7}$$

und genügen den „Anfangsbedingungen"

$$U_+(-\infty) = U_-(\infty) = 1. \tag{9.1.8}$$

Wird (9.1.6) in (9.1.4) eingesetzt, so erhalten wir Gleichungen für die Operatoren $U_+(t)$ und $U_-(t)$:

$$i\hbar\frac{\partial U_+}{\partial t} = W(t)\,U_+,$$

$$i\hbar\frac{\partial U_-}{\partial t} = W(t)\,U_-. \tag{9.1.9}$$

Den Gln. (9.1.9) mit den Anfangsbedingungen (9.1.8) entsprechen folgende Integralgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} U_+(t) &= 1 - \frac{i}{\hbar}\int\limits_{-\infty}^{t} W(x)\,U_+(x)\,dx, \\ U_-(t) &= 1 + \frac{i}{\hbar}\int\limits_{t}^{\infty} W(x)\,U_-(x)\,dx. \end{aligned}\right\} \tag{9.1.10}$$

Wir führen nun die Eigenfunktionen des Operators H_0 ein:

$$H_0\,\Phi_a = E_a\,\Phi_a,$$

$$H_0\,\Phi_b = E_b\,\Phi_b.$$

Setzt man voraus, daß die Wechselwirkung H_1 bei $t \to -\infty$ adiabatisch eingeschaltet und bei $t \to +\infty$ adiabatisch ausgeschaltet wird, d. h., setzt man

$$H_1 = V\exp\left(-\eta\frac{|t|}{\hbar}\right), \tag{9.1.11}$$

so geht bei $t \to \pm\infty$ der Operator H in den Operator H_0 über; folglich sind die Eigenfunktionen Φ_a und Φ_b bei $t \to \pm\infty$ auch Eigenfunktionen des Gesamtoperators H. In den Endformeln werden wir immer den Grenzübergang $\eta \to 0$ vornehmen.

Der Anfangszustand Φ_a kann durch den Wellenvektor $\mathfrak{k}_a$ der ebenen Welle, die der Relativbewegung der beiden stoßenden Untersysteme entspricht, sowie durch den inneren Zustand der beiden Untersysteme bestimmt werden. Die Relativbewegung der Untersysteme kann man auch durch ein- und auslaufende Partialwellen darstellen, die einem bestimmten Drehimpuls entsprechen (s-, p-, d-, ... Wellen). Diese Art der Darstellung ist besonders dann für die Beschreibung des Anfangszustands des Systems

günstig, wenn die Streuung in einem zentralsymmetrischen Feld erfolgt. In diesem Fall ist der Gesamtdrehimpuls des Systems ein Bewegungsintegral, und wenn sich der innere Zustand der Untersysteme nicht verändert, so wird der Streuprozeß durch eine diagonale Streumatrix beschrieben, d. h., eine Welle mit gegebener Quantenzahl l bleibt eine l-Welle, es ändert sich nur ihre Phase.

Wenn sich im Anfangsmoment $(t \to -\infty)$ das System im Zustand Φ_a befand, so wird zum Zeitpunkt $t \to +\infty$ der Zustand durch die Funktion

$$\Psi_a^+ = S\,\Phi_a \tag{9.1.12}$$

bestimmt, wobei $S = U_+(\infty)$ ist. Die Wahrscheinlichkeit für den Übergang aus dem Zustand a in den Zustand b ist deshalb

$$w_{ba} = |(\Phi_b, \Psi_a^+)|^2 = |(\Phi_b, S\,\Phi_a)|^2 \equiv |S_{ba}|^2. \tag{9.1.13}$$

Aus (9.1.7) folgt unmittelbar, daß der Streuoperator S unitär ist.

Wir führen nun einen neuen Streuoperator ein:

$$\mathsf{T} = S - 1. \tag{9.1.14}$$

Dann ist für $b \neq a$

$$w_{ba} = |\mathsf{T}_{ba}|^2 \equiv |(\Phi_b, \mathsf{T}\,\Phi_a)|^2. \tag{9.1.15}$$

Der Streuoperator T wird nach (9.1.10) durch die Integralgleichung

$$\mathsf{T} = -\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} W(t)\,U_+(t)\,dt \tag{9.1.16}$$

definiert. Wird (9.1.16) in (9.1.15) eingesetzt und (9.1.5) sowie (9.1.11) berücksichtigt, so erhält man

$$\mathsf{T}_{ba} = -\frac{i}{\hbar}\left(\Phi_b,\ V\varphi_a^+(E_b)\right). \tag{9.1.17}$$

Dabei gilt

$$\varphi_a^+(E_b) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{i(E_b - H_0)\frac{t}{\hbar}\right\} e^{-\eta\frac{|t|}{\hbar}}\,U_+(t)\,dt\,\Phi_a. \tag{9.1.18}$$

Der zu T hermitesch konjugierte Operator kann nach (9.1.14) durch $S^+ = S^{-1}$ ausgedrückt werden:

$$\mathsf{T}^+ = S^+ - 1 = S^{-1} - 1.$$

Wird (9.1.2) benutzt, so erhält man

$$\Phi(-\infty) = U_-(-\infty)\,\Phi(\infty).$$

Wir können deshalb $S^{-1} = U_-(-\infty)$ setzen. Unter Berücksichtigung von (9.1.10) erhalten wir dann

$$\mathsf{T}_{ba}^+ \equiv (\Phi_b, \mathsf{T}^+\Phi_a) = \frac{i}{\hbar}\left(\Phi_b,\ V\,\varphi_a^-(E_b)\right). \tag{9.1.19}$$

Dabei ist

$$\varphi_a^-(E_b) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{i(E_b - H_0)\frac{t}{\hbar}\right\} e^{-\eta\frac{|t|}{\hbar}} U_-(t)\, dt\, \Phi_a. \qquad (9.1.20)$$

Aus (9.1.19) folgt

$$\mathsf{T}_{ab} = -\frac{i}{\hbar}\left(\varphi_a^-(E_b),\, V\,\Phi_b\right).$$

Vertauscht man in dieser Gleichung a mit b, so kann man schreiben

$$\mathsf{T}_{ba} = -\frac{i}{\hbar}\left(\varphi_b^-(E_a),\, V\,\Phi_a\right). \qquad (9.1.21)$$

Die Matrix T_{ba} kann somit in den beiden äquivalenten Formen (9.1.17) und (9.1.21) ausgedrückt werden.

Laut Definition ist $\Phi_a = \Phi(-\infty)$. Die Gl. (9.1.6) nimmt somit die Form

$$\Phi_a(t) = U_+(t)\,\Phi_a$$

an. Wird auf beide Seiten der Gleichung der Operator $\exp(-i\,H_0\,t/\hbar)$ angewendet, so gehen wir entsprechend (9.1.3) zur SCHRÖDINGER-Darstellung der Wellenfunktion über:

$$e^{-\frac{iH_0 t}{\hbar}}\, U_\pm(t)\,\Phi_a = \Psi^\pm(t) = \Psi_a^\pm\, e^{-iE_a\frac{t}{\hbar}}, \qquad (9.1.22)$$

wobei die $\Psi_a^\pm$ nicht mehr von der Zeit abhängen.

Wird diese Gleichung in (9.1.18) eingesetzt, so erhält man nach einfachen Umformungen

$$\varphi_a^+(E_b) = 2\pi\,\hbar\,\delta(E_b - E_a)\,\Psi_a^+. \qquad (9.1.23)$$

Ganz analog kann man zeigen, daß

$$\varphi_b^-(E_a) = 2\pi\,\hbar\,\delta(E_b - E_a)\,\Psi_b^- \qquad (9.1.24)$$

ist.

Wir führen nun die neue Streumatrix T_{ba} durch die Beziehung

$$\mathsf{T}_{ba} = -2\pi\,i\,\delta(E_b - E_a)\,T_{ba} \qquad (9.1.25)$$

ein. Dann können wir unter Benutzung von (9.1.17), (9.1.23), (9.1.21) und (9.1.24) schreiben:

$$T_{ba} = (\Phi_b,\, V\,\Psi_a^+) = (\Psi_b^-,\, V\,\Phi_a). \qquad (9.1.26)$$

Aus (9.1.25) folgt, daß die Matrix T_{ba} Zuständen a und b entspricht, die zu ein und derselben Energiefläche gehören.

Leiten wir nun die Gleichungen ab, die die Funktionen Ψ_a^+ und Ψ_b^- bestimmen. Unter Benutzung von (9.1.10) finden wir

$$U_+(t)\,\Phi_a = \Phi_a - \frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{t} W(x)\,U_+(x)\,dx\,\Phi_a.$$

Werden beide Seiten der Gleichung mit $\exp\{i(E_b - H_0)\,t/\hbar\}$ multipliziert und über t von $-\infty$ bis $+\infty$ integriert, so erhalten wir unter Berücksichtigung von (9.1.18)

$$\varphi_a^+(E_b) = 2\pi\,\hbar\,\delta(E_b - E_a)\,\Phi_a - \frac{i}{\hbar}\,I.$$

Hierbei ist

$$I \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{t} dx \exp\left\{i(E_b - H_0)\frac{t}{\hbar}\right\} W(x)\,U_+(x)\,\Phi_a.$$

Wird (9.1.5), (9.1.11) und (9.1.22) benutzt, so kann man I auf folgende Form bringen:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{t} dx \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[(E_b - E_a)\,t + (H_0 - E_a)\,(x - t)\right]\right\} e^{-\frac{\eta'|x|}{\hbar}}\,V\,\Psi_a^+.$$

Führen wir die neue Variable $\zeta = t - x$ ein, die sich in den Grenzen $(0, \infty)$ ändert, so erhalten wir

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp\left\{\frac{i}{\hbar}(E_b - E_a)\,t\right\} \int_0^{\infty} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}(E_a - H_0 + i\,\eta)\,\zeta\right\} V\,\Psi_a^+\,d\zeta =$$

$$= -\frac{2\pi\,\hbar^2\,\delta(E_b - E_a)}{i(E_a - H_0 + i\,\eta)}\,V\,\Psi_a^+.$$

Wird dies in den Ausdruck für $\varphi_a^+(E_b)$ eingesetzt und (9.1.23) berücksichtigt, so erhalten wir eine Integralgleichung für Ψ_a^+:

$$\Psi_a^+ = \Phi_a + (E_a - H_0 + i\,\eta)^{-1}\,V\,\Psi_a^+. \tag{9.1.27a}$$

Ganz analog läßt sich die Integralgleichung für Ψ_a^- finden:

$$\Psi_a^- = \Phi_a + (E_a - H_0 - i\,\eta)^{-1}\,V\,\Psi_a^-. \tag{9.1.27b}$$

Lösen wir eine der Integralgleichungen (9.1.27a) oder (9.1.27b), so erhalten wir die Funktion Ψ_a^+ oder Ψ_a^- und können somit über (9.1.26) die Streumatrix T_{ba} berechnen.

Im speziellen Fall der elastischen Streuung eines Teilchens der Masse μ im Potentialfeld $V(\mathfrak{r})$ besitzt der Hamilton-Operator H_0 die Form $H_0 = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2$, und die Gl. (9.1.27a) führt zu der Integralgleichung

$$\Psi_a^+ = \Phi_a - \frac{\mu}{2\pi\,\hbar^2}\int \frac{e^{ik|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}'|}}{|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}'|}\,V(\mathfrak{r}')\,\Psi_a^*(\mathfrak{r}')\,d\mathfrak{r}'.$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß im Zeitintervall von 0 bis t der Übergang $\Phi_a \to \Phi_b \neq \Phi_a$ vor sich geht, wird nach Gl. (9.1.10) durch die Gleichung

$$W_{ba} = \left|\left(\Phi_b,\ [U_+(t) - 1]\,\Phi_a\right)\right|^2 = \frac{1}{\hbar^2}\left|\left(\Phi_b,\ \int_0^1 W(x)\,U_+(x)\,dx\,\Phi_a\right)\right|^2$$

bestimmt. Setzen wir aus (9.1.5) die Größe

$$W(x) = \exp\left(\frac{i H_0 x}{\hbar}\right) e^{-\eta \frac{x}{\hbar}} V \exp\left(-\frac{i H_0 x}{\hbar}\right)$$

ein und berücksichtigen, daß nach (9.1.22) gilt

$$e^{-\frac{i H_0 x}{\hbar}} U_+(x) \Phi_a = \Psi_a^+ e^{\frac{-i E_0 x}{\hbar}},$$

so erhalten wir

$$W_{ba}(t) = \frac{1}{\hbar^2} |(\Phi_b, V \Psi_a^+)|^2 \left| \int_0^t \exp\left\{ i \frac{(E_b - E_a + i\eta) x}{\hbar} \right\} dx \right|^2.$$

Das letzte Integral muß unter der Bedingung $\eta \to 0$ berechnet werden. Mit

$$\frac{1 - \cos \zeta t}{\pi t \zeta^2} = \delta(\zeta) \quad \text{für} \quad t \gg 1$$

folgt

$$W_{ba}(t) = \frac{2\pi}{\hbar} t |(\Phi_b, V \Psi_a^+)|^2 \delta(E_b - E_a).$$

Die Übergangswahrscheinlichkeit je Zeiteinheit (P_{ba}) wird somit durch die Beziehung

$$P_{ba} = \frac{2\pi}{\hbar} |(\Phi_b, V \Psi_a^+)|^2 \delta(E_b - E_a)$$

oder unter Berücksichtigung von (9.1.26) durch

$$P_{ba} = \frac{2\pi}{\hbar} |T_{ba}|^2 \delta(E_b - E_a) \tag{9.1.28}$$

bestimmt. Gl. (9.1.28) zeigt, daß die Übergänge nur zwischen Zuständen mit gleicher Energie vor sich gehen können. Wenn das Matrixelement (9.1.26) in der ersten BORNschen Näherung berechnet wird, so wird (9.1.28) gleich dem üblichen Ausdruck für die Übergangswahrscheinlichkeit je Zeiteinheit für Übergänge zwischen den Zuständen a und b unter der Wirkung der Störung V.

Die Formel (9.1.28) bestimmt die auf die Zeiteinheit bezogene Wahrscheinlichkeit für den Übergang aus dem Zustand a in den Zustand $b \neq a$. Die allgemeinere Formel für die Übergangswahrscheinlichkeit je Zeiteinheit, die auch den Fall $a = b$ einschließt, besitzt folgende Form [9,2]:

$$P_{ba} = \frac{2}{\hbar} (\Phi_b, \Phi_a)^* \,\mathfrak{Im}\, T_{ba} + \frac{2\pi}{\hbar} \delta(E_a - E_b) |T_{ba}|^2. \tag{9.1.28a}$$

Es ist leicht zu zeigen, daß durch Summieren (Integrieren) von (9.1.28a) über alle Zustände b (einschließlich $b = a$) und unter Berücksichtigung von

$$\sum_b P_{ba} = \sum_b \frac{dW(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_b W_b(t) = 0 \quad \text{wegen} \quad \sum_b W_{ba}(t) = 1$$

die nützliche Beziehung

$$\pi \sum_b |T_{ba}|^2 \,\delta(E_a - E_b) = -\Im\mathfrak{m}\, T_{aa} \tag{9.1.28b}$$

erhalten werden kann. Sie liegt einem Theorem zugrunde, das den Imaginärteil der Streuamplitude für Vorwärtsstreuung mit dem Gesamtquerschnitt der Streuung verknüpft.

Durch die Formeln (9.1.26) bis (9.1.28) ist die zeitabhängige Streuaufgabe auf die stationäre Aufgabe zurückgeführt. Die Einführung der kleinen imaginären Größe $i\eta$ in Gl. (9.1.27) gestattet, die Lösungen, die auslaufenden Wellen entsprechen, von den einlaufenden Wellen abzutrennen; sie ist dem adiabatischen Einschalten und Ausschalten der Wechselwirkung in der zeitabhängigen Streutheorie oder einer bestimmten Mittelung über Anfangs- und Endzustand äquivalent, die von Gell-Mann und Goldberger vorgeschlagen wurde [9,3; 9,4].

Die Streumatrix T_{ba} kann nach der Variationsmethode berechnet werden, da sie gleich dem Extremwert des Funktionals

$$\begin{aligned}\{T_{ba}\} = &\left(\left[\Phi_b - \frac{1}{2}\{\Psi_b^- - (E - H_0 - i\eta)^{-1} V \Psi_b^-\}\right], V\Psi_a^+\right) + \\ &+ \left(\Psi_b^-, V\left[\Phi_a - \frac{1}{2}\{\Psi_a^+ - (E - H_0 + i\eta)^{-1} V\Psi_a^+\}\right]\right) \equiv \\ &\equiv (\Phi_b, V\Psi_a^+) + (\Psi_b^-, V\Phi_a) - (\Psi_b^-, V\Psi_a^+) + \\ &+ (\Psi_b^-, V(E - H_0 + i\eta)^{-1} V\Psi_a^+)\end{aligned} \tag{9.1.29}$$

bei unabhängiger Variation von Ψ_a^+ und Ψ_b^- ist.

Aus der Extremalbedingung

$$\begin{aligned}\delta\{T_{ba}\} = &([\Phi_b - \Psi_b^- + (E - H_0 - i\eta)^{-1} V\Psi_b^-], V\delta\Psi_a^+) + \\ &+ (\delta\Psi_b^-, V[\Phi_a - \Psi_a^+ + (E - H_0 + i\eta)^{-1} V\Psi_a^+]) = 0\end{aligned}$$

folgen tatsächlich die beiden Integralgleichungen

$$\Phi_a = \Psi_a^+ - (E - H_0 + i\eta)^{-1} V\Psi_a^+,$$
$$\Phi_b = \Psi_b^- - (E - H_0 - i\eta)^{-1} V\Psi_b^-,$$

die mit (9.1.27) zusammenfallen und zum Extremum des Funktionals (9.1.29) führen:

$$\{T_{ba}\}_{\text{extr}} = \frac{1}{2}\{(\Phi_b, V\Psi_a^+) + (\Psi_b^-, V\Phi_a)\} = T_{ba}.$$

Werden durch die Beziehungen

$$\Psi_a^+ = \Omega^+ \Phi_a \quad \text{und} \quad \Psi_b^- = (\Omega^-)^+ \Phi_b \tag{9.1.30}$$

die neuen Operatoren Ω^+ und Ω^- eingeführt, so ergeben die Integralgleichungen (9.1.27a) und (9.1.27b) folgende beide Operatorgleichungen:

$$\Omega^+ = 1 + (E - H_0 + i\eta)^{-1} V\Omega^+, \tag{9.1.31}$$

$$(\Omega^-)^+ = 1 + (E - H_0 - i\eta)^{-1} V(\Omega^-)^+. \tag{9.1.32}$$

Da H_0 und V hermitesche Operatoren sind, können wir die Gl. (9.1.32) in der Form

$$\Omega^- = 1 + \Omega^- V(E - H_0 + i\eta)^{-1} \tag{9.1.32a}$$

schreiben. Die Operatorgleichungen (9.1.31) und (9.1.32a) können durch die Gleichungen

$$\Omega^+ = 1 + (E - H + i\eta)^{-1} V, \tag{9.1.33}$$

$$\Omega^- = 1 + V(E - H + i\eta)^{-1} \tag{9.1.34}$$

ersetzt werden, in denen $H = H_0 + V$ ist. Von der Richtigkeit kann man sich durch unmittelbares Einsetzen überzeugen, wenn man die folgende Operatoridentität berücksichtigt:

$$(E - H_0 + i\eta)^{-1} + (E - H_0 + i\eta)^{-1} V(E - H_0 - V + i\eta)^{-1} \equiv (E - H + i\eta)^{-1}.$$

Mit (9.1.30) kann man das Matrixelement (9.1.26) in der Form

$$T_{ba} = (\Phi_b, V\,\Omega^+ \Phi_a) = (\Phi_b, \Omega^- V \Phi_a) \tag{9.1.35}$$

oder

$$T_{ba} = (\Phi_b, T \Phi_a) \tag{9.1.35a}$$

darstellen, wobei

$$T = V\,\Omega^+ = \Omega^- V \tag{9.1.35b}$$

ist. Nach (9.1.31) ergibt sich der Streuoperator T auf der Energiefläche aus der Operatorgleichung

$$T = V + V(E - H_0 + i\eta)^{-1} T. \tag{9.1.36}$$

Beweisen wir nun den Zusammenhang zwischen den Matrixelementen des direkten und des zeitlich umgekehrten Übergangs, den wir in Abschn. 8.3. benutzt hatten:

$$T_{ba} = T_{-a,\,-b}. \tag{9.1.37}$$

Für den Beweis sei daran erinnert (s. Abschn. 8.3.), daß laut Definition der zum Zustand Φ_a zeitlich umgekehrte Zustand Φ_{-a} mit Hilfe des Operators der Zeitumkehr O erhalten wird:

$$\Phi_{-a} = O\,\Phi_a^*, \tag{9.1.38}$$

wobei sich der unitäre Operator O aus der Gleichung

$$O^{-1} H O = O^+ H O = H^* \tag{9.1.39}$$

bestimmt. Hierbei ist H der HAMILTON-Operator des Systems.

Da der Operator der Zeitumkehr unitär ist, kann man unter Benutzung von (9.1.38) das Matrixelement (9.1.35) auf folgende Weise umformen:

$$T_{ba} \equiv (\Phi_b, \Omega^- V \Phi_a) = (\Phi_{-b}^*, O^+ \Omega^- O\, O^+ V O\, \Phi_{-a}^*). \tag{9.1.40}$$

Die Operatoren H und V sind hermitesch. Deshalb folgt aus (9.1.39) und (9.1.34) die Beziehung

$$O^+ \Omega^- O = 1 + V^*(E - H^* + i\eta)^{-1} = (\tilde{\Omega}^+).$$

Wird mit Hilfe dieser Gleichung der Ausdruck (9.1.40) umgeformt, so erhalten wir das gesuchte Ergebnis:

$$T_{ba} = \left(\Phi^*_{-b},\ (\Omega^+)^+ V\, \Phi^*_{-a}\right) = (\Phi_{-a},\ V\,\Omega^+\,\Phi_{-b}) = T_{-a,\,-b}.$$

Um den Zusammenhang der Matrix (T_{ba}) mit der Streuamplitude herzustellen, betrachten wir die Integralgleichung (9.1.27a):

$$\Psi_a^+ = \Phi_a + (E_a - H_0 + i\,\eta)^{-1}\, V\,\Psi_a^+,$$

die die exakte Wellenfunktion des Streuproblems bestimmt. Der Operator H_0 in (9.1.27a) kann als Summe von Operatoren dargestellt werden; die Summanden sind die kinetische Energie der Relativbewegung von Kern und gestreutem Teilchen sowie der Operator, der den inneren Zustand von Kern und Teilchen bestimmt. Die Wellenfunktionen des Anfangs- und Endzustands des Systems sind

$$\Phi_a = \varphi_a(\xi)\exp(i\,\mathfrak{k}_a\,\mathfrak{r}),$$

$$\Phi_b = \varphi_b(\xi)\exp(i\,\mathfrak{k}_b\,\mathfrak{r}).$$

Sie sind so normiert, daß der Fluß zahlenmäßig gleich der Geschwindigkeit der Relativbewegung ist. Die Wellenfunktionen $\varphi_a(\xi)$ und $\varphi_b(\xi)$ bestimmen den inneren Zustand (einschließlich der Spins) von Kern und Teilchen.

Die Anfangs- und Endenergie des Systems kann in der Form

$$E_a = E_{\mathrm{A}} + \frac{\hbar^2 k_a^2}{2\mu}, \qquad E_b = E_{\mathrm{B}} + \frac{\hbar^2 k_b^2}{2\mu} \tag{9.1.41}$$

geschrieben werden, wobei μ die reduzierte Masse, E_{A} und E_{B} die Anfangs- und Endenergie bedeuten.

Schreiben wir nun die Integralgleichung (9.1.27a) explizit:

$$\Psi_a(\mathfrak{r},\,\xi) = \Phi_a(\mathfrak{r},\,\xi) + \int G(\mathfrak{r}\,\xi;\ \mathfrak{r}'\,\xi')\,V(\mathfrak{r}',\,\xi')\,\Psi_a(\mathfrak{r}',\,\xi')\,d\xi'\,d\mathfrak{r}'. \tag{9.1.42}$$

In dieser Gleichung ist $G(\mathfrak{r}\,\xi;\ \mathfrak{r}'\,\xi')$ die Greenasche Funktion des Operators H_0, die mit dessen Eigenfunktionen

$$\chi_b = (2\pi)^{-3/2}\,\varphi_b(\xi)\exp(i\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{r}) \tag{9.1.43}$$

durch die Gleichung

$$G(\mathfrak{r}\,\xi;\ \mathfrak{r}'\,\xi') = \sum_b \int \chi_b\,(E_a - H_0 + i\,\eta)^{-1}\,\chi_b^*\,dq \tag{9.1.44}$$

definiert ist. Die Eigenfunktionen sind dabei folgendermaßen normiert:

$$\int \chi_{b'}^*(\mathfrak{r},\,\xi)\,\chi_b(\mathfrak{r},\,\xi)\,d\xi\,d\mathfrak{r} = \delta(\mathfrak{q} - \mathfrak{q}')\,\delta_{bb'}.$$

Berücksichtigt man die explizite Form der Funktionen (9.1.43) und die Relation

$$(E_a - H_0 + i\,\eta)\,\chi_b^* = \frac{\hbar^2}{2\mu}\,(k_b^2 - q^2 + i\,\eta')\,\chi_b^*,$$

in der

$$k_b^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2}\left(E_{\mathrm{A}} + \frac{\hbar^2 k_a^2}{2\mu} - E_{\mathrm{B}}\right) = \frac{2\mu}{\hbar^2}\,(E_a - E_{\mathrm{B}})$$

bedeutet, so kann man (9.1.44) in der Form

$$G = \frac{2\mu}{\hbar^2} \sum_b \int \frac{d\mathfrak{q}}{(2\pi)^3} \frac{\varphi_b(\xi)\,\varphi_b^*(\xi')}{k_b^2 - q^2 - i\eta'} \exp\{i\,\mathfrak{q}\,(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}')\}$$

schreiben. Wird weiterhin die Gleichung

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{\exp(i\,\mathfrak{k}\,\mathfrak{x})\,d\,\mathfrak{k}}{k_0^2 - k^2 + i\,\eta} = -\frac{\exp(i\,k_0\,|\mathfrak{x}|)}{4\pi\,|\mathfrak{x}|}$$

beachtet, so erhalten wir als endgültigen Ausdruck für die GREENsche Funktion

$$G(\mathfrak{r}\,\xi;\mathfrak{r}'\,\xi') = -\frac{\mu}{2\pi\,\hbar^2} \sum_b \varphi_b(\xi)\,\varphi_b^*(\xi')\,\frac{\exp(i\,k_b\,|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|)}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|}. \tag{9.1.45}$$

Mit Hilfe von (9.1.45) läßt sich die Integralgleichung (9.1.42) umformen:[1])

$$\Psi_a(\mathfrak{r},\xi) = \Phi_a(\mathfrak{r},\xi) -$$
$$- \frac{\mu}{2\pi\,\hbar^2} \sum_b \varphi_b(\xi) \int \varphi_b^*(\xi')\,\frac{\exp(i\,k_b\,|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|)}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|}\, V(\mathfrak{r}',\xi')\,\Psi_a(\mathfrak{r}',\xi')\,d\xi'\,d\mathfrak{r}'. \tag{9.1.46}$$

Für $r \to \infty$ kann man $k_b\,|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|$ durch $k_b\,r - \mathfrak{k}_b\,\mathfrak{r}'$ ersetzen, wobei $\mathfrak{k}_b$ der Wellenvektor in Richtung des Radiusvektors $\mathfrak{r}$ ist. Den asymptotischen Wert von (9.1.46) für große r kann man deshalb in der Form

$$\Psi_a(\mathfrak{r},\xi) = \Phi_a(\mathfrak{r},\xi) + \sum_b A_{ba}\,\varphi_b(\xi)\,\frac{\exp(i\,k_b\,r)}{r} \tag{9.1.47}$$

schreiben, wobei

$$A_{ba} = -\frac{\mu}{2\pi\,\hbar^2} \int \varphi_b^*(\xi)\,e^{-i\mathfrak{k}_b\mathfrak{r}}\,V(\mathfrak{r},\xi)\,\Psi_a(\mathfrak{r},\xi)\,d\mathfrak{r}\,d\xi$$
$$= -\frac{\mu}{2\pi\,\hbar^2}(\Phi_b, V\,\Psi_a) = -\frac{\mu}{2\pi\,\hbar^2}(\Phi_b, T\,\Phi_a) \tag{9.1.48}$$

gilt. Für Übergänge aus dem Zustand a in den Zustand b gibt die Gleichung (9.1.48) den Zusammenhang zwischen der Streuamplitude und der Matrix

$$T_{ba} = (\Phi_b, T\,\Phi_a)$$

an. Um den differentiellen Streuquerschnitt bestimmen zu können, genügt es zu wissen, daß der Teilchenstrom in die Raumwinkeleinheit in Richtung $\mathfrak{k}_b$ durch die Streuamplitude durch den einfachen Ausdruck

$$\frac{\hbar\,\mathfrak{k}_b}{\mu}\,|A_{ba}|^2$$

gegeben ist. Dividiert man dies durch die Stromdichte der einfallenden Teilchen, so ergibt sich der gesuchte Wirkungsquerschnitt:

$$\frac{d\,\sigma_{ba}}{d\,\Omega} = \frac{k_b}{k_a}\,|A_{ba}|^2. \tag{9.1.49}$$

[1]) Gl. (9.1.46) bezieht sich nur auf offene Kanäle.

9.2. Der hermitesche Streuoperator

Der im vorhergehenden Abschnitt eingeführte Operator T (oder T) war nicht unitär und nicht hermitesch. Wir wollen jetzt zeigen, daß man einen hermiteschen Streuoperator einführen kann, mit dessen Hilfe ebenfalls beliebige Streuaufgaben gelöst werden können.

Neben den bereits in Abschn. 9.1. untersuchten Operatoren $U_+(t)$, $U_-(t)$, $S \equiv U_+(\infty)$ und $S^{-1} \equiv U_-(-\infty)$ führen wir den Operator

$$U_1(t) = U_+(t)\frac{2}{1+S} = U_-(t)\frac{2}{1+S^{-1}} \tag{9.2.1}$$

ein. Da die Operatoren S und S^{-1} nicht von der Zeit abhängen, genügt $U_1(t)$ derselben Differentialgleichung wie $U_\pm(t)$:

$$\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - W(t)\right]U_1(t) = 0. \tag{9.2.2}$$

An Stelle von (9.2.2) schreiben wir die Integralgleichungen

$$\left.\begin{aligned} U_1(t) &= U_1(\infty) + \frac{i}{\hbar}\int_t^\infty W(x)\,U_1(x)\,dx, \\ U_1(t) &= U_1(-\infty) - \frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^t W(x)\,U_1(x)\,dx. \end{aligned}\right\} \tag{9.2.3}$$

Aus (9.2.1) folgt unter Berücksichtigung von (9.1.8), daß

$$U_1(-\infty) = \frac{2}{1+S}, \tag{9.2.4}$$

$$U_1(\infty) = \frac{2S}{1+S} \tag{9.2.5}$$

ist. Aus (9.2.4) und (9.2.5) ergeben sich 2 Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} U_1(\infty) + U_1(-\infty) &= 2, \\ U_1(\infty) &= U_1^+(-\infty). \end{aligned}\right\} \tag{9.2.6}$$

Man kann diesen Gleichungen genügen, wenn man

$$\left.\begin{aligned} U_1(\infty) &= 1 - \frac{i}{2}K, \\ U_1(-\infty) &= 1 + \frac{i}{2}K \end{aligned}\right\} \tag{9.2.7}$$

setzt, wobei K ein hermitescher Operator ist, d. h. $K^+ = K$ gilt. Aus den Beziehungen (9.2.4) und (9.2.5) folgt weiterhin

$$\frac{U_1(\infty)}{U_1(-\infty)} = S. \tag{9.2.7a}$$

Wird nunmehr (9.2.7) benutzt, so erhält man den Zusammenhang zwischen den Streuoperatoren S und K:

$$S = \frac{1 - \frac{i}{2} K}{1 + \frac{i}{2} K}. \tag{9.2.8}$$

Benutzen wir noch die Gleichung $\mathsf{T} = S - 1$, so finden wir den Zusammenhang zwischen den Streuoperatoren K und T:

$$-i K = \mathsf{T} + \frac{i}{2} K \mathsf{T}. \tag{9.2.9}$$

Aus (9.2.3) und (9.2.7) folgt

$$K = \frac{1}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} W(t)\, U_1(t)\, dt.$$

Unter Berücksichtigung dieser Gleichung berechnen wir die Matrix K_{ba}. Wir benutzen dazu (9.1.5) sowie (9.1.11) und erhalten

$$K_{ba} \equiv (\Phi_b, K \Phi_a) = \left(\Phi_b, V \varphi_a^1(E_b)\right), \tag{9.2.10}$$

wobei

$$\varphi_a^1(E_b) = \lim_{\eta \to 0} \frac{1}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{i (E_b - H_0) \frac{t}{\hbar} - \eta \frac{|t|}{\hbar}\right\} U_1(t)\, dt\, \Phi_a$$

gilt. Wird

$$\mathrm{e}^{i (E_a - H_0)/\hbar}\, U_1(t)\, \Phi_a = \Psi_a^1 \tag{9.2.11}$$

gesetzt, so ergibt sich

$$\varphi_a^1(E_b) = 2\pi\, \delta(E_a - E_b)\, \Psi_a^1. \tag{9.2.12}$$

Führen wir nun die neue hermitesche Matrix K'_{ba} (die sogenannte *Reaktionsmatrix*) nach der Gleichung

$$K_{ba} = 2\pi\, \delta(E_a - E_b)\, K'_{ba} \tag{9.2.13}$$

ein, so können wir mit (9.2.12) die Beziehung (9.2.10) auf die Form

$$K'_{ba} = (\Phi_b, V \Psi_a^1) \tag{9.2.14}$$

bringen. Es ist jetzt noch die Gleichung für die Funktion Ψ_a^1 abzuleiten. Wir addieren die Gln. (9.2.3) und erhalten unter Berücksichtigung von (9.2.6) die Beziehung

$$U_1(t) = 1 - \lim_{\eta \to 0} \frac{i}{2\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sign}(t - t')\, W(t')\, U_1(t')\, dt', \tag{9.2.15}$$

wobei $\operatorname{sign}(t - t') = \frac{t - t'}{|t - t'|}$ das Vorzeichen von $t - t'$ angibt. Wird (9.2.15) von links mit $\exp\{i (E_a - H_0)\, t/\hbar\}$ und von rechts mit Φ_a multipliziert, so finden wir unter Berücksichtigung von (9.2.11)

$$\Psi_a^1 = \Phi_a + \mathsf{P}(E_a - H_0)^{-1}\, V \Psi_a^1, \tag{9.2.16}$$

wobei das Zeichen P bedeutet, daß der Hauptwert des Integrals zu nehmen ist:

$$\mathsf{P}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\,d\,x \equiv \lim_{\eta\to 0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{x^2+\eta^2}\,f(x)\,d\,x.$$

Die Integralgleichung (9.2.16) kann man als formale Lösung der Differentialgleichung

$$(E_a - H_0)\,\Psi = V\,\Psi$$

betrachten. Diese Lösung entspricht stehenden Wellen und keinen auslaufenden, wie die Lösungen von (9.1.27a), oder einlaufenden, wie die Lösungen von (9.1.27b). Spezialfälle der Gleichungen vom Typ (9.2.16) wurden bei der Untersuchung der Streuung von Teilchen im zentralsymmetrischen Feld betrachtet (Abschn. 7.3.).

Die Matrix K'_{ba} ergibt sich aus der Extremalbedingung für folgende 2 Funktionale zusammen (bei unabhängiger Variation von Ψ'_a und Ψ'_b):

$$\{K'_{ba}\} = (\Phi_b, V\Psi^1_a) + (\Psi^1_b, V\,\Phi_a) - \left(\Psi^1_b, V[1-\mathsf{P}(E-H_0)^{-1}\,V]\,\Psi^1_a\right), \quad (9.2.17)$$

$$\{K'_{ba}\} = \frac{(\Phi_b, V\,\Psi^1_a)\,(\Psi^1_b, V\,\Phi_a)}{(\Psi^1_b, V[1-\mathsf{P}(E-H_0)^{-1}\,V]\,\Psi^1_a)}. \quad (9.2.17\text{a})$$

Man kann sich tatsächlich leicht davon überzeugen, daß die Extremalbedingung für die Funktionale (9.2.17) und (9.2.17a) zur Gleichung (9.2.16) für Ψ^1_a führt. Der Extremwert der Funktionale ist

$$\{K'_{ba}\}_{\text{extr}} = (\Phi_b, V\,\Psi^1_a) = (\Psi^1_b, V\,\Phi_a). \quad (9.2.18)$$

Bestimmen wir nun den Zusammenhang zwischen den Matrizen T_{ba} und K'_{ba}, wobei die Zustände a und b auf der gleichen Energiefläche liegen sollen. Wir setzen dabei in die aus (9.2.9) folgende Matrizengleichung

$$-i\,K_{ba} = \mathsf{T}_{ba} + \frac{i}{2}\sum_c K_{bc}\,\mathsf{T}_{ca}$$

die Ausdrücke (9.1.25) und (9.2.13) ein. Es wird

$$K'_{ba} = T_{ba} + i\,\pi\sum_c K'_{bc}\,T_{ca}\,\delta(E_c - E_a). \quad (9.2.19)$$

Im Prinzip kann man mit der Gleichung (9.2.19) die Matrix T_{ba} durch K'_{ba} und umgekehrt ausdrücken. Dieser Zusammenhang zwischen den Matrizen K'_{ba} und T_{ba} wird noch deutlicher, wenn die hermitesche Matrix K'_{ba} auf Diagonalform gebracht wird. Dazu muß das Gleichungssystem gelöst werden, das die Eigenwerte K'_A und die Eigenfunktionen $X_A(a)$ der Matrix K'_{ba} bestimmt:

$$\sum_a K'_{ba}\,\delta(E_a - E_A)\,X_A(a) = K'_A\,X_A(b). \quad (9.2.20)$$

Da die Matrix K'_{ba} hermitesch ist, sind ihre Eigenwerte K'_A reell und ihre Eigenfunktionen $X_A(a)$ orthogonal und normierbar:

$$\left.\begin{aligned} \sum_a X_A^*(a)\,\delta(E_a - E_A)\,X_B(a) &= \delta_{AB}, \\ \sum_A X_A^*(a)\,\delta(E_a - E_A)\,X_A(b) &= \delta_{ab}. \end{aligned}\right\} \tag{9.2.21}$$

Damit erhalten wir aus (9.2.20)

$$K'_{ba} = \sum_A X_A^*(a)\,K_A\,X_A(b). \tag{9.2.22}$$

Wir definieren nun die Diagonalmatrix T_A mit Hilfe der Beziehung

$$T_{ba} = \sum_A X_A^*(a)\,T_A\,X_A(b). \tag{9.2.23}$$

Wird (9.2.22) und (9.2.23) in (9.2.19) eingesetzt und (9.2.21) benutzt, so erhalten wir

$$\sum_A X_A^*(a)\,\{T_A + i\pi K'_A T_A - K'_A\}\,X_A(b) = 0,$$

woraus folgt

$$T_A = \frac{K'_A}{1 - i\pi K'_A}. \tag{9.2.24}$$

Die Diagonalmatrizen K'_A und T_A können durch die reellen Phasenverschiebungen δ_A ausgedrückt werden:

$$K'_A = -\frac{1}{\pi}\tan\delta_A; \quad T_A = -\frac{1}{\pi}\sin\delta_A\,e^{i\delta_A}. \tag{9.2.25}$$

Aus (9.2.25) und (9.2.24) ist zu ersehen, daß $|T_A|^2$ stets kleiner als π^{-2} ist, während $|K'_A|^2$ beliebige Werte annehmen kann.

Werden in (9.1.28) die Ausdrücke (9.2.23) und (9.2.25) eingesetzt, so erhalten wir für die auf die Zeiteinheit bezogene Wahrscheinlichkeit des Übergangs aus dem Zustand a in den Zustand b

$$P_{ba} = \frac{2}{\pi\hbar}\,\delta(E_a - E_b)\left|\sum_A \sin\delta_A\,e^{i\delta_A}\,X_A^*(b)\,X_A(a)\right|^2. \tag{9.2.26}$$

Die auf die Zeiteinheit bezogene Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Übergang aus dem Zustand a in einen der möglichen Zustände derselben Energie vor sich geht, kann nach (9.1.28) in der Form

$$P_a \equiv \sum_b P_{ba} = \frac{2\pi}{\hbar}\sum_b \delta(E_a - E_b)\,|T_{ba}|^2 \tag{9.2.27}$$

geschrieben werden. Zeigen wir jetzt, daß diese Wahrscheinlichkeit durch den Imaginärteil des Diagonalelements der Streumatrix T_{ba} ausgedrückt werden kann:

$$P_a = -\frac{2}{\hbar}\,\Im\mathrm{m}\,T_{aa}. \tag{9.2.27a}$$

Für die Ableitung von (9.2.27a) sei an den Zusammenhang zwischen den Streuoperatoren T und S erinnert:

$$\mathsf{T} = S - 1 .$$

Da der Operator S unitär ist ($S^+ S = 1$), folgt

$$\mathsf{T}^+ \mathsf{T} = -(\mathsf{T} + \mathsf{T}^+)$$

oder in der expliziten Form

$$\sum_c \mathsf{T}^+_{ac} \mathsf{T}_{cb} = -(\mathsf{T}_{ab} + \mathsf{T}^+_{ab}) .$$

Wird der Ausdruck (9.1.25) in die letzte Beziehung eingesetzt, so finden wir

$$2\pi \sum_c \delta(E_a - E_c)\, T^+_{ac}\, T_{cb} = i(T_{ab} - T^*_{ba}) .$$

Setzen wir $a = b$, so ergibt sich

$$2\pi \sum_c \delta(E_a - E_c)\, |T_{ac}|^2 = -2\,\mathfrak{Im}\, T_{aa} .$$

Wird diese Gleichung in (9.2.27) eingesetzt, so erhalten wir (9.2.27a).

Die Gesamtwahrscheinlichkeit je Zeiteinheit für den Übergang aus dem Zustand a in beliebige andere Zustände erhalten wir unter Benutzung von (9.2.23) und (9.2.25) aus (9.2.27a):

$$P_a = \frac{2}{\pi \hbar} \sum_A \sin^2 \delta_A\, |X_A(a)|^2 . \tag{9.2.28}$$

Im speziellen Fall der Streuung eines Teilchens an einem zentralsymmetrischen Feld entspricht die Diagonalmatrix K'_A Zuständen mit bestimmtem Drehimpuls, $K'_A = K'_l$, und die Wellenfunktionen $X_A(a)$ sind proportional zu Kugelfunktionen:

$$X_A(a) = \alpha\, Y_{lm}(\mathfrak{n}_a) ,$$

die von den Winkeln abhängen, die die Richtung des Wellenvektors $\mathfrak{k}_a = k_a\, \mathfrak{n}$ der ebenen Welle des Anfangszustands bestimmen. Der Proportionalitätsfaktor α ergibt sich aus der Normierungsbedingung (9.2.21):

$$1 = \sum_a X^*_A(a)\, X_A(a)\, \delta(E_a - E_b) = \alpha^2 \int Y^*_{lm}\, Y_{lm}\, \varrho(E_a)\, d\Omega . \tag{9.2.29}$$

Hierbei ist $\varrho(E_a)\, d\Omega$ die Zahl der Zustände je Einheitsenergieintervall mit Wellenvektoren $\mathfrak{k}_a$, die im Raumwinkelelement $d\Omega$ liegen. Im nichtrelativistischen Fall gilt

$$\varrho(E_a)\, d\Omega = \frac{k_a^2}{8\pi^3 \hbar v_a}\, d\Omega ,$$

wobei v_a die Geschwindigkeit der Relativbewegung ist. Aus (9.2.29) folgt

$$\alpha = \frac{(8\pi^3 \hbar v_a)^{1/2}}{k_a}$$

und damit

$$X_A(a) = \frac{(8\pi^3 \hbar v_a)^{1/2}}{k_a}\, Y_{lm}(\mathfrak{n}_a) . \tag{9.2.30}$$

Wird (9.2.30) in (9.2.28) eingesetzt, so ergibt sich

$$P_a = \frac{16\pi^2 v_a}{k_a^2} \sum_{l,m} \sin^2\delta_l \, |Y_{lm}|^2 = \frac{4\pi v_a}{k_a^2} \sum_l (2l+1)\sin^2\delta_l,$$

da

$$\sum_m |Y_{lm}|^2 = \frac{2l+1}{4\pi}$$

ist. Der Gesamtstreuquerschnitt beträgt deshalb

$$\sigma = \frac{P_a}{v_a} = \frac{4\pi}{k_a^2} \sum_l (2l+1)\sin^2\delta_l .$$

Um die Wahrscheinlichkeit je Zeiteinheit für den Übergang aus dem Zustand mit dem Wellenvektor $\mathfrak{k}_a$ in einen Zustand mit dem Wellenvektor $\mathfrak{k}_b$ zu bestimmen, setzen wir (9.2.30) in (9.2.26) ein. Es ergibt sich

$$P_{ba}\, d\Omega = \frac{128\pi^5 \hbar\, v_a^2}{k_a^4}\, \varrho(E_a) \left| \sum_{l,m} \sin\delta_l\, e^{i\delta_l}\, Y_{lm}^*(\mathfrak{n}_b)\, Y_{lm}(\mathfrak{n}_a) \right|^2 d\Omega .$$

Wird $\varrho(E_a)$ eingesetzt und berücksichtigt, daß

$$\sum_m Y_{lm}^*(\mathfrak{n}_a)\, Y_{lm}(\mathfrak{n}_b) = \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\cos\vartheta)$$

gilt, wobei ϑ der Winkel zwischen den Vektoren $\mathfrak{k}_a$ und $\mathfrak{k}_b$ ist, so erhalten wir den differentiellen Streuquerschnitt

$$d\sigma(\vartheta) = \frac{1}{k_a^2} \left| \sum_l (2l+1) \sin\delta_l\, e^{i\delta_l} P_l(\cos\vartheta) \right|^2 d\Omega .$$

Betrachten wir nun 2 Anwendungsbeispiele für den oben dargelegten LIPPMANN-SCHWINGERschen Formalismus.

a) Streuung von Neutronen kleiner Energien an freien Protonen. Im Schwerpunktsystem hat der Operator der kinetischen Energie die Form

$$\hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2 \nabla_{\mathfrak{x}}^2}{2\mu},$$

wobei $\mu = M/2$ die reduzierte Masse der stoßenden Teilchen bedeutet. Die Wechselwirkungsenergie ist von der Form $V = V(\mathfrak{x})$ mit $\mathfrak{x} = \mathfrak{r}_n - \mathfrak{r}_p$. Ist die Reichweite der Kernkräfte gleich b und die Energie der Relativbewegung derart, daß die Beziehung $k\,b \ll 1$ gilt, so erhält man für die Wellenfunktion des Anfangs- und Endzustandes

$$\Phi_a = e^{i\mathfrak{k}_a\mathfrak{x}} \approx 1, \qquad \Phi_b = e^{i\mathfrak{k}_b\mathfrak{x}} \approx 1$$

und für die Streumatrix

$$T_{ba} = (\Phi_b, V(\mathfrak{x})\, \Psi_a(\mathfrak{x})) = \int V(\mathfrak{x})\, \Psi_a(\mathfrak{x})\, d\mathfrak{x},$$

wobei Ψ_a Lösung der Integralgleichung

$$\Psi_a + \frac{1}{\hat{H}_0} V \Psi_a = \Phi_a \approx 1 \tag{9.2.31}$$

ist. Wegen (9.2.23) und (9.2.30) gilt weiterhin

$$T_{ba} = \frac{8\pi^3 \hbar v_a}{k_a^{\prime}} \sum_{l,m} Y_{lm}^*(\mathfrak{n}_a)\, T_l\, Y_{lm}(\mathfrak{n}_b)$$

oder, da $v_a = \hbar k_a/\mu$ ist,

$$T_{ba} = \frac{8\pi^3 \hbar^2}{\mu k_a} \sum_{l,m} Y_{lm}^*(\mathfrak{n}_a)\, T_l\, Y_{lm}(\mathfrak{n}_b).$$

Bei kleinen Energien ist nur das Glied mit T_0 verschieden von Null, d. h., es gilt

$$T_{ba} = \frac{2\pi^2 \hbar^2}{\mu k_a} T_0 .$$

Drücken wir weiter T_0 unter Berücksichtigung von (9.2.25) durch die Streuphasen δ_0 aus, dann wird $T_0 = -\frac{1}{\pi} \sin\delta_0\, e^{i\delta_0} \approx -\frac{\delta_0}{\pi}$, und wir erhalten, wenn wir die Streuamplitude a mit Hilfe der Beziehung $\delta_0 = k_a a$ einführen,

$$T_{ba} = -\frac{2\pi \hbar^2 a}{\mu}. \tag{9.2.32}$$

Bei Berücksichtigung der Spins ist die Streuamplitude in (9.2.32) als Operator zu betrachten, der auf die Spinkoordinaten von Proton und Neutron wirkt:

$$a = \frac{3a_t + a_s}{4} + (a_t - a_s)\frac{\vec{\sigma}_{\mathrm{n}} \vec{\sigma}_{\mathrm{p}}}{4}.$$

Hierbei sind a_s die Streuamplitude für den Singulettspinzustand, a_t die Streuamplitude für den Triplettspinzustand und $\vec{\sigma}_{\mathrm{n}}$ sowie $\vec{\sigma}_{\mathrm{p}}$ die PAULIschen Vektormatrizen, die auf die Spinvariablen von Neutron bzw. Proton wirken.

Die Formel (9.2.32) gilt auch für den Fall der Streuung eines Neutrons an einem fest an das Molekül der Masse AM gebundenen Proton. Die reduzierte Masse ist dann $\mu = AM/(A+1)$. Bezeichnet man die entsprechende Streuamplitude mit a_{geb} und die Amplitude für die Streuung am freien Proton ($\mu = M/2$) mit a_{frei}, so muß wegen (9.2.32) die Gleichung

$$T_{ba} \equiv \int V(\mathfrak{x})\, \Psi(\mathfrak{x})\, d(\mathfrak{x}) = -\frac{2\pi \hbar^2 (A+1)}{AM} a_{\mathrm{geb}} = -\frac{4\pi \hbar^2 a_{\mathrm{frei}}}{M} \tag{9.2.33}$$

gelten. Aus (9.2.33) folgt die uns bereits bekannte Beziehung zwischen den Streuamplituden für die Streuung eines Neutrons am freien und am gebundenen Proton

$$a_{\mathrm{geb}} = \frac{2A}{A+1} a_{\mathrm{frei}}. \tag{9.2.34}$$

b) *Streuung von Neutronen kleiner Energien an einem Proton, das zum Bestand eines Moleküls gehört.* Wir nehmen an, daß ein Neutron (Masse M) an einem Proton gestreut wird, das zu einem Molekül der Masse AM gehört. Dann haben wir im gemeinsamen Schwerpunkt von Neutron und Molekül

$$H_0 = \frac{\hat{p}_{\mathrm{n}}^2}{2\mu} + H_{\mathrm{M}},$$

wobei $\mu = AM/(A+1)$ ist. Mit $\hat{p}_n$ wird der Operator für den Impuls der Relativbewegung von Neutron und Molekül bezeichnet und mit H_M der HAMILTON-Operator des Moleküls, der auf die inneren Koordinaten des Moleküls einschließlich der Koordinaten des Protons wirkt. Alle innermolekularen Koordinaten werden wir im folgenden mit dem einen Buchstaben r bezeichnen.

Weiterhin führen wir den Operator der kinetischen Energie der Relativbewegung von Neutron und Proton ein ($\hat{H}_0 = p_x^2/M$) und schreiben das Funktional (9.1.29), das die Matrix T_{ba} bestimmt, in der Form

$$T_{ba}\} = (\Phi_b, V\Psi_a^+) + (\Psi_b^-, V\Phi_a) - (\Psi_b^-, V\Psi_a^+) - \\ - \left(\Psi_b^-, V\frac{1}{\hat{H}_0}V\Psi_a^+\right) + \left(\Psi_b, V\left[\frac{1}{E - H_0 + i\eta} + \frac{1}{\hat{H}_0}\right]V\Psi_a^+\right), \tag{9.2.35}$$

wobei Φ_a und Φ_b die Wellenfunktionen von Anfangs- und Endzustand sind. Man kann sie in der Form

$$\left.\begin{aligned} \Phi_a(r_n, r) &\equiv e^{i\mathfrak{k}_a\mathfrak{r}_n}\chi_a(r) = e^{i(\mathfrak{k}_a\mathfrak{x}+\mathfrak{k}_a\mathfrak{r}_p)}\chi_a(r), \\ \Phi_b(r_n, r) &\equiv e^{i\mathfrak{k}_b\mathfrak{r}_n}\chi_b(r) = e^{i(\mathfrak{k}_b\mathfrak{x}+\mathfrak{k}_b\mathfrak{r}_p)}\chi_b(r) \end{aligned}\right\} \tag{9.2.36}$$

darstellen, wobei jetzt $\mathfrak{r}_n$ und $\mathfrak{r}_p$ die Koordinaten von Neutron und Proton im Schwerpunktsystem des Moleküls und $\chi_a(r)$, $\chi_b(r)$ die Wellenfunktionen der innermolekularen Zustände sind; $V = V(\mathfrak{r}_n - \mathfrak{r}_p) \equiv V(\mathfrak{x})$ bedeutet das Wechselwirkungspotential zwischen Neutron und Proton.

In der Regel ist das letzte Integral in (9.2.35) klein im Vergleich zu den anderen, und man untersucht in der ersten Näherung das Funktional

$$\{T^1\} = (\Phi_b, V\Psi_a^+) + (\Psi_b^-, V\Phi_a) - (\Psi_b^-, V\Psi_a^+) - \left(\Psi_b^-, V\frac{1}{\hat{H}_0}V\Psi_a^+\right). \tag{9.2.37}$$

Aus der Forderung, daß das Funktional (9.2.37) einen Extremwert annehmen soll, erhält man bei unabhängiger Variation der Funktionen Ψ_a^+ und Ψ_b^- die beiden Integralgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \Psi_a^+ + \frac{1}{\hat{H}_0}V\Psi_a^+ &= \Phi_a(r_n, r), \\ \Psi_b^- + \frac{1}{\hat{H}_0}V\Psi_b^- &= \Phi_b(r_n, r). \end{aligned}\right\} \tag{9.2.38}$$

Wir wollen die Reichweite des Potentials $V(\mathfrak{x})$ mit d bezeichnen. Bei niedrigen Neutronenenergien ($k_a d \ll 1$) kann man in (9.2.36) $e^{i\mathfrak{k}_a\mathfrak{x}} \approx e^{i\mathfrak{k}_b\mathfrak{x}} \approx 1$ setzen. Dann nimmt (9.2.38) folgende Form an:

$$\left.\begin{aligned} \Psi_a^+ + \frac{1}{\hat{H}_0}V\Psi_a^+ &= e^{i\mathfrak{k}_a\mathfrak{r}_p}\chi_a(r), \\ \Psi_b^- + \frac{1}{\hat{H}_0}V\Psi_b^- &= e^{i\mathfrak{k}_b\mathfrak{r}_p}\chi_b(r). \end{aligned}\right\} \tag{9.2.39}$$

Vergleichen wir (9.2.39) mit (9.2.31), so erhalten wir

$$\Psi_a^+ = e^{i\mathfrak{k}_a \mathfrak{r}_p} \chi_a(r)\, \Psi(\mathfrak{x}),$$

$$\Psi_b^- = e^{i\mathfrak{k}_b \mathfrak{r}_p} \chi_b(r)\, \Psi(\mathfrak{x}).$$

Damit kann man das Matrixelement T_{ba} in der Form

$$T_{ba} = (\Phi_b,\ V(\mathfrak{x})\, \Psi_a^+) = \int V(\mathfrak{x})\, \Psi(\mathfrak{x})\, d\mathfrak{x} \int \chi_b^*(r)\, \chi_a(r) \exp(i[\mathfrak{k}_a - \mathfrak{k}_b]\, \mathfrak{r}_p)\, d\mathfrak{r}$$

schreiben. Im Beispiel *a*) wurde gezeigt [s. Gl. (9.2.33)], daß

$$\int V(\mathfrak{x})\, \Psi(\mathfrak{x})\, d\mathfrak{x} = -\frac{4\pi\hbar^2}{M} a_{\text{frei}}$$

ist. Es gilt mithin

$$T_{ba} = -\frac{4\pi\hbar^2}{M} a_{\text{frei}} \int \chi_b^*(r)\, \chi_a(r) \exp(i[\mathfrak{k}_a - \mathfrak{k}_b]\, \mathfrak{r}_p)\, d\mathfrak{r}.$$

Dieses Ergebnis wurde zuerst von FERMI erhalten und wird als FERMI-*Näherung* bezeichnet.

Berücksichtigt man das letzte Glied des Funktionals (9.2.35)

$$\left(\Psi_b^-,\ V\left[\left\{E_a + i\eta - \frac{p_n^2}{2\mu} - H_M\right\}^{-1} + \left(\frac{p_x^2}{M}\right)^{-1}\right] V\, \Psi_a^+\right),$$

so kann man die Korrektion [9,5; 9,6] zur FERMI-Näherung bestimmen.

9.3. Streuung geladener Teilchen

Wenn neben der Kernwechselwirkung V noch COULOMB-Kräfte zwischen den Teilchen auftreten, so werden einfallende und gestreute Wellen sogar noch im Unendlichen durch das COULOMB-Feld verzerrt, da das COULOMB-Potential $V_Q = Z_1 Z_2 e^2/r$ nur langsam mit dem Abstand abnimmt (wenn die Abschirmung des COULOMB-Feldes durch die Atomelektronen nicht berücksichtigt wird). Durch die Anwesenheit der COULOMB-Wechselwirkung wird die mathematische Beschreibung des Streuprozesses beträchtlich komplizierter, da in diesem Fall die Relativbewegung der Teilchen im Anfangs- und im Endzustand nicht durch ebene Wellen beschrieben werden kann. Es ist deshalb sehr wünschenswert, die COULOMB-Wechselwirkung von der Gesamtwechselwirkung zwischen den Teilchen abzutrennen und sie nach Möglichkeit exakt zu berücksichtigen. Eine solche Abtrennung der COULOMB-Kräfte ermöglicht es z. B., aus den Daten über die Streuung umfassendere Auskünfte über die spezifischen Kernkräfte zu erhalten.

Wir nehmen an, daß der Gesamt-HAMILTON-Operator des Systems in der Form

$$H = H_0 + V + V_Q \tag{9.3.1}$$

geschrieben werden kann und daß die Funktionen Φ_a und Φ_b Eigenfunktionen des Operators H_0 sind. Nach der in Abschn. 9.1. dargelegten allgemeinen

Streutheorie wird die Wahrscheinlichkeit je Zeiteinheit für den Übergang aus dem Zustand Φ_a in den Zustand Φ_b durch (9.1.28) bestimmt:

$$P_{ba} = \frac{2\pi}{\hbar} |T_{ba}|^2 \, \delta(E_a - E_b), \tag{9.3.2}$$

wobei das Matrixelement

$$T_{ba} = (\Phi_b, [V + V_Q] \, \Psi_a^+) \tag{9.3.2a}$$

ist. Die auslaufende Welle Ψ_a^+, die der einlaufenden Welle Φ_a entspricht, genügt der Integralgleichung

$$\Psi_a^+ = \Phi_a + (E_a - H_0 + i\,\eta)^{-1} (V + V_Q) \, \Psi_a^+. \tag{9.3.3}$$

Wir führen nun die Wellenfunktion φ_b^- ein, die diejenige einlaufende Welle beschreibt, die bei der Streuung am COULOMB-Feld V_Q zum Endzustand Φ_b führt:

$$\varphi_b^- = \Phi_b + (E_a - H_0 - i\,\eta)^{-1} \, V_Q \, \varphi_b^-. \tag{9.3.4}$$

Wir setzen Φ_b aus (9.3.4) in (9.3.2a) ein:

$$T_{ba} =$$
$$= (\varphi_b^-, V \Psi_a^+) + (\varphi_b^-, V_Q \Psi_a^+) - \big(\varphi_b^-, V_Q (E_a - H_0 + i\eta)^{-1} (V + V_Q) \Psi_a^+\big).$$

In den zweiten Summanden dieses Ausdrucks setzen wir Ψ_a^+ aus (9.3.3) ein und erhalten

$$T_{ba} = (\varphi_b^-, V \Psi^+) + (\varphi_b^-, V_Q \, \Phi_a). \tag{9.3.5}$$

Die in Abschn. 9.1. hergeleitete Gl. (9.1.26) kann in unserem Fall in der Form

$$(\varphi_b^-, V_Q \, \Phi_a) = (\Phi_b, V_Q \, \varphi_a^+) \tag{9.3.6}$$

geschrieben werden, wobei φ_b^- der Gl. (9.3.4) und φ_a^+ der Gleichung

$$\varphi_a^+ = \Phi_a + (E_a - H_0 + i\,\eta)^{-1} \, V_Q \, \varphi_a^+ \tag{9.3.7}$$

genügt. Unter Berücksichtigung von (9.3.6) bringen wir (9.3.5) auf die Form

$$T_{ba} = T_{ba}^{\mathrm{K}} + T_{ba}^{\mathrm{C}}, \tag{9.3.8}$$

wobei T_{ba}^{K} und T_{ba}^{C} folgende Bedeutung haben:

$$T_{ba}^{\mathrm{K}} \equiv (\varphi_b^-, V \Psi_a^+), \tag{9.3.9}$$

$$T_{ba}^{\mathrm{C}} \equiv (\Phi_b, V_Q \, \varphi_a^+). \tag{9.3.10}$$

Wie aus (9.3.10) und (9.3.7) leicht zu ersehen ist, bestimmt die Streumatrix T_{ba}^{C} den Übergang aus dem Zustand Φ_a in den Zustand Φ_b, wie er unter dem Einfluß der COULOMB-Wechselwirkung vor sich geht. Wir werden diese Streumatrix kurz *Matrix der* COULOMB-*Streuung* nennen.

Um die Interpretation der Matrix T_{ba}^{K} zu erleichtern, formen wir die Integralgleichung (9.3.3) etwas um. Unter Benutzung des Übergangs von der Gl. (9.1.31) zu (9.1.33) schreiben wir (9.3.3) in der äquivalenten Form

$$\Psi_a^+ = \Phi_a + (E_a - H_0 - V - V_Q + i\,\eta)^{-1} (V + V_Q) \, \Phi_a. \tag{9.3.11}$$

Analog formen wir auch die Gl. (9.3.7) um:

$$\varphi_a^+ = \Phi_a + (E_a - H_0 - V_Q + i\eta)^{-1} V_Q \Phi_a. \tag{9.3.12}$$

Wird die Gl. (9.3.12) von (9.3.11) subtrahiert und die Operatoridentität

$$A^{-1} - B^{-1} \equiv A^{-1}(B - A) B^{-1}$$

berücksichtigt, so erhalten wir

$$\Psi_a^+ = \\ = \varphi_a^+ + (E_a - H_0 - V - V_Q + i\eta)^{-1} V[\Phi_a + (E - H_0 - V_Q + i\eta)^{-1} V_Q \Phi_a].$$

Unter nochmaliger Benutzung von (9.3.12) finden wir

$$\Psi_a^+ = \varphi_a^+ + (E_a - H_0 - V - V_Q + i\eta)^{-1} V \varphi_a^+ \tag{9.3.13}$$

oder in der äquivalenten Form

$$\Psi_a^+ = \varphi_a^+ + (E_a - H_0 - V_Q + i\eta)^{-1} V \Psi_a^+. \tag{9.3.13a}$$

Die Integralgleichung (9.3.13a) bestimmt die auslaufende Welle Ψ_a^+. Sie entsteht, wenn die am COULOMB-Potential gestreuten Wellen φ_a^+ am Kernpotential V gestreut werden. Die Streumatrix T_{ba}^{K} (9.3.9) liefert somit die Wahrscheinlichkeitsamplitude für die Streuung der durch das COULOMB-Feld verzerrten Wellen am Kernpotential V. Die Gesamtstreumatrix (9.3.8) erhält man als Summe der Matrix der COULOMB-Streuung und der Matrix der durch die Kernwechselwirkung hervorgerufenen Streuung von Wellen, die durch das weitreichende COULOMB-Feld verzerrt wurden. Alle oben erhaltenen Beziehungen sind exakt, da wir bei ihrer Ableitung keinerlei vereinfachende Annahmen gemacht haben.

Die Integralgleichung (9.3.7) läßt eine exakte Auflösung nach φ_a^+ zu, d. h., die Matrix der COULOMB-Streuung T_{ba}^{C} (9.3.10) kann exakt berechnet werden. Deshalb kann man aus den experimentellen Streuquerschnitten mit Hilfe von (9.3.2) und (9.3.8) die Matrix T_{ba}^{K} bestimmen. So läßt sich z. B. eindeutig das Vorzeichen der Streumatrix T_{ba}^{K} finden. Bei kleinen Energien, d. h., wenn bei der Streuung nur eine Phase wesentlich ist, kann man folglich auch das Vorzeichen der Streuphase bestimmen, die durch die reinen Kernwechselwirkungen hervorgerufen wird.

9.4. Stoßtheorie bei Umgruppierung der Nukleonen

In den vorhergehenden Abschnitten dieses Kapitels haben wir die Theorie für den Fall der Streuung entwickelt, bei der sich die Zusammensetzung der stoßenden Teilchen nicht ändert, d. h., es wurden Reaktionen der Art

$$\mathrm{a} + \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{a}^* + \mathrm{A}^*$$

betrachtet, bei denen nur eine innere Anregung der stoßenden Teilchen ohne Veränderung ihrer Zusammensetzung möglich ist. Neben solchen Reaktionen spielen jedoch auch Reaktionen eine große Rolle, bei denen sich im Ergebnis des Stoßes die Zusammensetzung der Stoßpartner verändert. Hierzu ge-

hören z. B. die Strippingreaktionen A(d, p) B und A(d, n) B sowie die „pick-up"-Reaktionen A(p, d) B und A(n, d) B. Wir werden auf diese Reaktionen in den Abschn. 14.3. und 14.4. noch näher eingehen.

Bei einem Stoß mit Umgruppierung der Nukleonen wird das Teilchensystem durch einen HAMILTON-Operator H beschrieben, den man in zwei Formen darstellen kann:

$$H = H_a + V_a = H_b + V_b. \tag{9.4.1}$$

Hierbei sind H_a und H_b hermitesche Operatoren, welche die kinetische Energie der Relativbewegung und die inneren Zustände der stoßenden bzw. auseinanderfliegenden Teilchen beschreiben; mit V_a und V_b werden die Operatoren für die Wechselwirkung zwischen den stoßenden bzw. auseinanderfliegenden Teilchen bezeichnet. Dabei wird der Anfangszustand durch eine Funktion Φ_a beschrieben, die der Gleichung

$$H_a \Phi_a = E_a \Phi_a$$

genügt, und der Endzustand durch eine Funktion Φ_b, die der Gleichung

$$H_b \Phi_b = E_b \Phi_b$$

gehorcht. Nach der allgemeinen Streutheorie (vgl. Abschn. 9.1.) wird der Zustand des Systems mit dem HAMILTON-Operator $H = H_a + V_a$ durch die Wellenfunktion Ψ_a bestimmt, die der Integralgleichung

$$\Psi_a = \Phi_a + D_a^{-1}(\lambda)\, V_a \Psi_a \tag{9.4.2}$$

genügt, wobei

$$D_a^{-1}(\lambda) \equiv (\lambda - H_a)^{-1}, \qquad \lambda \equiv E_a + i\eta$$

und Φ_a der Anfangszustand sind.

Der Zustand eines Systems, der Stößen mit Umgruppierung der Nukleonen entspricht, wird durch den gleichen HAMILTON-Operator H beschrieben wie der Zustand, der einer Streuung ohne Veränderung der Stoßpartner entspricht. Die Gl. (9.4.2) beschreibt also auch die Streuung mit Umgruppierung der Nukleonen. Dabei ist es jedoch günstig, die Integralgleichung (9.4.2) so umzuschreiben, daß der reziproke Operator nicht H_a, sondern den Operator H_b enthält. Wird dann die Integralgleichung (9.4.2) explizit aufgeschrieben, so kann man das vollständige System der Eigenfunktionen dieses Operators benutzen. Diese Eigenfunktionen erfassen alle möglichen Zustände des Systems nach dem Stoß. Wir multiplizieren (9.4.2) von links mit $D_a = \lambda - H_a$ und erhalten

$$(\lambda - H_a - V_a)\, \Psi_a = (\lambda - H_a)\, \Phi_a. \tag{9.4.3}$$

Mit $H = H_a + V_a = H_b + V_b$ läßt sich (9.4.3) in der Form

$$(\lambda - H_b - V_b)\, \Psi_a = \big(\lambda - H_b - (V_b - V_a)\big)\, \Phi_a$$

schreiben. Multiplizieren wir dies von links mit $D_b^{-1} \equiv (\lambda - H_b)^{-1}$, so erhalten wir eine Integralgleichung, die der Gl. (9.4.2) äquivalent ist:

$$\Psi_a = \Phi_a + D_b^{-1} V_b \Psi_a + D_b^{-1}(V_a - V_b)\, \Phi_a. \tag{9.4.2a}$$

Andererseits kann man die rechte Seite von (9.4.3) auf die Form

$$(\lambda - H_a)\,\Phi_a \equiv (E_a + i\,\eta - H_a)\,\Phi_a = i\,\eta\,\Phi_a$$

bringen, wenn man berücksichtigt, daß Φ_a Eigenfunktion des Operators H_a ist. An Stelle von (9.4.2a) erhalten wir dann auf dem gleichen Wege

$$\Psi_a = i\,\eta\,D_b^{-1}\,\Phi_a + D_b^{-1}\,V_b\,\Psi_a.$$

Unter Benutzung des vollständigen Systems der Eigenfunktionen des Operators H_b schreiben wir diese Gleichung explizit:

$$\Psi_a = i\,\eta \sum_b \frac{\Phi_b(\Phi_b,\Phi_a)}{E_a - E_b + i\,\eta} + \sum_b \frac{\Phi_b(\Phi_b,\,V_b\,\Psi_a)}{E_a - E_b + i\,\eta}. \tag{9.4.4}$$

Nach der Berechnung der Summen in (9.4.4) (bzw. der Integrale, wenn der Endzustand zum kontinuierlichen Spektrum gehört) muß man zur Grenze $\eta \to 0$ übergehen. Dabei geht das erste Glied in (9.4.4) gegen Null, wenn $E_a \neq E_b$ ist. Für $E_a = E_b$ ergibt sich

$$\lim_{\eta\to 0} \int\limits_{E_a-\eta}^{E_a+\eta} \varrho(E_b)\,\Phi_b(\Phi_b,\,\Phi_a)\,d\,E_b,$$

wobei $\varrho(E_b)$ die Zahl der Endzustände im Einheitsenergieintervall ist. In der Mehrzahl der praktischen Fälle enthält der Integrand keine δ-Funktion der Energie, und das Integral geht gegen Null [9,7]. Man kann deshalb schreiben

$$\Psi_a = \sum_b \frac{\Phi_b(\Phi_b,V_b\,\Psi_a)}{E_a - E_b + i\,\eta}.$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das System, das sich anfänglich im Zustand Φ_a befand, im Zustand Φ_b beobachtet wird, kann somit in der Form

$$|(\Phi_b,\,\Psi_a)|^2 = \frac{|(\Phi_b,\,V_b\,\Psi_a)|^2}{(E_a - E_b)^2 + \eta^2}\exp\left\{-\,2\eta\,\frac{t}{\hbar}\right\}$$

geschrieben werden, wobei durch den Faktor $\exp(-\,2\eta\,t/\hbar)$ berücksichtigt wird, daß der Zustand Ψ_a für $\eta \neq 0$ nicht stationär ist, sondern die Zeitabhängigkeit $\exp\{-\,i(E_a + i\,\eta)\,t/\hbar\}$ besitzt.

Die Wahrscheinlichkeit je Zeiteinheit für den Übergang aus dem Zustand a in den Zustand b ist

$$P_{ba} = \lim_{\eta\to 0}\frac{\partial}{\partial t}\,|(\Phi_b,\,\Psi_a)|^2 = \frac{2\pi}{\hbar}\,|(\Phi_b,\,V_b\,\Psi_a)|^2\,\delta(E_a - E_b). \tag{9.4.5}$$

Bei der Ableitung dieses Ausdrucks wurde die Gleichung

$$\lim_{\eta\to 0}\int \frac{\eta}{x^2+\eta^2}\,f(x)\,d\,x = \pi\,f(0)$$

benutzt. Mit der Formel (9.4.5) kann man die Wahrscheinlichkeit je Zeiteinheit für den Übergang aus dem Zustand a in einen beliebigen Zustand b berechnen, der sich vom Anfangszustand a durch eine andere Zusammensetzung der Teilchen unterscheidet. Für die praktische Berechnung dieser

Wahrscheinlichkeit (oder des entsprechenden Streuquerschnitts) muß die Lösung der Integralgleichung (9.4.2) bekannt sein.

Geht man von der Integralgleichung für $H = H_b + V_b$ aus, die dem Endzustand Φ_b entspricht, so wird

$$\Psi_b = \Phi_b + D_b^{-1}(\lambda^*)\, V_b\, \Psi_b. \tag{9.4.6}$$

In Analogie zu (9.4.2a) kann man diese Gleichung auf folgende Form bringen:

$$\Psi_b = \Phi_b + D_a^{-1}(\lambda^*)\, V_a\, \Psi_b + D^{-1}(\lambda^*)\,(V_b - V_a)\, \Phi_b. \tag{9.4.7}$$

Führt man die beiden Operatoren Ω_a und Ω_b mit

$$\Psi_a = \Omega_a\, \Phi_a \quad \text{und} \quad \Psi_b = \Omega_b^+\, \Phi_b \tag{9.4.8}$$

ein, so lassen sich die Integralgleichungen

$$\Psi_a = \Phi_a + D_a^{-1}(\lambda)\, V_a\, \Psi_a,$$
$$\Psi_b = \Phi_b + D_b^{-1}(\lambda^*)\, V_b\, \Psi_b$$

in Form von Operatorgleichungen schreiben [s. (9.1.31) und (9.1.32)]:

$$\Omega_a = 1 + D_a^{-1}(\lambda)\, V_a\, \Omega_a, \tag{9.4.9}$$

$$\Omega_b^+ = 1 + D_b^{-1}(\lambda^*)\, V_b\, \Omega_b^+. \tag{9.4.10}$$

Wir ersetzen die Gl. (9.4.10) durch die hermitesch konjugierte Gleichung

$$\Omega_b = 1 + \Omega_b\, V_b\, D_b^{-1}(\lambda). \tag{9.4.10a}$$

Die Operatorgleichungen (9.4.9) und (9.4.10a) sind [s. Gl. (9.1.33)] den Operatorgleichungen

$$\Omega_a = 1 + [D_a(\lambda) - V_a]^{-1}\, V_a, \tag{9.4.11}$$

$$\Omega_b = 1 + V_b[D_b(\lambda) - V_b]^{-1} \tag{9.4.12}$$

äquivalent. Multipliziert man (9.4.11) von links mit V_b und (9.4.12) von rechts mit V_a und berücksichtigt die Relationen

$$D_a(\lambda) - V_a = D_b(\lambda) - V_b \quad \text{und} \quad V_b - V_a = -H_b + H_a,$$

so erhält man

$$V_b\, \Omega_a - \Omega_b\, V_a = H_a - H_b.$$

Wir betrachten nun die Matrixelemente auf beiden Seiten dieser Gleichung zwischen den Zuständen Φ_b und Φ_a:

$$(\Phi_b,\, \Omega_b\, V_a\, \Phi_a) - (\Phi_b,\, V_b\, \Omega_a\, \Phi_a) = (\Phi_b,\, [H_b - H_a]\, \Phi_a).$$

Unter Berücksichtigung von (9.4.8) erhalten wir dann

$$(\Psi_b,\, V_a\, \Phi_a) - (\Phi_b,\, V_b\, \Psi_a) = (\Phi_b,\, [H_b - H_a]\, \Phi_a). \tag{9.4.13}$$

Für Zustände Φ_a und Φ_b, die auf einer Fläche gleicher Energie liegen, ist die rechte Seite von Gl. (9.4.13) gleich Null. Deshalb kann die Übergangswahrscheinlichkeit je Zeiteinheit (9.4.5) in der Form

$$P_{ba} = \frac{2\pi}{\hbar}\, |T_{ba}|^2\, \delta(E_a - E_b) \tag{9.4.14}$$

geschrieben werden, wobei die Streumatrix

$$T_{ba} = (\Phi_b, V_b \Psi_a) = (\Psi_b, V_a \Phi_a) \tag{9.4.15}$$

ist.

In der BORNschen Näherung haben wir z. B.

$$(T_{ba})^{\mathrm{B}} = (\Phi_b, V_b \Phi_a) = (\Phi_b, V_a \Phi_a). \tag{9.4.16}$$

Zur Berechnung der Streumatrix (9.4.15) eignet sich die Variationsmethode. Es ist leicht zu sehen, daß die Streumatrix T_{ba} gleich dem Extremwert des Funktionals

$$\{T_{ba}^{(1)}\} = \left(\Psi_b, V_b D_b^{-1}(\lambda) V_a \Phi_a\right) + (\Phi_b, V_b \Psi_b) - \\ - \left(\Psi_b, V_b[1 - D_b^{-1}(\lambda) V_b][\Psi_a - \Phi_a]\right) \tag{9.4.17}$$

ist, wenn Ψ_a und Ψ_b unabhängig variiert werden. Wir haben

$$\delta\{T_{ba}^{(1)}\} = \left(\delta\Psi_b, V_b[D_b^{-1}(\lambda)\{V_a - V_b\}\Phi_a + D_b^{-1}(\lambda) V_b \Psi_a - \Psi_a + \Phi_a]\right) + \\ + \left([\Phi_b - \Psi_b + D_b^{-1}(\lambda^*) V_b \Psi_b], V_b \delta\Psi_a\right).$$

Die Bedingung für den Extremwert $\delta\{T_{ba}^{(1)}\} = 0$ führt somit zu 2 Integralgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \Psi_a &= \Phi_a + D_b^{-1}(\lambda) V_b \Psi_a + D_b^{-1}(\lambda)[V_a - V_b]\Phi_a, \\ \Psi_b &= \Phi_b + D_b^{-1}(\lambda^*) V_b \Psi_b, \end{aligned}\right\} \tag{9.4.18}$$

die mit den Gleichungen (9.4.2a) und (9.4.6) übereinstimmen. Bei Erfüllung der Gln. (9.4.18) fällt das Funktional (9.4.17) mit dem Ausdruck (9.4.15) für die Streumatrix zusammen. In der Tat, setzt man in das letzte Integral des Funktionals (9.4.17) die Gleichung

$$\Psi_a - D_b^{-1} V_b \Psi_a = \Phi_a + D_b^{-1}(V_a - V_b)\Phi_a$$

ein, die sich aus der ersten der Gln. (9.4.18) ergibt, so erhält man

$$\{T_{ba}^{(1)}\}_{\mathrm{extr}} = (\Phi_b, V_b \Psi_a).$$

Außer dem Funktional (9.4.17) kann man das Funktional

$$\{T_{ba}^{(2)}\} = \left(\Phi_b, V_a D_a^{-1}(\lambda) V_b \Psi_a\right) + (\Psi_b, V_a \Phi_a) - \\ - \left([\Psi_b - \Phi_b], V_a\{1 - D_a^{-1}(\lambda) V_a\}\Psi_a\right) \tag{9.4.19}$$

betrachten. Die Bedingung, daß (9.4.19) einen Extremwert annehmen soll, führt bei unabhängiger Variation von Ψ_a und Ψ_b zu den Integralgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \Psi_a &= \Phi_a + D_a^{-1}(\lambda) V_a \Psi_a, \\ \Psi_b &= \Phi_b + D_a^{-1}(\lambda^*) V_a \Psi_b + D_a^{-1}(\lambda^*)[V_b - V_a]\Phi_b, \end{aligned}\right\} \tag{9.4.20}$$

und der Extremwert des Funktionals ist

$$\{T_{ba}^{(2)}\}_{\mathrm{extr}} = (\Psi_b, V_a \Phi_a).$$

Das Funktional

$$\{T_{ba}\} = \frac{1}{2}\{T_{ba}^{(1)}\} + \frac{1}{2}\{T_{ba}^{(2)}\}$$

ist symmetrisch bezüglich der Funktionen Ψ_a und Ψ_b.

KAPITEL 10*

ALLGEMEINE THEORIE DER POLARISATION VON TEILCHEN BEI KERNREAKTIONEN

10.1. Differentieller Wirkungsquerschnitt einer Kernreaktion für vollständig polarisierte oder nichtpolarisierte Teilchen im Eingangskanal

Wir betrachten die Kernreaktion

$$a + A \rightarrow B + b.$$

Im Abschn. 8.12. wurde gezeigt [s. Formel (8.12.10)], daß, wenn der Anfangszustand des Systems durch die Quantenzahlen α, s, m und der Endzustand durch die Quantenzahlen β, σ, μ bestimmt wird, die Wellenfunktion des Endzustands für die Reaktion $\alpha, s, m \rightarrow \beta, \sigma, \mu$ durch folgende Formel gegeben wird:

$$\psi_{\sigma\mu,\, s m} = i \left(\frac{v_\alpha}{v_\beta}\right)^{1/2} \frac{\exp(i\, k_\beta\, r_\beta)}{r_\beta}\, \varphi_{\beta\sigma}\, \chi_{\sigma\mu}\, F^{\beta\sigma\mu}_{\alpha s m}. \tag{10.1.1}$$

Dabei bedeuten $\varphi_{\beta\sigma}$ die Wellenfunktion für die inneren Zustände im Endkern und im emittierten Teilchen (wenn dieses eine komplizierte Struktur besitzt), $\chi_{\sigma\mu}$ die Spinwellenfunktion im Ausgangskanal, v_α und v_β die Geschwindigkeiten der Relativbewegung in den Kanälen α bzw. β und $F^{\beta\sigma\mu}_{\alpha s m}$ die Reaktionsamplitude, die durch die Beziehung

$$F^{\beta\sigma\mu}_{\alpha s m}(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{k_\alpha} \sum_{J=0}^{\infty} \sum_{l=|J-s|}^{J+s} \sum_{\lambda=|J-\sigma|}^{J+\sigma} i^{l-\lambda} \sqrt{2l+1}\,(l\, s\, 0\, m \,|\, J\, m) \times$$
$$\times (\lambda\, \sigma, m-\mu, \mu \,|\, J\, m)\, [\delta_{\alpha\beta}\, \delta_{\lambda l}\, \delta_{s\sigma} - S^J_{\beta\lambda\sigma,\, \alpha l s}]\, Y_{\lambda,\, m-\mu}(\vartheta, \varphi) \tag{10.1.2}$$

definiert ist; dabei sind die $S^J_{\beta\lambda\sigma,\alpha l s}$ die Elemente der Streumatrix (Reaktionsmatrix) für ein System mit dem Gesamtdrehimpuls J und bestimmter Parität.

Der differentielle Wirkungsquerschnitt für die Reaktion aus einem bestimmten Anfangszustand α, s, m in einen bestimmten Endzustand β, σ, μ wird durch den Ausdruck

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\beta\sigma\mu,\, \alpha s m} = |F^{\beta\sigma\mu}_{\alpha s m}(\vartheta, \varphi)|^2 \tag{10.1.3}$$

gegeben. Wenn im Anfangszustand der Spin des Teilchens (s_a) und der Spin des Kerns (s_A) gegeneinander frei orientiert sind und im Endzustand keine Annahme über die Orientierung des Spins von Teilchen (s_b) und Kern (s_B) gemacht wird, so erhält man den differentiellen Wirkungsquerschnitt der

Reaktion $\alpha \to \beta$ aus (10.1.3) durch Mittelung über alle Anfangszustände und Summierung über alle Endzustände:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\beta\alpha} = \frac{1}{(2s_a+1)(2s_A+1)} \sum_{s=|s_A-s_a|}^{s_A+s_a} \sum_{m=-s}^{s} \sum_{\sigma=|s_B-s_b|}^{s_B+s_b} \sum_{\mu=-\sigma}^{\sigma} |F_{\alpha s m}^{\beta\sigma\mu}|^2. \tag{10.1.4}$$

Bei fixierten Eingangs- und Ausgangskanälen bilden die sich durch alle möglichen Werte von σ, μ und s, m unterscheidenden Größen $F_{\alpha s m}^{\beta\sigma\mu}$ eine Matrix $\mathfrak{F} = \{(\sigma\mu\,|F|\,s\,m)\}$, deren Elemente

$$(\sigma\mu\,|F|\,s\,m) \equiv F_{\alpha s m}^{\beta\sigma\mu}(\vartheta, \varphi) \tag{10.1.5}$$

Funktionen der Winkel ϑ und φ sind.

Benutzt man die Bezeichnungen (10.1.5), so läßt sich (10.1.4) in Matrizenform schreiben:

$$\left\{\frac{d\sigma}{d\Omega}\right\}_{\beta\alpha} = \frac{1}{(2s_a+1)(2s_A+1)} \sum_{s,m;\,\sigma,\mu} (\sigma\mu\,|F|\,s\,m)(\sigma\mu\,|F|\,s\,m)^* = \\ = \frac{1}{(2s_a+1)(2s_A+1)} \operatorname{Sp}(\mathfrak{F}\mathfrak{F}^+). \tag{10.1.6}$$

Das Zeichen Sp bedeutet, daß die Summe der Diagonalelemente (die Spur) der Matrix zu bilden ist.

Oft stellt der Anfangszustand in der Theorie der Streuung und der Kernreaktionen eine statistische Mischung von Spinzuständen (unvollständige Polarisation) dar, die durch alle möglichen Kombinationen der Spins von Teilchen und Targetkern gebildet werden. Wenn in der Wechselwirkung zwischen Teilchen und Target die Spin-Bahn-Kopplung wesentlich ist, so wird der Ausdruck für den differentiellen Wirkungsquerschnitt der Reaktion $\alpha \to \beta$ wesentlich komplizierter. Die Streuung von polarisierten oder teilweise polarisierten Teilchenbündeln besitzt keine Azimutalasymmetrie. Aus diesem Grunde kann man die Untersuchung über die Polarisation der Reaktionsprodukte durchführen, indem man die nachfolgende Streuung (oder Kernreaktionen) dieser Teilchen an anderen Kernen untersucht.

Die Untersuchungen von Kernreaktionen solcher Art erfordern eine Theorie der Kernreaktionen mit Beteiligung teilweise polarisierter Teilchen. Eine solche Theorie ist in den Arbeiten von Simon [10,1], Simon und Welton [10,2], Oehme [10,3] und anderen ausgearbeitet worden. In diesem Kapitel wollen wir die Grundlagen der Theorie von Kernreaktionen mit teilweise polarisierten Teilchen an teilweise polarisierten Kernen betrachten.

10.2. Dichtematrix der Spinzustände und Spintensoren

Wir nehmen an, daß das System aus 2 Teilchen mit den Spins i und J besteht. Der Spinzustand eines solchen Systems (z. B. der Spinzustand eines der Reaktionskanäle) kann in Form einer Linearkombination von Zuständen mit bestimmten Werten des Gesamtspins s und seiner Projektion m auf eine ausgewählte Richtung (Quantelungsachse) geschrieben werden:

$$\chi_\alpha = \sum_{s,m} a_\alpha(s, m)\, \chi_{sm}; \tag{10.2.1}$$

dabei gilt

$$|J - i| \leqq s \leqq J + i, \qquad -s \leqq m \leqq s.$$

Der Mittelwert einer beliebigen physikalischen Größe, der der Operator $\hat{f}$ zugeordnet ist, läßt sich schreiben als

$$\langle \hat{f} \rangle_\alpha = \sum_{s_1, m_1, s_2, m_2} \varrho_\alpha (s_2\, m_2\, s_1\, m_1) \langle s_1\, m_1 | \hat{f} | s_2\, m_2 \rangle \tag{10.2.2}$$

mit

$$\langle s_1\, m_1 | \hat{f} | s_2\, m_2 \rangle = (\chi_{s_1 m_1}, \hat{f}\, \chi_{s_2 m_2}), \tag{10.2.3}$$

$$\varrho_\alpha (s_2\, m_2\, s_1\, m_1) = a_\alpha (s_2\, m_2)\, a_\alpha^* (s_1\, m_1), \tag{10.2.4}$$

wenn $\hat{f}$ im Spinraum des Systems auf Zustände wirkt, die durch die Funktionen χ_α beschrieben werden. Die Gesamtheit der Größen $\varrho_\alpha (s_2\, m_2\, s_1\, m_1)$ bestimmt vollständig den Spinzustand des Systems (die Reaktionskanäle) und wird als *Dichtematrix der Spinzustände* bezeichnet.

Man sieht leicht, daß die Dichtematrix (10.2.4) infolge der Normierung der Spinfunktionen χ_α und χ_{sm} folgender Bedingung genügen muß:

$$\mathrm{Sp}(\varrho_\alpha) \equiv \sum_{s_1, m_1} \varrho_\alpha (s_1\, m_1\, s_1\, m_1) = 1. \tag{10.2.5}$$

Bezeichnet man die Matrix des Operators $\hat{f}$, die aus den Elementen (10.2.3) gebildet wird, mit f, so läßt sich die Gl. (10.2.2) in Matrizenform schreiben:

$$\langle \hat{f} \rangle_\alpha = \mathrm{Sp}(f\, \varrho_\alpha) = \mathrm{Sp}(\varrho_\alpha\, f). \tag{10.2.6}$$

Die Dichtematrix der Spinzustände gestattet also, den Mittelwert beliebiger physikalischer Größen zu berechnen, die durch Spinoperatoren (Spinmatrizen) beschrieben werden.

Bisher haben wir Spinzustände betrachtet, die durch Wellenfunktionen (10.2.1) mit bestimmten Phasenbeziehungen zwischen verschiedenen Zuständen χ_{sm} aus χ_α bestimmt werden. Im allgemeinsten Fall kann man jedoch den Spinzustand eines Systems nicht durch eine Wellenfunktion beschreiben. Man muß das System als statistisches Gemisch (gemischte Gesamtheit) von Zuständen des Typs χ_α betrachten. Dann läßt sich eine allgemeinere Dichtematrix definieren:

$$\varrho (s_2\, m_2\, s_1\, m_1) = \sum_\alpha w_\alpha\, a_\alpha (s_2\, m_2)\, a_\alpha^* (s_1\, m_1) = \sum_\alpha w_\alpha\, \varrho_\alpha (s_2\, m_2\, s_1\, m_1). \tag{10.2.7}$$

Hierbei sind w_α reelle positive Zahlen, die der Bedingung $\sum_\alpha w_\alpha = 1$ genügen. Die Dichtematrix (ϱ) erfüllt dabei die Normierungsbedingung

$$\mathrm{Sp}(\varrho) = 1. \tag{10.2.5a}$$

Der Mittelwert in Zuständen, denen ein gemischtes Ensemble entspricht, läßt sich für eine beliebige Spinmatrix f durch die Dichtematrix (10.2.7) genauso wie im Falle reiner Spinzustände ausdrücken:

$$\langle \hat{f} \rangle = \sum_\alpha w_\alpha \langle \hat{f} \rangle_\alpha = \mathrm{Sp}(f\, \varrho) = \mathrm{Sp}(\varrho\, f). \tag{10.2.8}$$

Im weiteren wollen wir annehmen, daß die Dichtematrix der Spinzustände eines Systems durch den Ausdruck (10.2.7) gegeben wird.

Außer der Bedingung (10.2.5a) genügen die Elemente der Dichtematrix noch einigen allgemeineren Beziehungen. Für die Ableitung dieser Beziehungen schreiben wir die Elemente der Dichtematrix (10.2.7) kürzer:

$$\varrho(s_2\, m_2\, s_1\, m_1) = \varrho(n_2\, n_1),$$

wobei die Menge der Quantenzahlen s, m nur noch durch einen Buchstaben bezeichnet wird. Da die Mittelwerte aller hermiteschen Operatoren reell sein müssen, wird auch die Dichtematrix hermitesch sein:

$$\varrho(n_2\, n_1) = \varrho^*(n_1\, n_2). \tag{10.2.9}$$

Jede hermitesche Matrix läßt sich durch eine Transformation mit einer geeigneten unitären Matrix U_{nm} auf die Diagonalform bringen:

$$\varrho_n\, \delta_{nm} = \sum_{n_1, n_2} U_{n n_2}\, \varrho(n_2\, n_1)\, U_{n_1 m}. \tag{10.2.10}$$

Da der Mittelwert eines beliebigen Operators mit nur positiven Eigenwerten ebenfalls positiv sein muß, muß auch jedes Diagonalelement der Dichtematrix (in einer beliebigen Darstellung) positiv sein:

$$\varrho(n\, n) \geqq 0. \tag{10.2.11}$$

Der Operator $\hat{f}_{n_1 n_2} = \delta_{n n_1}\, \delta_{n n_2}$ besitzt nämlich die Eigenwerte 0 und 1, und sein Mittelwert ist

$$\langle \hat{f}_{n_1 n_2} \rangle = \varrho(n\, n) \geqq 0.$$

Aus (10.2.10) folgt

$$\varrho(n_2\, n_1) = \sum_n U^{-1}_{n_1 n}\, \varrho_n\, U_{n n_2} = \sum_n \varrho_n\, U_{n n_2}\, U^*_{n n_1}. \tag{10.2.12}$$

Vergleicht man diese Darstellung der Dichtematrix mit dem Ausdruck (10.2.7), der in der Kurzschreibweise die Form

$$\varrho(n_2\, n_1) = \sum_n w_n\, a_n(n_2)\, a_n^*(n_1)$$

annimmt, so überzeugt man sich leicht, daß eine der möglichen Darstellungen der Matrix $U_{n n_2}$ die Matrizen $a_n(n_2)$ liefert. In diesem Fall stimmen die statistischen Gewichte w_n mit den Diagonalelementen der Dichtematrix ϱ_n überein. Im Falle reiner Zustände gilt $w_n = \delta_{n\alpha}$, und die Dichtematrix

$$\varrho(n_2\, n_1) = U_{\alpha n_2}\, U^*_{\alpha n_1}$$

wird gleich (10.2.4).

Wir bestimmen nun das Transformationsgesetz für die Komponenten der Dichtematrix bei Drehung des Koordinatensystems um die Eulerschen Winkel $\{\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3\} = R$. Diese Drehung möge durch den Operator P_R beschrieben werden. Das Transformationsgesetz für die Komponenten der Dichtematrizen (10.2.7) und (10.2.4) ist gleichlautend, da die w_α reelle Zahlen

sind. Wegen der Invarianzeigenschaften des Quadrats des Betrages der Wellenfunktion (10.2.1) gilt

$$\chi_\alpha \chi_\alpha^* = \sum_{s_1, m_1, s_2, m_2} \varrho_\alpha (s_2 m_2 s_1 m_1) \chi_{s_1 m_1}^* \chi_{s_2 m_2}. \quad (10.2.13)$$

Bezüglich der Operation P_R folgt also, daß die Transformationsgesetze für die Komponenten der Dichtematrix $\varrho_\alpha(s_2 m_2 s_1 m_1)$ und die Produkte der Spinfunktionen $\chi_{s_1 m_1}^* \chi_{s_2 m_2}$ einander entgegengesetzt sein müssen. Berücksichtigt man noch

$$P_R \chi_{sm} = \sum_\mu D_{m\mu}^{s*} \chi_{s\mu},$$

so ergibt sich

$$P_R \varrho(s_2 m_2 s_1 m_1) = \sum_{\mu_1, \mu_2} D_{m_1 \mu_1}^{s_1 *} D_{m_2 \mu_2}^{s_2} \varrho(s_2 \mu_2 s_1 \mu_1). \quad (10.2.14)$$

Unter Benutzung der Gleichung

$$D_{m\mu}^s = (-1)^{\mu - m} D_{-m, -\mu}^{s*}$$

und wenn man das Produkt zweier D-Funktionen mit Hilfe der Beziehung [s. Anhang, Gl. (1.5.10)]

$$D_{m_1 \mu_1}^{s_1} D_{m_2 \mu_2}^{s_2} = \sum_{k=|s_1-s_2|}^{s_1+s_2} (s_1 s_2 m_1 m_2 | k, m_1 + m_2)(s_1 s_2 \mu_1 \mu_2 | k, \mu_1 + \mu_2) D_{m_1+m_2, \mu_1+\mu_2}^k \quad (10.2.15)$$

ausdrückt, läßt sich (10.2.10) in die Form

$$P_R \varrho(s_2 m_2 s_1 m_1) = \sum_{k, \mu_1, \mu_2} (-1)^{\mu_2 - m_2} (s_1 s_2, m_1, -m_2 | k, m_1 - m_2) \times$$
$$\times (s_1 s_2, \mu_1, -\mu_2 | k, \mu_1 - \mu_2) D_{m_1 - m_2, \mu_1 - \mu_2}^{k*} \varrho(s_2 \mu_2 s_1 \mu_1)$$

bringen. Wir führen folgende Bezeichnung ein:

$$G_{k, \mu_2 - \mu_1} = \sum_{\mu_1} (-1)^{\mu_1} (s_1 s_2, -\mu_1, \mu_2 | k, \mu_2 - \mu_1) \varrho(s_2 \mu_2 s_1 \mu_1). \quad (10.2.16)$$

Ersetzt man in (10.2.15) die Summe über μ_1 durch die Summe über $\mu_1 - \mu_2 = \mu$, so erhält man

$$P_R \varrho(s_2 m_2 s_1 m_1) = \sum_{k, \mu} (-1)^{-m_2} (s_1 s_2, m_1, -m_2 | k, m_1 - m_2) G_{k\mu} D_{m_1 - m_2, \mu}^{k*}(R). \quad (10.2.17)$$

Multipliziert man (10.2.13) mit $(-1)^{m_2} (s_1 s_2, m_1, -m_2 | k', m_1 - m_2)$, summiert über m_2 und berücksichtigt (10.2.16) sowie die Orthogonalität der Vektoradditionskoeffizienten

$$\sum_{m_2} (s_1 s_2, m_1, -m_2 | k', m_1 - m_2)(s_1 s_2, m_1, -m_2 | k, m_1 - m_2) = \delta_{kk'},$$

so wird

$$P_R G_{km} = \sum_\mu D_{m\mu}^{k*}(R) G_{k\mu}. \quad (10.2.18)$$

Die Gl. (10.2.18) zeigt, daß die Größen $G_{k\mu}$, die durch die Dichtematrix mit Hilfe von (10.2.16) definiert sind, bei Drehung des Koordinatensystems

sich wie irreduzible Tensoren k-ten Grades verhalten (s. Anhang 1.5.). Wir werden diese Größen als *Spintensoren* bezeichnen.

Die Gl. (10.2.16) kann als Zerlegung der Komponenten des Spintensors $G_{k\mu}$ nach den Elementen der Dichtematrix betrachtet werden. Mit Hilfe der Unitaritätseigenschaften der Vektoradditionskoeffizienten läßt sich aus (10.2.16) umgekehrt eine Zerlegung der Elemente der Dichtematrix nach den Komponenten des Spintensors $G_{k\mu}$ herleiten:

$$\varrho(s_2 m_2 s_1 m_1) = \sum_k (-1)^{m_2} (s_1 s_2, m_1, -m_2 \mid k, m_1 - m_2) \, G_{k, m_1 - m_2}. \tag{10.2.19}$$

Die Beziehung (10.2.19) kann man auch unmittelbar aus (10.2.17) erhalten, wenn man $R = \{0, 0, 0\}$ setzt und

$$D^k_{m\mu}(0, 0, 0) = \delta_{m\mu}$$

berücksichtigt.

Die Gln. (10.2.16) und (10.2.19) zeigen, daß der Spintensor $G_{k\mu}$ ebenso wie die Dichtematrix zur Bestimmung des Polarisationszustandes verwendet werden kann. Im Falle einer Reaktion mit nichtpolarisierten Teilchen sind alle Tensoren G_{km} gleich Null bis auf G_{00}. Ist nämlich keine Polarisation der Teilchen (mit dem Spin i) und der Kerne (mit dem Spin J) vorhanden, so lauten die Elemente der Dichtematrix

$$\varrho(s_2 m_2 s_1 m_1) = \frac{1}{(2i+1)(2J+1)} \, \delta_{s_2 s_1} \, \delta_{m_2 m_1}. \tag{10.2.20}$$

Daher folgt aus der Gl. (10.2.19), daß $G_{00} \neq 0$ und alle anderen $G_{k\mu} = 0$ sind.

In einer Reihe von Fällen beschreibt man die Spinzustände eines Systems am besten mit Hilfe der Spintensoren G_{km}, da sie sich bei Drehungen des Koordinatensystems einfacher als die Dichtematrix transformieren und außerdem mit allen unmittelbar im Experiment gemessenen Größen auf natürlichere Weise verknüpft sind.

Die Spinzustände im Eingangskanal einer Reaktion lassen sich in einigen Fällen durch die Spinzustände von Teilchen und Kern ausdrücken. Dies gilt z. B., *a*) wenn auf einen nichtpolarisierten Kern ein teilweise polarisiertes Teilchenbündel trifft; *b*) wenn ein nichtpolarisiertes Teilchenbündel auf einen teilweise polarisierten Kern fällt; *c*) wenn Teilchenbündel und Kern teilweise polarisiert, ihre Spinzustände aber nicht korreliert sind. In allen diesen Fällen lassen sich die Dichtematrix der Spinzustände des Systems durch die Dichtematrizen für die Spinzustände von Teilchen und Kern und die Spintensoren des Systems durch die Spintensoren des einfallenden Teilchens $G^i_{l\lambda}$ und des Kern $G^J_{n\nu}$ ausdrücken. Dieser Zusammenhang läßt sich leicht finden, wenn man die Spinfunktion des Systems durch die Spinfunktionen der einfallenden Teilchen und des Targetkerns ausdrückt:

$$\chi_{sm} = \sum_M (i\,J, m - M, M \mid s\,m) \, \chi_{i,\, m-M} \, \chi_{JM}.$$

Benutzt man diese Beziehung, so läßt sich für den Fall nichtkorrelierter Spinzustände von einfallenden Teilchen und Kern die Gleichung

$$\varrho(s_2\, m_2\, s_1\, m_1) = \sum_{M_1, M_2} (i\, J,\, m_2 - M_2,\, M_2 \,|\, s_2\, m_2)\,(i\, J,\, m_1 - M_1,\, M_1 \,|\, s_1\, m_1) \times$$
$$\times\, \varrho(i,\, m_2 - M_2,\, i,\, m_1 - M_1)\, \varrho(J\, M_2\, J\, M_1) \tag{10.2.21}$$

herleiten. Die Dichtematrix der Spinzustände von Teilchen mit dem Spin J wird durch den Ausdruck

$$\varrho(J\, M_2\, J\, M_1) = \sum_\alpha w_\alpha\, a_\alpha(J\, M_2)\, a_\alpha^*(J\, M_1) \tag{10.2.22}$$

gegeben. Dabei bedeutet w_α die Wahrscheinlichkeit, mit der ein „reiner" Spinzustand des Teilchens

$$\chi_\alpha = \sum_M a_\alpha(J\, M)\, \chi_{J\, M}$$

in der statistischen Gesamtheit mit dem gegebenen Spinzustand vorhanden ist. Die Dichtematrix (10.2.22) ist im $(2J + 1)$-dimensionalen Spinraum eine hermitesche Matrix.

Drückt man die Dichtematrizen der Teilchen durch die entsprechenden Spintensoren $G^i_{l\lambda}$ und $G^J_{n\nu}$ über die Beziehungen

$$\varrho(i,\, m_2 - M_2,\, i,\, m_1 - M_1) = \sum_{l=0}^{2i} (-1)^{m_2 - M_2} (i\, i,\, m_1 - M_1,\, M_2 - m_2 \,|\, l\, \lambda)\, G^i_{l\lambda},$$

$$\varrho(J\, M_2\, J\, M_1) = \sum_{n=0}^{2J} (-1)^{M_1} (J\, J,\, M_1,\, -M_2 \,|\, n\, \nu)\, G^J_{n\nu}$$

aus, so läßt sich Gl. (10.2.21) in folgender Form schreiben:

$$\varrho(s_2\, m_2\, s_1\, m_1) =$$
$$= \sum_{M_1, M_2, l, n} (-1)^{m_1} (i\, J,\, m_2 - M_2,\, M_2 \,|\, s_2\, m_2)\,(i\, J,\, m_1 - M_1,\, M_1 \,|\, s_1\, m_1) \times$$
$$\times\, (i\, i,\, m_1 - M_1,\, M_2 - m_2 \,|\, l\, \lambda)\,(J\, J,\, M_1,\, -M_2 \,|\, n\, \nu)\, G^i_{l\lambda}\, G^J_{n\nu}. \tag{10.2.23}$$

Der Spintensor eines Teilchens mit dem Spin J drückt sich durch die Dichtematrix der Spinzustände auf folgende Weise aus:

$$G^J_{n\nu} = \sum_{M_1} (-1)^{M_1} (J\, J,\, -M_1,\, M_2 \,|\, n\, \nu)\, \varrho(J\, M_2\, J\, M_1). \tag{10.2.24}$$

Dabei gilt

$$0 \leqq n \leqq 2J, \qquad -n \leqq \nu \leqq n.$$

Der Polarisationszustand eines Bündels von Teilchen mit dem Spin J wird durch die Menge der Spintensoren $G^J_{n\nu}$, deren Grad nicht größer als $2J$ ist, bestimmt. Um also die Polarisation vollständig zu kennen, müssen $(2J + 1)^2$ Größen bekannt sein. Im Fall von Teilchen mit dem Spin $^1/_2$ wird der allgemeinste Zustand der Polarisation durch einen Tensor nullten Grades (keine Polarisation) und durch 3 Komponenten eines Tensors ersten Grades $G_{1\nu}$, d. h. durch 4 Größen, gegeben.

Wird der Anfangszustand eines Systems durch den Spintensor $G^i_{l\lambda}$ beschrieben und ist der Kern nicht polarisiert, so sind in (10.2.23) alle Komponenten der Spintensoren $G^J_{n\nu}$ bis auf G^J_{00} gleich Null zu setzen. Umgekehrt sind bei polarisierten Kernen und nichtpolarisierten Teilchenbündeln alle Komponenten $G^i_{l\lambda}$ außer G^i_{00} Null zu setzen.

Der explizite Ausdruck für den Spintensor läßt sich finden, wenn man berücksichtigt, daß sich $G^J_{n\nu}$ bei Drehungen des Koordinatensystems wie die ν-te Komponente eines irreduziblen Tensors n-ten Grades transformiert. Daher können sich die Tensorkomponenten $G^J_{n\nu}$ nur durch eine Konstante von den entsprechenden Komponenten beliebiger anderer irreduzibler Tensoren aus Teilchenspinoperatoren unterscheiden. So muß z. B. die Verknüpfung zwischen $G^J_{1\nu}$ und den Komponenten des Tensors

$$g^J_{10} = \frac{\hat{J}_z}{\sqrt{J(J+1)}}, \qquad g^J_{1,\pm 1} = \mp \frac{\hat{J}_x \pm i\hat{J}_y}{\sqrt{2J(J+1)}} \tag{10.2.25}$$

die Form

$$G^J_{1\nu} = A\, g^J_{1\nu} \tag{10.2.26}$$

besitzen. Um die Konstante A zu berechnen, kann man z. B. G^J_{10} für den speziellen Fall eines Zustandes, der durch die Wellenfunktion χ_{JJ} charakterisiert ist, bilden. In diesem Fall muß in der Gleichung

$$G^J_{10} = \sum_{M_2} (-1)^{M_2} (J, J, M_1, -M_2 \,|\, 10)\, \varrho(J\, M_2\, J\, M_1),$$

die G^J_{10} mit der Dichtematrix verknüpft,

$$\varrho(J\, M_2\, J\, M_1) = \delta_{M_2 J}\, \delta_{M_1 J}$$

gesetzt werden. Man erhält also

$$\langle J\, J\, |G^J_{10}|\, J\, J\rangle = (-1)^J (J\, J, \, -J\, J \,|\, 10).$$

Für den gleichen Zustand gilt

$$\langle J\, J\, |g^J_{10}|\, J\, J\rangle = \left(\frac{J}{J+1}\right)^{1/2},$$

und damit folgt aus (10.2.26)

$$A = (-1)^J (J\, J, \, -J\, J \,|\, 10) \sqrt{\frac{J}{J+1}}.$$

Der explizite Ausdruck für den Spintensor $G^J_{1\nu}$ lautet also

$$G^J_{1\nu} = (-1)^J \frac{(J\, J, \, -J\, J \,|\, 10)\sqrt{J}}{\sqrt{J+1}}\, g^J_{1\nu}.$$

Verwendet man die allgemeine Formel für die Vektoradditionskoeffizienten [s. Anhang, Gl. (1.2.16)], so findet man

$$(J\, J, \, -J\, J \,|\, 10) = (-1)^{2J-1} (J\, J\, J, \, -J \,|\, 10) =$$
$$= (-1)^{2J-1} (2J)!\, \sqrt{3}\, [(2J+2)!\, (2J-1)!]^{-1/2}. \tag{10.2.27}$$

10.3. Zerlegung der Dichtematrix der Spinzustände nach Basismatrizen im Spinraum und nach Spintensoren

Die Spintensoren $G^J_{n\nu}$ transformieren sich bei Drehung des Koordinatensystems nach der Darstellung D^n der dreidimensionalen Drehungsgruppe [s. Gl. (10.2.18)], sind jedoch nicht hermitesch.

Manchmal benutzt man an Stelle der Spintensoren $G^J_{n\nu}$ zur Beschreibung der Spinzustände eines Teilchenbündels das vollständige System aus $(2J+1)^2$ hermiteschen Matrizen ω^μ im Spinraum für Teilchen mit dem Spin J.

Wir wählen die hermiteschen Matrizen ω^μ im $(2J+1)$-dimensionalen Spinraum so, daß sie der Orthonormierungsbedingung genügen:

$$\mathrm{Sp}(\omega^\mu\,\omega^\nu) = (2J+1)\,\delta_{\mu\nu}. \tag{10.3.1}$$

Das vollständige System hermitescher Matrizen im Spinraum eines Teilchens mit dem Spin J wird bei Erfüllung der Bedingung (10.3.1) als *System der Basismatrizen* bezeichnet.

Im speziellen Fall von Teilchen mit dem Spin $^1/_2$ besteht das System der Basismatrizen aus der Einheitsdiagonalmatrix und den zweireihigen PAULI-Matrizen

$$\omega^{(1)} = I, \qquad \omega^{(2)} = \sigma_z, \qquad \omega^{(3)} = \sigma_x, \qquad \omega^{(4)} = \sigma_y. \tag{10.3.2}$$

Die Spintensoroperatoren sind Linearkombinationen dieser Basisspinmatrizen. Zum Beispiel erhält man für Teilchen mit dem Spin $^1/_2$ nach (10.2.25) und (10.2.26)

$$G^{1/2}_{00} = -i\,\frac{\sqrt{2}}{3}\,\omega^{(1)}, \qquad G^{1/2}_{10} = i\,\frac{\sqrt{2}}{3}\,\omega^{(2)}, \qquad G^{1/2}_{1,\pm 1} = \mp\,\frac{i}{3}\,(\omega^{(3)} \pm i\,\omega^{(4)}).$$

Das vollständige System der Basismatrizen im Spinraum (3 Dimensionen) für Teilchen mit dem Spin 1 läßt sich durch die dreireihige Einheitsmatrix I und die Spinmatrizen s_i für Teilchen mit dem Spin 1 (s. Anhang 1.1.) durch folgende Beziehungen ausdrücken:

$$\begin{aligned}
\omega^{(i)} &= \sqrt{\frac{3}{2}}\,s_i, \qquad i = 1, 2, 3,\\
\omega^{(4)} &= I,\\
\omega^{(l)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,(3s_i^2 - 2),\\
\omega^{(m)} &= \frac{\sqrt{3}}{2}\,(s_i\,s_k + s_k\,s_i), \qquad i \neq k.
\end{aligned}$$

Die Dichtematrix ϱ für Teilchen mit dem Spin J kann nach dem System der Basismatrizen ω^μ zerlegt werden:

$$\varrho = \sum_{\mu=1}^{(2J+1)^2} A_\mu\,\omega^\mu.$$

Unter Benutzung von (10.3.1) lassen sich die Entwicklungskoeffizienten A_μ in (10.3.3) leicht bestimmen:

$$A_\mu = (2J + 1)^{-1}\,\mathrm{Sp}(\varrho\,\omega^\mu)\,.$$

Es gilt also

$$\varrho = (2J + 1)^{-1} \sum_\mu \langle\omega^\mu\rangle\,\omega^\mu \tag{10.3.4}$$

mit

$$\langle\omega^\mu\rangle = \mathrm{Sp}(\varrho\,\omega^\mu) \tag{10.3.5}$$

als Mittelwert der Basismatrix ω^μ im Zustand, der durch die Dichtematrix ϱ beschrieben wird. Gl. (10.3.4) zeigt, daß sich die Dichtematrix unmittelbar durch die im Experiment gemessenen Mittelwerte der Basismatrizen ω^μ ausdrücken läßt.

Für Teilchen mit dem Spin $^1/_2$ findet man, wenn man Gl. (10.3.2) in (10.3.4) einsetzt,

$$\varrho = \frac{1}{2}(I + \langle\vec{\sigma}\rangle\vec{\sigma})\,; \tag{10.3.6}$$

dabei ist

$$\langle\vec{\sigma}\rangle = \mathrm{Sp}\,(\varrho\vec{\sigma}) \equiv \mathfrak{P}\,. \tag{10.3.7}$$

Der Vektor $\mathfrak{P}$ wird als *Polarisationsvektor* bezeichnet. Seine Kenntnis genügt vollständig zur Bestimmung der Dichtematrix der Spinzustände für ein Teilchen mit dem Spin $^1/_2$, da

$$\varrho = \frac{1}{2}(I + \mathfrak{P}\vec{\sigma}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + P_z & P_x - i\,P_y \\ P_x + i\,P_y & 1 - P_z \end{pmatrix}$$

ist.

Wählt man ein Koordinatensystem, dessen z-Achse in Richtung des Polarisationsvektors liegt, so gilt $\langle\sigma_x\rangle = \langle\sigma_y\rangle = 0$. In diesem Fall wird der Polarisationszustand eines Bündels aus Teilchen mit dem Spin $^1/_2$ nur durch 2 Größen festgelegt: $\langle I\rangle$ und $\langle\sigma_z\rangle$, und die Dichtematrix lautet

$$\varrho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + P_z & 0 \\ 0 & 1 - P_z \end{pmatrix}.$$

Im reinen Spinzustand mit bestimmter Spinorientierung wird der Betrag des Polarisationsvektors gleich Eins. Für Teilchen mit dem beliebigen Spin J wird der Zustand einer regellosen Spinorientierung durch die $(2J + 1)$-dimensionale Diagonalmatrix

$$\varrho = \frac{1}{2}I = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

Im allgemeinen Fall ist die Wahl der Basismatrizen für die Zerlegung der Dichtematrix durch die Bedingungen (10.3.1) nicht eindeutig festgelegt. Unter Benutzung dieser Mehrdeutigkeit lassen sich solche Basismatrizen wählen, deren Mittelwerte im gegebenen Zustand am leichtesten bestimmbar sind (z. B. so, daß der Mittelwert einiger der Matrizen Null wird).

Besteht das System aus 2 Teilchen mit dem Spin i bzw. J, so läßt sich der Spinzustand des Systems durch die Basismatrizen Ω^μ ausdrücken, wenn

diese als direktes Produkt[1]) der Basismatrizen ω_i^α und ω_J^β in den Spinräumen der einzelnen Teilchen ausgedrückt werden:

$$\Omega^\mu = \omega_i^\alpha \times \omega_J^\beta. \tag{10.3.8}$$

Genügen die Basismatrizen ω_i und ω_J den Bedingungen (10.3.1), so genügen die Matrizen Ω^μ den Bedingungen

$$\mathrm{Sp}(\Omega^\mu\, \Omega^\nu) = (2i+1)\,(2J+1)\,\delta_{\mu\nu}. \tag{10.3.9}$$

Die Dichtematrix der Spinzustände für das System drückt sich durch die Basismatrizen über die Beziehung

$$\varrho = \frac{1}{(2i+1)\,(2J+1)} \sum_\mu \langle \Omega^\mu \rangle\, \Omega^\mu \tag{10.3.10}$$

mit

$$\langle \Omega^\mu \rangle = \mathrm{Sp}(\varrho\, \Omega^\mu)$$

aus.

Sind die Spinzustände der Teilchen nicht miteinander korreliert, so gilt

$$\langle \Omega^\mu \rangle = \langle \omega_i^\alpha \rangle \langle \omega_J^\beta \rangle,$$

und man kann die Dichtematrix des Systems als Produkt der Dichtematrizen beider Teilchen darstellen:

$$\varrho(\mu_i\, m_J\, \mu_i'\, m_J') = \varrho_i(\mu\, \mu')\, \varrho_J(m\, m'), \tag{10.3.11}$$

$$\varrho_i = (2i+1)^{-1} \sum_\alpha \langle \omega_i^\alpha \rangle\, \omega_i^\alpha,$$

$$\varrho_J = (2J+1)^{-1} \sum_\beta \langle \omega_J^\beta \rangle\, \omega_J^\beta.$$

Der Mittelwert eines beliebigen, im Spinraum eines der Teilchen wirkenden Operators drückt sich bei nichtkorrelierten Spinzuständen der einzelnen Teilchen durch die Dichtematrix der Spinzustände des entsprechenden Teilchens allein aus:

$$\langle L_i \rangle = \mathrm{Sp}(L_i\, \varrho_i). \tag{10.3.12}$$

Sind die Spinzustände der Teilchen korreliert, dann läßt sich die Dichtematrix des Systems nicht auf das Produkt der Dichtematrizen für die Spinzustände der einzelnen Teilchen zurückführen. In diesem Fall kann der Mittelwert eines Operators L_i auf folgende Weise erhalten werden: Man bildet das direkte Produkt der Matrix L_i mit der Einheitsmatrix I_J im Spinraum

---

[1]) Als direktes Produkt $A \times B$ zweier Matrizen $A = (A_{ik})$ und $B = (B_{ik})$ wird eine Matrix bezeichnet, deren Elemente die Produkte aus den Elementen der Matrizen A und B sind. Es gilt also

$$A \times B = \begin{pmatrix} A_{11}\, B & A_{12}\, B & \dots \\ A_{21}\, B & A_{22}\, B & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}\, B_{11} & A_{11}\, B_{12} & \dots & A_{12}\, B_{11} & A_{12}\, B_{12} & \dots \\ A_{11}\, B_{21} & A_{11}\, B_{22} & \dots & A_{12}\, B_{21} & A_{12}\, B_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

des zweiten Teilchens; dabei ergibt sich die Matrix $L_i \times I_J$ im Gesamtspinraum des Systems. Der Mittelwert dieses Operators ist gleich dem Mittelwert des Operators L_i. Daher gilt

$$\langle L_i \rangle = \langle L_i \times I_J \rangle = \sum_{m_i,\, m_i',\, m_J,\, m_J'} (m_i | L_i | m_i') \, \delta_{m_J m_J'} \, \varrho(m_i' \, m_J' \, m_i \, m_J) =$$

$$= \sum_{m_i,\, m_i'} (m_i | L_i | m_i') \, \bar{\varrho}(m_i' \, m_i) = \mathrm{Sp}(L_i \, \bar{\varrho}_i)$$

mit

$$\bar{\varrho}(m_i \, m_i') = \sum_{m_J,\, m_J'} \delta_{m_J m_J'} \, \varrho(m_i' \, m_J' \, m_i \, m_J) = \sum_{m_J} \varrho(m_i' \, m_J \, m_i \, m_J) = \mathrm{Sp}_J \, \varrho$$

als Dichtematrix, die aus der Dichtematrix für die Spinzustände durch Summierung über die Diagonalelemente (über die Quantenzustände des Teilchens mit dem Spin J) hervorgeht. Der Mittelwert eines Operators im Spinraum des Teilchens mit dem Spin i lautet also

$$\langle L_i \rangle = \mathrm{Sp}(L_i \, \mathrm{Sp}_J \, \varrho) . \tag{10.3.13}$$

Für den Fall nichtkorrelierter Spinzustände der Teilchen im System gilt $\varrho = \varrho_i \, \varrho_J$; dann wird $\mathrm{Sp}_J \, \varrho = \varrho_i \, \mathrm{Sp} \, \varrho_J = \varrho_i$, und Gl. (10.3.13) geht in (10.3.12) über.

Ist es vorteilhafter, an Stelle der Basismatrizen im Spinraum eines Teilchens mit dem Spin J die Spintensoren $T^J_{k\varkappa}$ zu verwenden, so normiert man sie bequemer durch die Beziehung

$$\mathrm{Sp}(T^J_{k\varkappa} \, T^{J+}_{k'\varkappa'}) = (2J + 1) \, \delta_{k k'} \, \delta_{\varkappa \varkappa'} . \tag{10.3.14}$$

Unter Verwendung von (10.3.14) läßt sich die Dichtematrix leicht nach den Spintensoren zerlegen:

$$\varrho = \frac{1}{(2J+1)} \sum_{k,\, \varkappa} \langle T^J_{k\varkappa} \rangle \, T^{J+}_{k\varkappa} . \tag{10.3.15}$$

Dabei gilt

$$\langle T^J_{k\varkappa} \rangle = \mathrm{Sp}(\varrho \, T^J_{k\varkappa}) = \sum_{m,\, m'} \varrho(J \, m \, J \, m') \, \langle J \, m' | T^J_{k\varkappa} | \, J \, m \rangle . \tag{10.3.16}$$

Die Berechnung der Matrixelemente von Spintensoroperatoren $T^J_{k\varkappa}$ werden wir im Abschn. 10.5. behandeln.

Für den speziellen Fall von Teilchen mit dem Spin $^1/_2$ wird der Spinzustand durch den Mittelwert der Komponenten des Spintensors

$$T^{1/2}_{10} = \sigma_z , \qquad T^{1/2}_{1,\,\pm 1} = \mp \frac{\sigma_x \pm i \, \sigma_y}{\sqrt{2}} \tag{10.3.17}$$

bestimmt. Diese Komponenten genügen der Bedingung (10.3.14). Die Komponenten des Spintensors $T^{1/2}_{k\varkappa}$ unterscheiden sich von den früher betrachteten Komponenten $G^{1/2}_{k\varkappa}$ durch den Faktor $^1/_2 \sqrt{3}$. Wählt man die z-Achse in Richtung des Polarisationsvektors ($\langle T_{1,\,\pm 1} \rangle = 0$), so wird der Polarisationszustand des Teilchenbündels durch die Mittelwerte von $\langle I \rangle$ und $\langle \sigma_z \rangle$ bestimmt. In diesem Fall stimmen also die Beschreibungen der Polarisation durch Spintensoren und Basismatrizen überein.

Besitzt das Teilchen den Spin 1, so wird sein Spinzustand durch den Mittelwert dreier irreduzibler Tensoren gegeben: durch einen Tensor nullten Grades T^1_{00}, durch einen Tensor ersten Grades $T^1_{1\varkappa}$ und einen Tensor zweiten Grades $T^1_{2\varkappa}$. Diese Tensoren lassen sich aus den dreireihigen Spinmatrizen für Teilchen mit dem Spin 1 (s. Anhang 1.1.) bilden. Die Normierungsbedingungen (10.3.14) für die Komponenten dieser Spintensoren lauten

$$\left.\begin{aligned} &T^1_{00} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad T^1_{11} = -\frac{\sqrt{3}}{2}(s_x + i\,s_y), \qquad T^1_{10} = \sqrt{\frac{3}{2}}\,s_z, \\ &T^1_{22} = \frac{\sqrt{3}}{2}(s_x + i\,s_y)^2, \qquad T^1_{20} = \frac{1}{\sqrt{2}}(3s_z^2 - 2), \\ &T^1_{21} = -\frac{\sqrt{3}}{2}[(s_x + i\,s_y)\,s_z + s_z(s_x + i\,s_y)]. \end{aligned}\right\} \tag{10.3.18}$$

Die übrigen Komponenten der Spintensoren, die negativen Werten der Magnetquantenzahl entsprechen, erhält man unter Benutzung der Beziehungen

$$T_{k\varkappa} = (-1)^{\varkappa}\, T^+_{k\varkappa}.$$

Wählt man wieder das Koordinatensystem so, daß die z-Achse in Richtung des Polarisationsvektors liegt, so gilt $\langle T_{11}\rangle = \langle T_{1,-1}\rangle = 0$. Meist [10,1] gilt hierbei auch $\langle T_{21}\rangle = \langle T_{2,-1}\rangle = 0$. Dann wird der Polarisationszustand eines Teilchens mit dem Spin 1 durch den Mittelwert der übrigen 5 Komponenten des Spintensors bestimmt.

10.4. Winkelverteilung und Polarisation der Produkte von Kernreaktionen bei teilweiser Polarisation der Teilchen im Eingangskanal

Wird der Spinzustand im Eingangskanal durch eine Dichtematrix (teilweise Polarisation) charakterisiert, so erhält man den differentiellen Wirkungsquerschnitt für die Kernreaktion im Kanal aus (10.1.3) durch unmittelbare Verallgemeinerung von (10.1.4):

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\beta\alpha} = \sum \varrho(s_2\, m_2\, s_1\, m_1)\, F^{*\beta\sigma\mu}_{\alpha s_1 m_1}\, F^{\beta\sigma\mu}_{\alpha s_2 m_2}. \tag{10.4.1}$$

Zu summieren ist über alle möglichen Werte von σ, μ, s_2, m_2, s_1, m_1. Verwendet man die Matrixbezeichnungen (10.1.5), so läßt sich (10.4.1) in verkürzter Form schreiben:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\beta\alpha} = \sum (\sigma\,\mu\,|F|\,s_2\,m_2)\,\varrho(s_2\,m_2\,s_1\,m_1)\,(\sigma\,\mu\,|F|\,s_1\,m_1)^* = \mathrm{Sp}(F\,\varrho\,F^+). \tag{10.4.2}$$

Ist im Eingangskanal keine Polarisation vorhanden, so wird die Dichtematrix durch die Formel (10.2.20) gegeben, und (10.4.2) geht unmittelbar in (10.1.6) über.

Drückt man die Dichtematrix für die Spinzustände im Eingangskanal durch die Mittelwerte der Basisspinmatrizen (10.3.10) aus, so erhält der Wirkungsquerschnitt folgende Form:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\beta\alpha} = \frac{1}{(2i+1)(2J+1)} \sum_{\mu} \langle \Omega^{\mu} \rangle \, \mathrm{Sp}(F\, \Omega^{\mu} F^{+}). \tag{10.4.3}$$

Gl. (10.4.3) gilt für Teilchen mit beliebigem Spin und für alle möglichen Polarisationszustände der Teilchen im Eingangskanal.

Die Reaktionsamplitude $(\sigma\, \mu\, | F |\, s\, m)$ kann als Operator betrachtet werden. In diesem Fall führt der Operator den reinen Spinzustand (s, m) im Eingangskanal in den reinen Spinzustand (σ, μ) für den Ausgangskanal der Reaktion über. Dann kann man die Größe $F\, \varrho\, F^{+}$ als Dichtematrix für die Spinzustände im Ausgangskanal bezeichnen [10,2]. Es gilt also

$$\varrho_{\mathrm{ausg}} = F\, \varrho\, F^{+}. \tag{10.4.4}$$

Da die Matrix F nicht unitär ist, ergibt die Summe der Diagonalelemente der Dichtematrix im Ausgangskanal nicht 1, sondern bestimmt den differentiellen Wirkungsquerschnitt der Reaktion:

$$\mathrm{Sp}\, \varrho_{\mathrm{ausg}} = \mathrm{Sp}(F\, \varrho\, F^{+}) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right). \tag{10.4.5}$$

Unter Benutzung der Definition (10.4.4) läßt sich der Mittelwert eines beliebigen Operators L im Spinraum des Ausgangskanals mit Hilfe der Beziehung

$$\langle L \rangle = \frac{\mathrm{Sp}(L\, \varrho_{\mathrm{ausg}})}{\mathrm{Sp}\, \varrho_{\mathrm{ausg}}} = \frac{\mathrm{Sp}(L\, F\, \varrho\, F^{+})}{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)} \tag{10.4.6}$$

gewinnen. Erhält man durch die Kernreaktion Teilchen mit dem Spin $^1/_2$, so läßt sich durch Einsetzen der PAULIschen Vektormatrix für L in (10.4.6) der Polarisationsvektor $\mathfrak{P}$ für das Teilchenbündel bestimmen:

$$\mathfrak{P} = \langle \vec{\sigma} \rangle = \frac{\mathrm{Sp}(\vec{\sigma}\, F\, \varrho\, F^{+})}{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)}. \tag{10.4.7}$$

Benutzt man die Darstellung (10.3.10) für die Dichtematrix im Eingangskanal, so läßt sich (10.4.6) in der Form

$$\langle L \rangle = \frac{\sum_{\mu} \langle \Omega^{\mu} \rangle \, \mathrm{Sp}(L\, F\, \Omega^{\mu}\, F^{+})}{\sum_{\mu} \langle \Omega^{\mu} \rangle \, \mathrm{Sp}(F\, \Omega^{\mu}\, F^{+})} \tag{10.4.8}$$

schreiben. Setzt man in (10.4.8) statt L der Reihe nach alle Basismatrizen des Spinraums vom Eingangskanal ein, so erhält man eine vollständige Beschreibung aller Größen, die die Reaktion im gegebenen Ausgangskanal bestimmen.

Der Spinzustand der Produkte von Kernreaktionen läßt sich im Ausgangskanal auch durch die Mittelwerte der Spintensoren charakterisieren. Zum Beispiel kann man den Spinzustand eines Teilchens mit dem Spin i im Aus-

gangskanal der Reaktion auch durch die Mittelwerte der Spintensoren $T^i_{k\varkappa}$ mit $k \leqq 2i$ charakterisieren. Die Mittelwerte dieser Spintensoren lauten nach (10.4.6)

$$\langle T^i_{k\varkappa}\rangle = \frac{\mathrm{Sp}\,(T^i_{k\varkappa}\,\varrho_{\text{ausg}})}{\mathrm{Sp}\,\varrho_{\text{ausg}}} = \frac{\mathrm{Sp}\,(T^i_{k\varkappa}\,F\,\varrho\,F^+)}{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)}$$

oder, ausführlicher geschrieben:

$$\langle T^i_{k\varkappa}\rangle = \frac{\sum (\sigma_1\mu_1\,|T^i_{k\varkappa}|\,\sigma_2\mu_2)\,(\sigma_2\mu_2\,|F|\,s_2 m_2)\,\varrho\,(s_2 m_2\, s_1 m_1)\,(\sigma_1\mu_1\,|F|\,s_1 m_1)^*}{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)}. \tag{10.4.9}$$

Zerlegt man nach (10.2.15) die Dichtematrix nach den Spintensoren G für den Eingangskanal, dann lassen sich unter Berücksichtigung der Additivität der Anteile aus den einzelnen Spintensoren der Wirkungsquerschnitt und die Mittelwerte der Spintensoren für den Ausgangskanal berechnen.

Die Matrixelemente $(\sigma_1\mu_1\,|T^i_{k\varkappa}|\,\sigma_2\mu_2)$, die in (10.4.9) eingehen, werden im nächsten Abschnitt berechnet. Setzt man die entsprechenden Werte in (10.4.9) ein und summiert über die Magnetquantenzahlen, so läßt sich der explizite Ausdruck für den differentiellen Wirkungsquerschnitt und für die Mittelwerte der Spintensoren im Ausgangskanal durch die Streumatrix und die RACAH-Koeffizienten ausdrücken. Die entsprechenden Ausdrücke findet man in der Arbeit von SIMON [vgl. 10,1]. Da sie sehr kompliziert und lang sind, wollen wir hier nicht näher auf sie eingehen.

In (10.4.9) sind die Spintensoren $T^i_{k\varkappa}$ bezüglich eines Koordinatensystems x, y, z mit der z-Achse in Richtung des einfallenden Bündels bestimmt worden. Es ist jedoch bequemer, den Spintensor des Endteilchens in bezug auf ein neues Koordinatensystem x', y', z' mit der z'-Achse in Richtung des Wellenvektors $\mathfrak{k}_\beta$ des Endteilchens und mit der y'-Achse in Richtung von $[\mathfrak{k}_\beta\,\mathfrak{k}_\alpha]$ anzugeben, wobei $\mathfrak{k}_\alpha$ der Wellenvektor des einfallenden Teilchens ist. Die EULERschen Winkel, die die Lage des gestrichenen Koordinatensystems in bezug auf das gegebene bestimmen, sind $(\varphi,\ \vartheta,\ 0)$. Die Komponenten der Spintensoren $T'_{k\varkappa}$ im neuen Koordinatensystem drücken sich durch die Komponenten der Spintensoren $T_{k\varkappa}$ im x, y, z-System über die Beziehung [s. Anhang, Gl. (1.5.8a)]

$$T'_{k\varkappa'} = \sum_{\varkappa} D^{k*}_{\varkappa'\varkappa}(\varphi, \vartheta, 0)\,T_{k\varkappa}$$

aus.

10.5. Berechnung der Matrixelemente von Spintensoroperatoren

Das Matrixelement

$$\langle\sigma_1\mu_1\,|g^{(q)}_{k\varkappa}|\,\sigma\mu\rangle \tag{10.5.1}$$

des Spintensoroperators eines Teilchens mit dem Spin q wird aus den Spinwellenfunktionen für den Ausgangskanal der Reaktion berechnet. Die Spinwellenfunktionen für den Ausgangskanal ergeben sich aus den Spinwellen-

funktionen für den Restkern $\chi_{Q\nu}$ und für das emittierte Teilchen $\chi_{q,\mu-\nu}$ mit Hilfe der Beziehung

$$\chi_{\sigma\mu} = \sum_{\nu} (q\,Q, \mu - \nu, \nu\,|\,\sigma\,\mu)\,\chi_{q,\mu-\nu}\,\chi_{Q\nu}. \tag{10.5.2}$$

Dabei gilt $|Q - q| \leqq \sigma \leqq Q + q$. Da der Spintensoroperator $g_{k\varkappa}^{(q)}$ nur auf die Spinfunktionen des Teilchens q wirkt, gilt

$$(\sigma_1\,\mu_1\,|g_{k\varkappa}^{(q)}|\,\sigma\,\mu) = \sum_{\nu} (q\,Q, \mu_1 - \nu, \nu\,|\,\sigma_1\,\mu_1) \times$$
$$\times (q\,Q, \mu - \nu, \nu\,|\,\sigma\,\mu)\,\langle q, \mu_1 - \nu\,|\,g_{k\varkappa}^{(q)}|\,q, \mu - \nu\rangle. \tag{10.5.3}$$

Im Matrixelement auf der rechten Seite von (10.5.3) läßt sich mit Hilfe der Gl. (1.7.5) des Anhangs

$$\langle q, \mu_1 - \nu\,|\,g_{k\varkappa}\,|\,q, \mu - \nu\rangle = (k\,q\,\varkappa, \mu - \nu\,|\,q, \mu_1 - \nu)\,\langle q\,||\,g_k\,||\,q\rangle \tag{10.5.4}$$

die explizite Abhängigkeit von den Magnetquantenzahlen abtrennen. Dabei ist $\langle q\,||\,g_k\,||\,q\rangle$ ein nicht mehr von den Magnetquantenzahlen abhängendes Matrixelement des Spintensoroperators.

Setzt man (10.5.4) in (10.5.3) ein, so wird

$$\langle\sigma_1\,\mu_1\,|g_{k\varkappa}|\,\sigma\,\mu\rangle = \langle q\,||g_k||\,q\rangle \sum_{\nu} (q\,Q, \mu - \nu, \nu\,|\,\sigma\,\mu) \times$$
$$\times (k\,q, \varkappa, \mu - \nu\,|\,q, \mu_1 - \nu)\,(q\,Q, \mu_1 - \nu, \nu\,|\,\sigma_1\,\mu_1). \tag{10.5.5}$$

Die Summe über die Quantenzahlen ν in (10.5.5) kann unter Berücksichtigung der Gl. (1.9.2) des Anhangs gebildet werden, indem man das Produkt) der beiden letzten Vektoradditionskoeffizienten durch Racah-Koeffizienten ausdrückt:

$$(k\,q\,\varkappa, \mu - \nu\,|\,q, \mu_1 - \nu)\,(q\,Q, \mu_1 - \nu, \nu\,|\,\sigma_1\,\mu_1) =$$
$$= \sum_{j} \sqrt{(2j+1)\,(2q+1)}\,(q\,Q, \mu - \nu, \nu\,|\,j\,\mu)\,(k\,j\,\varkappa\,\mu\,|\,\sigma_1\,\mu_1)\,W(k\,q\,\sigma_1\,Q; q\,j).$$

Setzt man dies in (10.5.5) ein und berücksichtigt die Orthogonalitätseigenschaften der Vektoradditionskoeffizienten, so findet man

$$(\sigma_1\,\mu_1\,|g_{k\varkappa}|\,\sigma\,\mu) = [(2q+1)\,(2\sigma+1)]^{1/2}\,(k\,\sigma\,\varkappa\,\mu\,|\,\sigma_1\,\mu_1) \times$$
$$\times \langle q\,||g_k||\,q\rangle\,W(k\,q\,\sigma_1\,Q; q\,\sigma). \tag{10.5.6}$$

Berücksichtigt man noch die Symmetrieeigenschaften der Vektoradditionskoeffizienten

$$(k\,\sigma\,\varkappa\,\mu\,|\,\sigma_1\,\mu_1) = (-1)^{\sigma+\mu}\left(\frac{2\sigma_1+1}{2k+1}\right)^{1/2}(\sigma_1\,\sigma, -\mu_1, \mu\,|\,k, -\varkappa)$$

und der Racah-Koeffizienten

$$W(k\,q\,\sigma_1\,Q;\; q\,\sigma) = (-1)^{q+\sigma-k-Q}\,W(q\,\sigma_1\,q\,\sigma;\; Q\,k),$$

so läßt sich (10.5.6) auf folgende Form bringen:

$$(\sigma_1 \mu_1 | g_{k\varkappa} | \sigma \mu) = (-1)^{q-k-Q-\mu_1} \sqrt{\frac{(2q+1)(2\sigma+1)(2\sigma_1+1)}{2k+1}} \times \\ \times (\sigma_1 \sigma, -\mu_1, \mu | k, -\varkappa) \langle q || g_k || q \rangle W(q \sigma_1 q \sigma; Q k). \tag{10.5.7}$$

Zur Ermittlung des reduzierten Matrixelements $\langle q || g_k || q \rangle$, das nur von den Quantenzahlen q und k abhängt, genügt es, (10.5.7) für den einfachsten Fall zu berechnen. Wir betrachten also z. B. den Fall $Q = \varkappa = 0$ und $\mu_1 = \mu = q$; dann gilt $\sigma_1 = \sigma = q$, und (10.5.7) geht in

$$\langle qq | g_{10} | qq \rangle = -\left[\frac{(2q+1)^3}{3}\right]^{1/2} \langle q || g_1 || q \rangle (qq, -q, q | 10) W(qqqq; 01) \tag{10.5.8}$$

über.

Setzt man weiterhin $g_{10}^{(q)} = \frac{\hat{q}_z}{\sqrt{q(q+1)}}$ und berücksichtigt

$$\langle q\, q | g_{10}^{(q)} | q\, q \rangle = \sqrt{q/(q+1)},$$

$$W(q\,q\,q\,q;\ 0\,1) = (-1)^{2q-1} (2q+1)^{-1},$$

so folgt aus (10.5.8)

$$\langle q || g_1^{(q)} || q \rangle = (-1)^{2q} \left[\frac{3q}{(q+1)(2q+1)}\right]^{1/2} (q\,q, -q, q | 10)^{-1} \tag{10.5.9}$$

und damit

$$\langle \sigma_1 \mu_1 | g_{1\varkappa}^{(q)} | \sigma \mu \rangle = (-1)^{1+q+Q+\mu_1} \left[\frac{q(2\sigma+1)(2\sigma_1+1)}{(q+1)}\right]^{1/2} \times \\ \times \frac{(\sigma_1 \sigma_2, -\mu_1, \mu | 1, -\varkappa)}{(q\,q, -q, q | 10)} W(q_1 \sigma_1 q \sigma; Q1) \tag{10.5.10}$$

mit

$$(q\,q, -q, q | 10) = (-1)^{2q-1} (2q)! \sqrt{3} [(2q+2)!\ (2q-1)]^{-1/2}. \tag{10.5.11}$$

Wir ermitteln nunmehr das Matrixelement $(J\,m' | T_{k\varkappa}^J | J\,m)$, das in die Formel (10.3.16) eingeht und den Mittelwert der Spintensoroperatoren für Teilchen mit dem Spin J bestimmt. Mit Hilfe der Gl. (1.7.5) des Anhangs erhalten wir

$$(J\,m' | T_{k\varkappa}^J | J\,m) = (k\,J\,\varkappa\,m \,|\, J\,m') \langle J || T_k^J || J \rangle. \tag{10.5.12}$$

Für den speziellen Fall $J = 1/2$, $k = 0, 1$ gilt

$$\left(\frac{1}{2} m' | T_{00}^{1/2} | \frac{1}{2} m\right) = \delta_{mm'} T_{00}^{1/2} = \sqrt{2}\, \delta_{mm'},$$

$$\left(\frac{1}{2} m' | T_{1\varkappa}^{1/2} | \frac{1}{2} m\right) = \left(1 \frac{1}{2} \varkappa\, m \,\middle|\, \frac{1}{2} m'\right) \left\langle \frac{1}{2} || T_1^{1/2} || \frac{1}{2} \right\rangle. \tag{10.5.13}$$

Zur Berechnung von $\langle 1/2 || T_1^{1/2} || 1/2 \rangle$ setzen wir in (10.5.13) $\varkappa = 0$, $m = m' = 1/2$:

$$\left\langle \frac{1}{2} || T_1^{1/2} || \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{\left(\frac{1}{2} \frac{1}{2} | T_{10}^{1/2} | \frac{1}{2} \frac{1}{2}\right)}{\left(1 \frac{1}{2} 0 \frac{1}{2} \,\middle|\, \frac{1}{2} \frac{1}{2}\right)}.$$

Berücksichtigt man (10.3.17), so gilt $(^1/_2\, ^1/_2 \,|\, T^{1/2}_{10} |\, ^1/_2\, ^1/_2) = {}^1/_2$. Weiter ist

$$\left(1\,\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}\,\Big|\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{und damit} \quad \left\langle\frac{1}{2}\,\|\,T^{1/2}_{1}\,\|\,\frac{1}{2}\right\rangle = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Setzt man dies in (10.5.13) ein, so wird endgültig

$$\left(\frac{1}{2}\,m'\,|\,T^{1/2}_{1\varkappa}|\,\frac{1}{2}\,m\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1\,\frac{1}{2}\,\varkappa\,m\,\Big|\,\frac{1}{2}\,m'\right). \qquad (10.5.14)$$

Analog erhält man für Teilchen mit dem Spin $J = 1$ unter Benutzung von (10.3.18)

$$(1m'\,|T^1_{00}|\,1m) = \sqrt{3}\,\delta_{mm'},$$
$$(1m'\,|T^1_{1\varkappa}|\,1m) = -(1\,1\,\varkappa\,m\,|\,1m')\sqrt{3},$$
$$\langle 1\,\|T^1_1\|\,1\rangle = -\sqrt{3}, \qquad \langle 1\,\|T^1_2\|\,1\rangle = \sqrt{5},$$
$$(1\,m'\,|T^1_{2\varkappa}|\,1m) = (2\,1\,\varkappa\,m\,|\,1m')\sqrt{5}.$$

10.6. Streuung von teilweise polarisierten Nukleonen an nichtpolarisierten Kernen

Wir wenden nun die allgemeinen Formeln aus dem Abschn. 10.4. auf den Fall der elastischen und unelastischen Streuung von Nukleonen an nichtpolarisierten Kernen an. Wir betrachten also Reaktionen des Typs

$$\mathrm{a} + \mathrm{A} \to \mathrm{A}^* + \mathrm{a}.$$

Die Basismatrizen im Spinraum des Nukleons lauten $\omega^\alpha \equiv \{I, \vec{\sigma}\}$. Die Basismatrizen im Spinraum des Kerns A mit dem Spin J bezeichnen wir mit $\omega^\beta_J = \{I_J, \omega^{(2)}_J, \ldots\}$. Die Dichtematrix im Eingangskanal lautet dann

$$\varrho_{\text{eing}} = \frac{1}{2(2J+1)} \sum_\mu \langle \Omega^\mu \rangle_{\text{eing}}\, \Omega^\mu, \qquad \Omega^\mu = \omega^\alpha_a \times \omega^\beta_J. \qquad (10.6.1)$$

Da im Eingangskanal die Kerne A nicht polarisiert sind, werden nur die Mittelwerte $\langle \Omega^\mu \rangle_{\text{eing}}$ von Null verschieden sein, für die die Komponenten aus dem direkten Produkt der Matrizen ω^α_a mit der Einheitsmatrix I_J gebildet wurden. Daher gilt

$$\varrho_{\text{eing}} = \frac{1}{2(2J+1)}(I + \vec{\sigma}\,\mathfrak{P}_{\text{eing}})\,I_J, \qquad \mathrm{Sp}\,\varrho_{\text{eing}} = 1 \qquad (10.6.2)$$

mit $\mathfrak{P}_{\text{eing}} = \langle \vec{\sigma} \rangle_{\text{eing}}$ als Mittelwert des Polarisationsvektors der Nukleonen im Eingangskanal.

Der differentielle Wirkungsquerschnitt für die Streuung mit der Dichtematrix (10.6.2) für den Eingangskanal wird durch

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \mathrm{Sp}(F\,\varrho_{\text{eing}}F^+) = \frac{1}{2(2J+1)}\{\mathrm{Sp}(FF^+) + \mathfrak{P}_{\text{eing}}\,\mathrm{Sp}(F\vec{\sigma}F^+)\} \quad (10.6.3)$$

gegeben.

Für den Fall nichtpolarisierter Nukleonen gilt $\mathfrak{P}_{\text{eing}} = 0$, und der Streuquerschnitt nimmt folgende Form an:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^u = \frac{1}{2(2J+1)} \operatorname{Sp}(F F^+). \tag{10.6.4}$$

Der Gesamtwirkungsquerschnitt für die Streuung (10.6.3) lautet somit

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^u \left\{1 + \mathfrak{P}_{\text{eing}} \frac{\operatorname{Sp}(F \vec{\sigma} F^+)}{\operatorname{Sp}(F F^+)}\right\}. \tag{10.6.5}$$

Der Mittelwert des Polarisationsvektors im Ausgangskanal ist nach (10.4.7) und (10.6.2) durch die Relation

$$\mathfrak{P}_{\text{ausg}} = \langle\vec{\sigma}\rangle_{\text{ausg}} = \frac{\operatorname{Sp}(\vec{\sigma} F F^+) + \mathfrak{P}_{\text{eing}} \operatorname{Sp}(\vec{\sigma} F \vec{\sigma} F^+)}{\operatorname{Sp}(F F^+) + \mathfrak{P}_{\text{eing}} \operatorname{Sp}(F \vec{\sigma} F^+)} \tag{10.6.6}$$

gegeben. Für nichtpolarisierte Nukleonen gilt

$$\mathfrak{P}^u_{\text{ausg}} = \frac{\operatorname{Sp}(\vec{\sigma} F F^+)}{\operatorname{Sp}(F F^+)}. \tag{10.6.7}$$

Die Gl. (10.6.6) läßt sich also auf folgende Form bringen:

$$\mathfrak{P}_{\text{ausg}} = \frac{\mathfrak{P}^u_{\text{ausg}} + B\,\mathfrak{P}_{\text{eing}}}{1 + \mathfrak{P}_{\text{eing}} \frac{\operatorname{Sp}(F \vec{\sigma} F^+)}{\operatorname{Sp}(F F^+)}}. \tag{10.6.8}$$

Dabei ist B als Tensor zweiten Grades zu betrachten. Seine Elemente sind durch die Beziehungen

$$B_{xy} \equiv \frac{\operatorname{Sp}(\sigma_x F \sigma_y F^+)}{\operatorname{Sp}(F F^+)} \tag{10.6.9}$$

gegeben. Die in (10.6.8) eingehende Größe $B\,\mathfrak{P}_{\text{eing}}$ ist also ein Vektor mit den Komponenten

$$(B\,\mathfrak{P}_{\text{eing}})_i = \sum_{k=1}^{3} B_{ik} (\mathfrak{P}_{\text{eing}})_k, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{10.6.8a}$$

Der Polarisationsvektor $\mathfrak{P}^u_{\text{ausg}}$ für die gestreuten nichtpolarisierten Nukleonen ist ein Pseudovektor (Mittelwert der Paulischen Vektormatrix). Bei der Streuung nichtpolarisierter Nukleonen an nichtpolarisierten Kernen kann er eine Funktion der Relativimpulse im Eingangs- ($\mathfrak{k}_\alpha$) und Ausgangskanal ($\mathfrak{k}_\beta$) allein sein. Daher gilt

$$\mathfrak{P}^u_{\text{ausg}} = P^u_{\text{ausg}}\,\mathfrak{n} \tag{10.6.10}$$

mit dem pseudoskalaren Einheitsvektor $\mathfrak{n}$, der aus den Vektoren $\mathfrak{k}_\beta$ und $\mathfrak{k}_\alpha$ gebildet wird:

$$\mathfrak{n} = \frac{[\mathfrak{k}_\beta\,\mathfrak{k}_\alpha]}{|[\mathfrak{k}_\beta\,\mathfrak{k}_\alpha]|}. \tag{10.6.11}$$

Der Polarisationsvektor bei der Streuung nichtpolarisierter Nukleonen an nichtpolarisierten Kernen steht stets senkrecht zur Streuebene.

Wolfenstein und Ashkin [10,3] zeigten, daß bei elastischer Streuung von Nukleonen an nichtpolarisierten Kernen infolge der Invarianz der Streuamplitude bezüglich Zeitumkehr folgende Gleichung gilt:

$$\mathrm{Sp}(F\vec{\sigma}\,F^{+}) = \mathrm{Sp}(\vec{\sigma}\,F\,F^{+}). \tag{10.6.12}$$

Unter Berücksichtigung dieser Gleichung und der Beziehung (10.6.7) läßt sich der differentielle Wirkungsquerschnitt (10.6.5) für elastische Streuung in der Form

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\mathrm{el}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\mathrm{el}}^{u} \{1 + A\}, \tag{10.6.13}$$

$$A \equiv \mathfrak{P}_{\mathrm{eing}}\,\mathfrak{P}^{u}_{\mathrm{ausg}} \leqq 1 \tag{10.6.14}$$

darstellen. A ist ein Koeffizient, der die Azimutalasymmetrie der gestreuten Nukleonen bestimmt. Berücksichtigt man (10.6.10), so läßt sich der Asymmetriekoeffizient (10.6.14) auf folgende Form bringen:

$$A \equiv \mathfrak{P}_{\mathrm{eing}}\,\mathfrak{P}^{u}_{\mathrm{ausg}} = P^{u}_{\mathrm{ausg}}\,\mathfrak{n}\,\mathfrak{P}_{\mathrm{eing}}. \tag{10.6.14a}$$

Aus (10.6.13) und (10.6.14a) folgt, daß die Streuung von polarisierten Nukleonen von der Komponenten des Polarisationsvektors der einfallenden Nukleonen in Richtung der Normalen zur Streuebene abhängt. Die Messung der Azimutalasymmetrie gestattet Rückschlüsse über den Polarisationsgrad des einfallenden Bündels. Dem Polarisationsgrad entspricht die Komponente des Polarisationsvektors $\mathfrak{P}_{\mathrm{eing}}$ senkrecht zur Einfallsrichtung. Die longitudinale Komponente von $\mathfrak{P}_{\mathrm{eing}}$ ist stets senkrecht zu $\mathfrak{n}$ und liefert keinen Beitrag zu A und daher auch nicht zum Streuquerschnitt (10.6.13).

Mit Hilfe von (10.6.12), (10.6.7) und (10.6.14a) läßt sich der Polarisationsvektor für an nichtpolarisierten Kernen elastisch gestreute Nukleonen auf folgende Form bringen:

$$\mathfrak{P}_{\mathrm{ausg}} = \frac{P^{u}_{\mathrm{ausg}}\,\mathfrak{n} + B\,\mathfrak{P}_{\mathrm{eing}}}{1 + A}. \tag{10.6.15}$$

Kennt man die Dichtematrix für die Spinzustände im Ausgangskanal $\varrho_{\mathrm{ausg}} = F\,\varrho_{\mathrm{eing}}\,F^{+}$, so kann man nicht nur den Polarisationszustand der Nukleonen im Ausgangskanal, sondern auch die Mittelwerte der Basismatrizen ω^{μ}_{J} im Spinraum des Rückstoßkerns

$$\langle\omega^{\mu}_{J}\rangle = \frac{\mathrm{Sp}(\omega^{\mu}_{J}\,\varrho_{\mathrm{ausg}})}{\mathrm{Sp}(\varrho_{\mathrm{ausg}})} = \frac{\mathrm{Sp}(\omega^{\mu}_{J}\,F\,F^{+}) + \mathfrak{P}_{\mathrm{eing}}\,\mathrm{Sp}(\omega^{\mu}_{J}\,F\vec{\sigma}F^{+})}{\mathrm{Sp}(F\,F^{+}) + \mathfrak{P}_{\mathrm{eing}}\,\mathrm{Sp}(F\vec{\sigma}F^{+})} \tag{10.6.16}$$

bestimmen. Diese Größen bestimmen die Dichtematrix der Spinzustände für die Rückstoßkerne

$$\varrho_J = \frac{1}{2J+1} \sum_{\mu} \langle\omega^{\mu}_{J}\rangle\,\omega^{\mu}_{J}$$

vollständig.

Die Streuamplitude für die Streuung von Nukleonen an nichtpolarisierten Kernen (mit einem von Null verschiedenen Spin) muß auf Grund der Invarianz bezüglich räumlicher Drehungen (s. Abschn. 7.4.) folgende Form besitzen:

$$F = a\,I + b\,\vec{\sigma}\,\mathfrak{n} + c\,\vec{\sigma}\,\mathfrak{K} + d\,\vec{\sigma}\,\mathfrak{N}. \tag{10.6.17}$$

Dabei ist der Vektor $\mathfrak{n}$ durch (10.6.11) gegeben und

$$\mathfrak{K} = \frac{\mathfrak{k}_\beta - \mathfrak{k}_\alpha}{|\mathfrak{k}_\beta - \mathfrak{k}_\alpha|}, \qquad \mathfrak{N} = \frac{[\mathfrak{n}\,\mathfrak{K}]}{|[\mathfrak{n}\,\mathfrak{K}]|}.$$

Die Größen a, b, c, d sind Matrizen, deren Elemente Funktionen von k_α^2, k_β^2 und dem Streuwinkel sind. Aus der Invarianz von F bezüglich räumlicher Inversion folgt, daß sich a und b durch skalare Funktionen und c und d durch pseudoskalare Funktionen ausdrücken lassen. Für die elastische Streuung ist die Streuamplitude invariant bezüglich Zeitumkehr. Dies führt zu zusätzlichen Forderungen für die Koeffizienten in (10.6.17): Bei Zeitumkehr muß die Matrix c ihr Vorzeichen wechseln, die übrigen Matrizen dürfen sich nicht ändern.

Mit Hilfe von (10.6.17) kann man den Streuquerschnitt und die Polarisation der vor der Streuung nichtpolarisierten Nukleonen durch die Matrizen a, b, c, d ausdrücken:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^u = \frac{1}{2(2J+1)}\,\mathrm{Sp}(a\,a^+ + b\,b^+ + c\,c^+ + d\,d^+), \tag{10.6.18}$$

$$P_{\text{ausg}}^u = \frac{\mathrm{Sp}(a\,b^+ + a\,b^+)}{2(2J+1)\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^u}\,\mathfrak{n}. \tag{10.6.19}$$

Erfolgt die Streuung an Kernen mit dem Spin 0, so wird die Streuamplitude nur durch zwei komplexe Funktionen (a' und b'), den Streuwinkel und die Energie bestimmt:

$$F = a'\,I + b'\,\vec{\sigma}\,\mathfrak{n}. \tag{10.6.20}$$

In diesem Fall erhält man für den Streuquerschnitt

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^u = (a'\,a'^* + b'\,b'^*) \tag{10.6.18a}$$

und für den Polarisationsvektor

$$\mathfrak{P}_{\text{ausg}}^u = \frac{a'\,b'^* + a'^*\,b'}{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^u}\,\mathfrak{n} = \frac{2\,\Re e\,(a'\,b'^*)}{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^u}\,\mathfrak{n}. \tag{10.6.19a}$$

Setzt man

$$a' = a_0\,e^{i\alpha}, \qquad b' = b_0\,e^{i\beta}, \tag{10.6.21}$$

dann lassen sich der differentielle Streuquerschnitt von nichtpolarisierten Nukleonen und ihre Polarisation nach der Streuung durch die Funktionen a_0, b_0, α, β, durch die Energie und den Streuwinkel ausdrücken:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^u = (a_0^2 + b_0^2), \tag{10.6.18b}$$

$$\mathfrak{P}_{\text{ausg}}^u = \frac{2\,a_0\,b_0\cos(\alpha-\beta)}{a_0^2 + b_0^2}\,\mathfrak{n}. \tag{10.6.19b}$$

Bei der Streuung von Nukleonen an Kernen mit dem Spin 0 erhält man unter Benutzung von (10.6.8a):

$$B\,\mathfrak{P}_{\text{eing}} = \frac{(a_0^2 - b_0^2)\,\mathfrak{P}_{\text{eing}} + 2b_0^2\,\mathfrak{n}\,(\mathfrak{n}\,\mathfrak{P}_{\text{eing}}) + 2\,a_0\,b_0\sin(\alpha-\beta)\,[\mathfrak{n}\,\mathfrak{P}_{\text{eing}}]}{a_0^2 + b_0^2}. \tag{10.6.22}$$

Liegt der Polarisationsvektor $\mathfrak{P}_{\text{eing}}$ für das einfallende Nukleonenbündel in der Streuebene, d. h., ist $(\mathfrak{n}\,\mathfrak{P}_{\text{eing}}) = 0$, so liegt der Vektor $(B\,\mathfrak{P}_{\text{eing}})$ ebenfalls in dieser Ebene. In diesem Fall verschwindet nach (10.6.14a) der Koeffizient für die Azimutalasymmetrie A, und nach (10.6.15) hängt die zur Streuebene senkrechte Komponente des Polarisationsvektors für die gestreuten Nukleonen nicht vom Polarisationsvektor $\mathfrak{P}_{\text{eing}}$ für die einfallenden Nukleonen ab:

$$(\mathfrak{n}\,\mathfrak{P}_{\text{ausg}}) = P^u_{\text{ausg}} \quad \text{für} \quad (\mathfrak{n}\,\mathfrak{P}_{\text{eing}}) = 0. \tag{10.6.23}$$

Steht der Polarisationsvektor der einfallenden Nukleonen senkrecht zur Streuebene, d. h. $\mathfrak{P}_{\text{eing}} = P_{\text{eing}}\,\mathfrak{n}$, so gilt nach (10.6.22)

$$B\,\mathfrak{P}_{\text{eing}} = P_{\text{eing}}\,\mathfrak{n}.$$

Damit folgt aus (10.6.15), daß auch der Polarisationsvektor für die gestreuten Nukleonen senkrecht auf der Streuebene steht:

$$\mathfrak{P}_{\text{ausg}} = \frac{P_{\text{ausg}} + P_{\text{eing}}}{1 + A}\,\mathfrak{n} \quad \text{für} \quad \mathfrak{P}_{\text{eing}} = \mathfrak{n}\,P_{\text{eing}}. \tag{10.6.24}$$

Aus (10.6.14) und (10.6.19b) folgt, daß der Koeffizient der Azimutalasymmetrie bei der Streuung von Nukleonen an Kernen mit dem Spin 0 in folgender Form geschrieben werden kann:

$$A = \mathfrak{P}_{\text{eing}}\,\mathfrak{P}^u_{\text{ausg}} = \frac{2 a_0 b_0}{a_0^2 + b_0^2}\cos(\alpha - \beta)\,(\mathfrak{n}\,\mathfrak{P}_{\text{eing}}). \tag{10.6.25}$$

Der differentielle Wirkungsquerschnitt für elastische Streuung polarisierter Nukleonen an Kernen mit dem Spin 0 nimmt somit folgende Form an [s. die Gln. (10.6.13) und (10.6.18b)]:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{el}} = (a_0^2 + b_0^2)\left[1 + \frac{2 a_0 b_0}{a_0^2 + b_0^2}\cos(\alpha - \beta)\,(\mathfrak{n}\,\mathfrak{P}_{\text{eing}})\right]. \tag{10.6.26}$$

Der Polarisationsvektor für die gestreuten Nukleonen wird dabei durch die Gleichung

$$\mathfrak{P}_{\text{ausg}} = \frac{2 a_0 b_0 \cos(\alpha - \beta)\,\mathfrak{n} + (a_0^2 - b_0^2)\,\mathfrak{P}_{\text{eing}} + 2 b_0^2\,\mathfrak{n}\,(\mathfrak{n}\,\mathfrak{P}_{\text{eing}}) + 2 a_0 b_0 \sin(\alpha - \beta)\,[\mathfrak{n}\,\mathfrak{P}_{\text{eing}}]}{a_0^2 + b_0^2 + a_0 b_0 \cos(\alpha - \beta)\,(\mathfrak{n}\,\mathfrak{P}_{\text{eing}})} \tag{10.6.27}$$

gegeben.

10.7. Elastische Zweifach- und Dreifachstreuung von Nukleonen an nichtpolarisierten Kernen

Nehmen wir an, daß ein nichtpolarisiertes Neutronenbündel an einem Kern mit dem Spin J_1 gestreut wird, dann sind nach Abschn. 10.6. der differentielle Streuquerschnitt und der Polarisationsvektor

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_1 = [2(2J_1 + 1)]^{-1}\,\mathrm{Sp}(F F^+), \tag{10.7.1}$$

$$\mathfrak{P}_1 = \left|\frac{\mathrm{Sp}(\vec{\sigma} F F^+)}{\mathrm{Sp}(F F^+)}\right|\mathfrak{n}_1, \qquad \mathfrak{n}_1 = \frac{[\mathfrak{k}_0\,\mathfrak{k}_1]}{|[\mathfrak{k}_0\,\mathfrak{k}_1]|}; \tag{10.7.2}$$

$\mathfrak{k}_0$ bedeutet dabei den Wellenvektor der einfallenden und $\mathfrak{k}_1$ den Wellenvektor der gestreuten Nukleonen. Der Polarisationsvektor $\mathfrak{P}_1$ ist senkrecht zum Wellenvektor $\mathfrak{k}_0$ der einfallenden Nukleonen gerichtet. Seinen Betrag kann man durch Messung der Azimutalasymmetrie bei Streuung der Nukleonen an einem zweiten Targetkern (Spin J_2) bestimmen.

Bei der zweiten Streuung in Richtung des Wellenvektors $\mathfrak{k}_2$ ergibt sich der differentielle Streuquerschnitt je Einheitsfluß der primär gestreuten Nukleonen nach (10.6.13) aus dem Ausdruck

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_2 = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_2^u (1 + A_2) \tag{10.7.3}$$

mit $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_2^u = \frac{\mathrm{Sp}(FF^+)_2}{2(2J_2+1)}$ als differentiellem Streuquerschnitt für die Streuung nichtpolarisierter Nukleonen an nichtpolarisierten Kernen. Der Koeffizient der Azimutalasymmetrie ist

$$A_2 = \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_{\mathrm{ausg}}^u = P_1 P_{\mathrm{ausg}}^u (\mathfrak{n}_1 \mathfrak{n}_2), \tag{10.7.4}$$

$$P_{\mathrm{ausg}}^u = \left| \frac{\mathrm{Sp}(\vec{\sigma} F F^+)_2}{\mathrm{Sp}(FF^+)_2} \right|, \qquad \mathfrak{n}_2 = \frac{[\mathfrak{k}_2 \mathfrak{k}_1]}{|[\mathfrak{k}_1 \mathfrak{k}_2]|}; \tag{10.7.5}$$

$\mathfrak{k}_2$ bedeutet den Wellenvektor für die sekundär gestreuten Nukleonen. Den Azimutalwinkel φ_2 bei der zweiten Streuung erhält man aus der Beziehung $\cos\varphi_2 = \mathfrak{n}_1 \mathfrak{n}_2$.

Bestehen das erste und das zweite Target aus gleichen Kernen, dann sind die Absolutbeträge der Polarisationsvektoren $\mathfrak{P}_{\mathrm{ausg}}^u$ und $\mathfrak{P}_1$ einander gleich:

$$P_{\mathrm{ausg}}^u = P_1 = \left| \frac{\mathrm{Sp}(\vec{\sigma} F F^+)}{\mathrm{Sp}(FF^+)} \right|. \tag{10.7.6}$$

In diesem Fall ist $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_2^u = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_1$, und für den Koeffizienten der Azimutalasymmetrie bei der zweiten Streuung gilt

$$A_2 = P_1^2 (\mathfrak{n}_1 \mathfrak{n}_2) = P_1^2 \cos\varphi_2.$$

Deshalb kann man durch Messung der Azimutalasymmetrie für die zweifach gestreuten Nukleonen den Polarisationsvektor der einfach gestreuten nichtpolarisierten Nukleonen eindeutig festlegen.

Der Polarisationsvektor der zweifach gestreuten Nukleonen lautet nach (10.6.8)

$$\mathfrak{P}_2 = P_1 \frac{\mathfrak{n}_2 + B\mathfrak{n}_1}{1 + A_2} \tag{10.7.7}$$

mit dem Tensor

$$B = \frac{\mathrm{Sp}(\vec{\sigma} F \vec{\sigma} F^+)}{\mathrm{Sp}(FF^+)}. \tag{10.7.8}$$

Der Polarisationsvektor für die zweifach gestreuten Nukleonen besitzt im allgemeinen eine Komponente in Richtung des Ausbreitungsvektors. Bei Streuung von nichtpolarisierten Nukleonen an nichtpolarisierten Kernen tritt somit nur im zweifach gestreuten Strahl eine Polarisation auf, die

eine Komponente in Richtung des Ausbreitungsvektors besitzt. Mit anderen Worten, um eine Untersuchung der Veränderung in der longitudinalen Polarisation von Nukleonen bei der Streuung festzustellen, müssen Experimente mit Dreifachstreuung durchgeführt werden.

Der differentielle Wirkungsquerschnitt für dreifach gestreute Nukleonen an Kernen (mit dem Spin J) je Einheitsfluß der zweifach gestreuten Nukleonen ergibt sich aus der Gleichung

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_3 = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_3^u (1 + A_3) \tag{10.7.9}$$

mit

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_3^u = \left[\frac{\mathrm{Sp}\,(FF^+)}{2\,(2J+1)}\right]_3 = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_1. \tag{10.7.10}$$

Der Koeffizient der Azimutalasymmetrie bei Dreifachstreuung ist

$$A_3 = \mathfrak{P}_2(\mathfrak{P}^u_{\text{ausg}})_3 = P_1(\mathfrak{n}_3\,\mathfrak{P}_2) \tag{10.7.11}$$

mit $\mathfrak{n}_3 = [\mathfrak{k}_3\,\mathfrak{k}_2]/|[\mathfrak{k}_3\,\mathfrak{k}_2]|$. Aus diesem Koeffizienten läßt sich die Normalkomponente des Polarisationsvektors $\mathfrak{P}_2$ bezüglich $\mathfrak{k}_2$ bestimmen.

Der Polarisationsvektor für die dreifach gestreuten Nukleonen wird durch die Beziehung

$$\mathfrak{P}_3 = P_1 \frac{\mathfrak{n}_3 + B\,\mathfrak{P}_2}{1 + A_3} \tag{10.7.12}$$

geliefert.

Da der Koeffizient A_3 bei der dritten Streuung vom Skalarprodukt $(\mathfrak{n}_3\,\mathfrak{P}_2)$ abhängt, ist es günstig, die Messungen für zwei zueinander senkrechte Richtungen des Vektors $\mathfrak{n}_3$ durchzuführen. Im ersten Fall wählt man $\mathfrak{n}_3$ parallel zu $\mathfrak{n}_2$, so daß die Ebene für die dritte mit der Ebene für die zweite Streuung zusammenfällt. Dann kann man durch die Messung von A_3 die zur Streuebene senkrechte Komponente des Polarisationsvektors $\mathfrak{P}_2$ nach der zweiten Streuung bestimmen. Im zweiten Fall wird der Vektor $\mathfrak{n}_3$ in die Richtung des Vektors $[\mathfrak{n}_2\,\mathfrak{k}_2]$ gelegt, d. h., die Ebene für die dritte Streuung ist senkrecht zur Ebene für die zweite Streuung. Dann kann aus der Messung von A_3 die in der Ebene der zweiten Streuung liegende und zu $\mathfrak{k}_2$ senkrechte Komponente des Polarisationsvektors $\mathfrak{P}_2$ ermittelt werden. Beide Messungen bestimmen jedoch nicht die Komponente von $\mathfrak{P}_2$ in Richtung des Vektors $\mathfrak{k}_2$. Diese ergibt sich z. B. durch Untersuchung der Vierfachstreuung.

Der differentielle Wirkungsquerschnitt für die Vierfachstreuung von Nukleonen wird durch die Beziehung

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_4 = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_1 (1 + A_4)$$

mit dem Koeffizienten der Azimutalasymmetrie

$$A_4 = \mathfrak{P}_3(\mathfrak{P}^u_{\text{ausg}})_4 = P(\mathfrak{n}_4\,\mathfrak{P}_3),$$

$$\mathfrak{n}_4 = \frac{[\mathfrak{k}_4\,\mathfrak{k}_3]}{|[\mathfrak{k}_4\,\mathfrak{k}_3]|}$$

gegeben. Die Messung der Azimutalasymmetrie bei der vierten Streuung liefert die zu $\mathfrak{k}_3$ senkrechte Komponente von $\mathfrak{P}_3$. Damit läßt sich im Prinzip nach Gl. (10.7.12) auch die Komponente des Polarisationsvektors $\mathfrak{P}_2$ in Richtung des Vektors $\mathfrak{k}_2$ bestimmen, die wir auf der Grundlage von nur 3 Streuungen nicht bestimmen konnten.

In den Experimenten über Dreifachstreuung von ursprünglich nichtpolarisierten Nukleonen dient also das erste Target als Polarisator der Nukleonen, das dritte als Analysator für die Veränderung der Polarisation durch die Streuung am zweiten Target. Jedoch reichen sowohl Polarisator als auch Analysator, wenn sie aus nur einem Target bestehen, nicht vollkommen aus. Der aus einem Target bestehende Polarisator liefert Nukleonen, die senkrecht zum Ausbreitungsvektor polarisiert sind. Um Nukleonen mit Polarisationen in der Ausbreitungsrichtung zu erhalten, muß ein Polarisator aus 2 Targets verwendet werden, da nur zweifach gestreute Nukleonen eine solche Polarisation aufweisen. Besteht der Analysator aus nur einem Target, so läßt sich nur die zur Ausbreitungsrichtung der in den Analysator einfallenden Nukleonen senkrechte Komponente des Polarisationsvektors bestimmen. Für die Untersuchung der longitudinalen Komponente muß ein Analysator aus mindestens 2 Targets verwendet werden.

Eine theoretische Behandlung von Experimenten mit Dreifachstreuung wurde in den Arbeiten von OEHME [10,2] und WOLFENSTEIN [10,4] durchgeführt. Die Theorie für Experimente über Zweifachstreuung von Teilchen mit dem Spin 1 an Kernen wurde von LAKIN [10,1] entwickelt. Mit der Polarisation von Teilchen mit dem Spin 1 bei elastischer Streuung an Kernen mit dem Spin 0 befaßte sich TSCHEISCHWILI [10,5].

KAPITEL 11

THEORIE DER WECHSELWIRKUNG VON KERNEN MIT ELEKTROMAGNETISCHER STRAHLUNG

11.1. Elektrische und magnetische Multipolstrahlung

Durch Untersuchungen der Wechselwirkung zwischen Atom- und Molekülsystemen mit elektromagnetischer Strahlung sind die Eigenschaften der elektromagnetischen Strahlung recht gut bekannt. Das Studium der Wechselwirkungen von elektromagnetischer Strahlung mit Kernen kann daher zur Untersuchung der Kernstruktur und der Kerneigenschaften dienen.

Bei fast allen Kernreaktionen emittieren die Kerne elektromagnetische Strahlung (γ-Strahlung), da die Reaktionsprodukte oft im angeregten Zustand zurückbleiben. Ist die Anregungsenergie kleiner als die Schwellenenergie für Nukleonenemission, so wird sie entweder durch γ-Strahlung, durch Konversionselektronen oder durch innere Paarbildung abgegeben.

In der letzten Zeit gewinnen auf Grund der großen Fortschritte beim Bau von künstlichen, hochenergetischen γ-Strahlungsquellen (Betatrone, Synchrotrone und Linearbeschleuniger) die sogenannten Kernphotoreaktionen, die durch die Wirkung von γ-Quanten ausgelöst werden, immer größere Bedeutung.

In diesem Abschnitt untersuchen wir die allgemeinen Eigenschaften der Wechselwirkung von elektromagnetischer Strahlung mit Atomkernen.

Der HAMILTON-Operator für diese Wechselwirkung läßt sich in folgender Form schreiben:

$$H' = -\frac{1}{c}\int \mathfrak{j}\,\mathfrak{A}\,d\tau. \tag{11.1.1}$$

Dabei bedeuten $\mathfrak{j}$ den Operator für die Dichte von Konvektions- und Spinstrom im Kern und $\mathfrak{A}$ das Vektorpotential des elektromagnetischen Feldes mit der Normierung $\operatorname{div}\mathfrak{A} = 0$.

Stellt man das Vektorpotential des elektromagnetischen Feldes als Summe zweier Glieder dar:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\mathfrak{r})\,e^{i\omega t} + \mathfrak{A}^*(\mathfrak{r})\,e^{-i\omega t}, \tag{11.1.2}$$

so bestimmt das erste Glied dieser Summe beim Einsetzen in (11.1.1) die Prozesse der Emission von γ-Quanten, das zweite die Prozesse der Absorption. Im weiteren betrachten wir nur die Emission von γ-Quanten. Die Wahrscheinlichkeit für die Absorption kann als Umkehrprozeß zur Emission auf der Grundlage des Prinzips vom detaillierten Gleichgewicht (s. Abschn. 8.3.) berechnet werden.

Die Normierung von $\mathfrak{A}(\mathfrak{r})$ in (11.1.2) wird meist so gewählt, daß sie der Anwesenheit eines Quants in der Volumeneinheit entspricht. Dann gilt

$$\mathfrak{A}_p(\mathfrak{r}) = \sqrt{\frac{2\pi c\hbar}{k}}\,\mathfrak{u}_p\,e^{i\mathfrak{k}\mathfrak{r}} \tag{11.1.3}$$

mit $\mathfrak{u}_p$ als Einheitsvektor der Polarisation und $\mathfrak{k}$ als Wellenvektor mit dem Betrag ω/c.

Die Übergangswahrscheinlichkeit je Zeiteinheit für den Übergang des Systems aus dem Anfangszustand a in den Endzustand b im Resultat der Wechselwirkung (11.1.1) ist

$$P_{ba} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum \int |\langle b\,|H'|\,a\rangle|^2\, \varrho(E_b), \qquad E_b = E_a - \hbar\, k\, c, \tag{11.1.4}$$

wobei

$$\varrho\,(E_b) = \frac{k^2}{8\pi^3\, c\, \hbar}\, d\Omega \tag{11.1.5}$$

die Anzahl der Endzustände im Einheitsvolumen und Einheitsintervall der Energie und bei Photonenemission in den Raumwinkel $d\Omega$ bedeutet. In der Gl. (11.1.4) ist über alle Polarisationszustände und die Magnetquantenzahlen des Endzustands zu summieren und über alle Emissionsrichtungen zu integrieren.

Den Stromdichteoperator werden wir später bestimmen. Er hängt von dem für die Beschreibung des Kerns benutzten Kernmodell ab. Zunächst untersuchen wir die Eigenschaften der Wechselwirkung zwischen elektromagnetischem Feld und Kern, die nicht von dem benutzten Kernmodell abhängig sind.

Da die Kernzustände durch bestimmte Drehimpulse und Paritäten charakterisiert werden, zerlegt man das Vektorpotential (11.1.3) zweckmäßigerweise nach Funktionen mit bestimmtem Drehimpuls und bestimmter Parität.

Das Vektorpotential besitzt Transversalitätseigenschaften. Bei Zerlegung von (11.1.3) nach Zuständen mit bestimmtem Gesamtdrehimpuls, bestimmter Projektion des Gesamtdrehimpulses und bestimmter Parität (Zerlegung nach Multipolen) drückt man den Polarisationszustand durch die Vektoren der Zirkularpolarisation aus, die mit zwei aufeinander und auf dem Ausbreitungsvektor $\mathfrak{k}$ senkrecht stehenden Einheitsvektoren $\mathfrak{e}_\xi$ und $\mathfrak{e}_\eta$ durch die Beziehung

$$\mathfrak{u}_p \equiv (-p\, \mathfrak{e}_p) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\mathfrak{e}_\xi + i\, p\, \mathfrak{e}_\eta)$$

verknüpft sind. Die Werte $p = 1$ bzw. -1 charakterisieren die Links- und Rechtspolarisation.

Nach den Darlegungen im Anhang 1.4. gilt

$$\mathfrak{u}_p\, e^{i\mathfrak{k}\mathfrak{r}} = \pi \sum_{J=1}^{\infty} \sum_{m=-J}^{J} i^J \sqrt{2J+1}\, D^J_{mp}\, \{\mathfrak{A}_M(J\,m) + i\,p\,\mathfrak{A}_E(J\,m)\} \tag{11.1.6}$$

mit

$$\mathfrak{A}_M(J\,m) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, j_J(k\,r)\, \frac{\hat{\mathfrak{L}}}{\sqrt{J(J+1)}}\, Y_{Jm}, \qquad \hat{\mathfrak{L}} \equiv -i[\mathfrak{r}\nabla], \tag{11.1.7}$$

$$\mathfrak{A}_E(J\,m) = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\operatorname{rot}\hat{\mathfrak{L}}}{\sqrt{J(J+1)}}\, j_J(k\,r)\, Y_{Jm}. \tag{11.1.8}$$

Die Größe $\mathfrak{A}_M(J\,m)$ wird als Vektorpotential für die magnetische Multipolstrahlung der Ordnung 2^J bezeichnet; die Größe $\mathfrak{A}_E(J\,m)$ heißt Vektorpotential für die elektrische Multipolstrahlung der Ordnung 2^J. Die Photonen beider Strahlungstypen besitzen den Drehimpuls $+J$ und unterscheiden sich durch ihre Parität. Bei der räumlichen Inversion $(x, y, z \to -x, -y, -z)$ transformieren sich die Multipolpotentiale nach

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A}_E(J\,m) &\to (-1)^{J+1}\,\mathfrak{A}_E(J\,m), \\ \mathfrak{A}_M(J\,m) &\to (-1)^J\,\mathfrak{A}_M(J\,m). \end{aligned}\right\} \tag{11.1.9}$$

Berücksichtigt man (11.1.1) bis (11.1.6), so erhält man aus (11.1.4) die Wahrscheinlichkeit für die Emission von Multipolstrahlung der Ordnung 2^J je Zeiteinheit, integriert über alle Emissionsrichtungen:

$$P_{ba,\lambda} = 4\pi^2 \frac{e^2}{\hbar} k \sum_{m_b, m} \left| \left(b \left| \frac{1}{e c} \int \mathfrak{A}_\lambda(J\,m)\,\mathfrak{j}\,d\tau \right| a \right) \right|^2. \tag{11.1.10}$$

Für die magnetische Multipolstrahlung ist in (11.1.10) $\lambda = M$ zu setzen, für die elektrische entsprechend $\lambda = E$.

Geht der Übergang zwischen Zuständen mit bestimmten Werten von Drehimpuls und Parität vor sich, so lassen sich aus (11.1.10) unter Berücksichtigung der Erhaltungssätze von Drehimpuls und Parität unmittelbar die Auswahlregeln für die elektrische und magnetische Multipolstrahlung erhalten. Dabei ist (11.1.9) zu berücksichtigen und außerdem die Tatsache, daß die Stromdichte bei räumlicher Inversion ihr Vorzeichen wechselt. Wir bezeichnen die Parität mit Π; sie kann zwei Werte, $+1$ oder -1, annehmen. Die Auswahlregeln kann man dann in folgender Form schreiben:

$$|J_a - J_b| \leqq J \leqq J_a + J_b; \tag{11.1.11}$$

$$\Pi_a \Pi_b = \begin{cases} (-1)^J & \text{für elektrische Multipolstrahlung,} \\ (-1)^{J+1} & \text{für magnetische Multipolstrahlung.} \end{cases} \tag{11.1.12}$$

Die Auswahlregeln (11.1.11), die aus dem Drehimpulserhaltungssatz folgen, werden manchmal in der Kurzform

$$\Delta(J_a, J_b, J) \tag{11.1.11a}$$

geschrieben und als *Dreiecksregel* bezeichnet.

Die Auswahlregeln (11.1.12) entsprechen dem Erhaltungssatz für die Parität. Bei der elementaren Ableitung dieser Regel ist zu berücksichtigen, daß Photonen durch ein Vektorfeld beschrieben werden, das bei räumlicher Inversion sein Vorzeichen ändert. Der Spin der Photonen ist gleich 1. Daher kann man die Photonen mit dem Drehimpuls J bezüglich der Paritätsoperation in zwei Typen einteilen:

a) Photonen der magnetischen Multipolstrahlung, für die $L = J$ ist und deren Parität infolge des Vektorcharakters $\Pi_{\mathrm{Ph}\,M} = -(-1)^L = (-1)^{J+1}$ beträgt;

b) Photonen der elektrischen Multipolstrahlung, für die $L = J \pm 1$ ist und deren Parität $\Pi_{\mathrm{Ph}\,E} = -(-1)^L = (-1)^J$ beträgt.

Damit können die Auswahlregeln (11.1.12) in folgender Form geschrieben werden:

$$\Pi_a \Pi_b = \Pi_{\mathrm{Ph}\,E} \quad \text{für die elektrische Multipolstrahlung,}$$

$$\Pi_a \Pi_b = \Pi_{\mathrm{Ph}\,M} \quad \text{für die magnetische Multipolstrahlung.}$$

Elektrische Multipolübergänge, die einer Dipolstrahlung, Quadrupolstrahlung usw. entsprechen, werden mit $E\,1$, $E\,2$, $E\,3$, ..., die entsprechenden magnetischen Multipolübergänge mit $M\,1$, $M\,2$, $M\,3$, ... bezeichnet.

Gilt $J_a = J_b = {}^1/_2$ oder besitzt einer der Zustände (Anfangs- oder Endzustand) den Spin 0, so gilt nach (11.1.11) nur ein J-Wert. Im ersten Fall liegt entweder $E\,1$- oder $M\,1$-Strahlung vor, und zwar in Abhängigkeit davon, ob sich die Parität der Kernzustände beim Übergang ändert oder nicht. Im zweiten Fall erhält man entweder $E\,J$- oder $M\,J$-Strahlung, je nachdem, wie sich die Parität beim Übergang ändert.

Zur Bestimmung der Operatoren von Strom- und Ladungsdichte im Kern geht man meist von der Annahme aus, daß jedes Nukleon als punktförmiges Teilchen zu betrachten ist und einen unabhängigen Beitrag zu diesen Operatoren leistet. Dann wird der Operator für die elektrische Ladungsdichte durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$\varrho = \sum_\alpha e_\alpha \, \delta(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_\alpha). \tag{11.1.13}$$

Hierbei bedeuten e_α die Ladung und $\mathfrak{r}_\alpha$ die Koordinaten des Nukleons. Der Stromdichteoperator schreibt sich als Summe zweier Glieder:

$$\hat{\mathfrak{j}} = \hat{\mathfrak{j}}_e + \hat{\mathfrak{j}}_\sigma \tag{11.1.14}$$

mit

$$\hat{\mathfrak{j}}_e = \sum_\alpha e_\alpha \, \delta(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_\alpha) \frac{\hat{\mathfrak{P}}_\alpha}{M_\alpha} \tag{11.1.15}$$

als Operator für die Stromdichte, wenn der Strom durch Ladungsverschiebungen hervorgerufen wird, und

$$\hat{\mathfrak{j}}_\sigma = \frac{e\hbar}{2} \sum_\alpha \delta(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_\alpha) \frac{\mu_\alpha}{M_\alpha} [\vec{\sigma}_\alpha \nabla] \tag{11.1.16}$$

als Operator für die Stromdichte, die durch die magnetischen Momente der Nukleonen bedingt ist. Dabei bedeutet M_α die Nukleonenmasse, μ_α das magnetische Moment in Kernmagnetonen und $\vec{\sigma}_\alpha$ den Vektoroperator, dessen Komponenten die Pauli-Matrizen sind.

Bei der Ableitung der Gln. (11.1.15) und (11.1.16) wurde angenommen, daß die Ströme im Kern durch die magnetischen Momente und räumliche Verlagerung der Nukleonen hervorgerufen werden. Bei Anwesenheit von Austauschkräften entstehen zusätzliche „Austauschströme", die durch geladene Mesonen hervorgerufen werden, da die Mesonen für die Anwesenheit von Austauschkräften verantwortlich sind. Die Mesonentheorie ist jedoch noch nicht in der Lage, quantitative Aussagen über die Größe dieser

Ströme zu liefern. Daher werden sie meist auf der Grundlage von phänomenologischen Werten [11,1] in die Theorie eingeführt. Da unsere Kenntnisse über die Wellenfunktionen von Kernzuständen noch sehr unvollständig sind, wird die Theorie der Wechselwirkung von Kernen mit elektromagnetischer Strahlung nur eine grobe Übereinstimmung mit dem Experiment liefern. Aus diesem Grunde werden wir die Berechnungen nicht durch Einführung zusätzlicher Ströme, die die Austauscheffekte berücksichtigen, weiter komplizieren.

Führt man den Isospinoperator τ_3 (s. Abschn. 2.1. und 2.2.) ein, so lassen sich (11.1.13) und (11.1.14) in folgender Form schreiben:

$$\varrho = \frac{e}{2} \sum_{\alpha} [\tau_3(\alpha) + 1]\, \delta(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_\alpha), \tag{11.1.13a}$$

$$\hat{\mathfrak{j}} = \frac{e}{2} \sum_{\alpha} \delta(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_\alpha)\, [\tau_3(\alpha) + 1]\, \frac{\hat{\mathfrak{P}}_\alpha}{M_\alpha} + \frac{e\hbar}{4} (\mu_n + \mu_p) \sum_{\alpha} \frac{1}{M_\alpha}\, \delta(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_\alpha)\, [\vec{\sigma}_\alpha \nabla] +$$

$$+ \frac{e\hbar}{4} (\mu_p - \mu_n) \sum_{\alpha} \frac{1}{M_\alpha}\, \delta(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_\alpha)\, \tau_3(\alpha)\, [\vec{\sigma}_\alpha \nabla]. \tag{11.1.14a}$$

Nach den Ausführungen in Abschn. 2.2. kann man den Isospin des Kerns für leichte Kerne als gute Quantenzahl betrachten. Die Energieniveaus des Kerns werden dann durch bestimmte Werte des Isospins charakterisiert.

Da der Stromdichteoperator (11.1.14a) und Ladungsdichteoperator (11.1.13a) die dritte Komponente des Isospinoperators τ_3 enthalten, existieren Auswahlregeln bezüglich der möglichen Änderungen des Isospins bei γ-Quantenemission. Ladungsdichteoperator (11.1.13a) und Stromdichteoperator (11.1.14a) lassen sich als Summe von 2 Gliedern darstellen. Eines dieser Glieder enthält die Operatoren des Isospins nicht, in das andere gehen die Operatoren τ_3 ein. Daher muß die Auswahlregel für den Isospin bei elektromagnetischen Übergängen folgende Form besitzen:

$$\Delta T = 0, \quad \pm 1.$$

Bei der Untersuchung der von Kernen emittierten elektromagnetischen Strahlung besitzt das Verhältnis von Kernradius R zur Wellenlänge der entsprechenden Strahlung entscheidende Bedeutung. Näherungsweise gilt

$$(k\,R)^2 \approx \frac{A^{2/3} E^2\,[\mathrm{MeV}]}{2 \cdot 10^4}.$$

Für Übergänge mit Energien kleiner als einige MeV folgt hieraus

$$(k\,R)^2 \ll 1.$$

Ist diese Ungleichung erfüllt, so spricht man von der *langwelligen Näherung*.

Aus (11.1.10) folgt, daß die Emissionswahrscheinlichkeit stark von der Größe des Integrals

$$I_\lambda(J\,m) = \frac{1}{e\,c} \int \hat{\mathfrak{j}}\, \mathfrak{A}_\lambda(J\,m)\, d\tau \tag{11.1.17}$$

abhängt. Bei der Berechnung dieses Integrals berücksichtigt man, daß die in die langwellige Näherung eingehende sphärische BESSEL-Funktion durch den entsprechenden asymptotischen Ausdruck ersetzt werden kann:

$$j_J(k\,r) \approx \frac{(k\,r)^J}{(2J+1)!!}. \qquad (11.1.18)$$

Wir betrachten zunächst das Integral (11.1.17) für die elektrische Multipolstrahlung. Setzt man (11.1.8) und (11.1.18) in (11.1.17) ein, so folgt

$$I_E(J\,m) = \frac{1}{e\,c\,k}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{\sqrt{J(J+1)}}\int \hat{\mathfrak{j}}\,\mathrm{rot}\,\hat{\mathfrak{L}}\left(j_J(k\,r)\,Y_{Jm}\right)d\tau. \qquad (11.1.19)$$

Mit Hilfe der Operatoridentität

$$\mathrm{rot}[\mathfrak{r}\,\nabla] = \mathfrak{r}\,\nabla^2 - \nabla\left(1 + r\frac{d}{dr}\right)$$

erhält man in der langwelligen Näherung ($k\,r \ll 1$)

$$\mathrm{rot}\,\hat{\mathfrak{L}}(j_J\,Y_{Jm}) = i(J+1)\,\nabla\left(j_J(k\,r)\;Y_{Jm}\right). \qquad (11.1.20)$$

Setzt man (11.1.20) in (11.1.19) ein und integriert partiell, so wird

$$I_E(J\,m) = -\frac{i}{e\,c}\sqrt{\frac{2(J+1)}{\pi J}}\,\frac{1}{k}\int j_J(k\,r)\,Y_{Jm}\,\nabla\,\mathfrak{j}\,d\tau.$$

In der langwelligen Näherung trägt zum Integral $I_E(J\,m)$ nur der den Ladungsverschiebungen entsprechende Teil des Stromdichteoperators wesentlich bei. Benutzt man noch die Kontinuitätsgleichung

$$\mathrm{div}\,\mathfrak{j}_e = -i\,k\,c\,\varrho$$

und den asymptotischen Wert (11.1.18), so folgt schließlich

$$I_E(J\,m) = -\frac{k^J}{(2J+1)!!}\sqrt{\frac{2(J+1)}{\pi J}}\,\frac{1}{e}\int \varrho\,r^J\,Y_{Jm}\,d\tau. \qquad (11.1.21)$$

Dabei ist r in (11.1.21) bezüglich des Kernschwerpunktes definiert.

Der elektrische Multipolübergang hängt also in der langwelligen Näherung nur von der elektrischen Ladungsdichte ab. Berücksichtigt man, daß der Operator für das statische elektrische Multipolmoment die Form

$$\hat{Q}_{Jm} = \frac{4}{e}\sqrt{\frac{\pi}{2J+1}}\int \varrho\,r^J\,Y_{Jm}\,d\tau$$

besitzt, dann läßt sich (11.1.21) durch den Operator $\hat{Q}_{Jm}$ ausdrücken:

$$I_E(J\,m) = -\frac{k^J}{4\pi(2J+1)!!}\left[\frac{2(J+1)(2J+1)}{J}\right]^{1/2}\hat{Q}_{Jm}. \qquad (11.1.21\,\mathrm{a})$$

Durch Einsetzen von (11.1.21) in (11.1.10) erhält man nach der Integration über alle Emissionsrichtungen die Übergangswahrscheinlichkeit je Zeiteinheit für die elektrische Multipolstrahlung:

$$P(E\,J) = 8\pi\frac{e^2}{\hbar}\,\frac{J+1}{J[(2J+1)!!]^2}\,k^{2J+1}\,B(E\,J). \qquad (11.1.22)$$

Dabei bedeutet $B(EJ)$ die sogenannte reduzierte Übergangswahrscheinlichkeit für elektrische Multipolstrahlung:

$$B(EJ) = \sum_{m,m_b} \left|\left(b\left|\frac{1}{e}\int \varrho r^J Y_{Jm} d\tau\right| a\right)\right|^2 = \sum_{m,m_b} \left|\left(b\left|\sqrt{\frac{2J+1}{16\pi}}\,\hat{Q}_{Jm}\right| a\right)\right|^2. \quad (11.1.22\text{a})$$

$B(EJ)$ hängt von den Wellenfunktionen im Anfangs- und Endzustand, aber nicht von der Übergangsenergie ab. Die Abhängigkeit der Übergangswahrscheinlichkeit von der Energie wird durch den Faktor $k^{2J+1} = (\omega/c)^{2J+1}$ gegeben. Die Wahrscheinlichkeit für eine elektrische Multipolstrahlung der Ordnung 2^J ist somit der Übergangsenergie in der $(2J+1)$-ten Potenz proportional.

Die Wahrscheinlichkeit für elektrische Multipolübergänge im Kern ist demnach dem Quadrat eines nichtdiagonalen Matrixelements des Operators des elektrischen Multipolmoments proportional. Die Diagonalelemente dieses Operators bestimmen die statischen elektrischen Multipolmomente des Kerns.

Zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit für magnetische Multipolstrahlung betrachten wir das Integral

$$I_M(Jm) \equiv \frac{1}{ec}\int \hat{\mathfrak{j}}\,\mathfrak{A}_M(Jm)\,d\tau = \frac{1}{ec}\sqrt{\frac{2}{\pi J(J+1)}}\int \mathfrak{j}\, j_J(kr)\,\hat{\mathfrak{L}} Y_{Jm}\,d\tau. \quad (11.1.23)$$

Setzt man (11.1.23) in (11.1.10) ein, so erhält man unter Berücksichtigung von (11.1.18) in der langwelligen Näherung

$$P(MJ) = 8\pi\frac{e^2}{\hbar}\,\frac{J+1}{J[(2J+1)!!]^2}\,k^{2J+1}\,B(MJ) \quad (11.1.24)$$

mit der reduzierten Wahrscheinlichkeit für magnetische Multipolübergänge

$$B(MJ) = \sum_{m,m_b}\left|\left(b\left|\frac{1}{ec(J+1)}\int r^J\,\hat{\mathfrak{L}}\,Y_{Jm}\,\mathfrak{j}\,d\tau\right| a\right)\right|^2. \quad (11.1.24\text{a})$$

Aus (11.1.22) und (11.1.24) ist unmittelbar ersichtlich, daß die Wahrscheinlichkeit für Multipolstrahlung in der langwelligen Näherung mit wachsendem J schnell abnimmt. Aus diesem Grund haben nur ein oder zwei der kleinsten J-Werte, die mit den Erhaltungssätzen von Drehimpuls und Parität vereinbar sind, praktische Bedeutung. Für leichte Kerne ist noch das Gesetz der Isospinerhaltung zu berücksichtigen. Für gleiche J-Werte ist die Wahrscheinlichkeit für die Emission von elektrischer Multipolstrahlung größer als die Wahrscheinlichkeit für die Emission von magnetischer Multipolstrahlung (um etwa den Faktor $(c/v)^2$). Man muß jedoch berücksichtigen, daß infolge der Auswahlregeln (11.1.11) und (11.1.12) demselben Kernübergang nicht sowohl elektrische wie auch magnetische Multipolstrahlung der gleichen Ordnung zugeordnet sein können. Magnetische Multipolstrahlung der Ordnung J kann durch elektrische Multipolstrahlung der Ordnung $J+1$ begleitet werden. Eine grobe Abschätzung für die Intensitätsverhältnisse dieser Strahlungen wird im nächsten Abschnitt gegeben.

Wir betrachten nun noch die Auswahlregeln des Isospins für den Fall elektrischer Dipolübergänge ($E1$) etwas genauer. Setzt man (11.1.13a) in (11.1.22a) ein, so erhält man für den elektrischen Dipolübergang

$$B(E1) = \sum_{m, m_b} \left| \left(J_b\, m_b \left| \frac{1}{2} \sum_\alpha \left(r_\alpha + \tau_3(\alpha)\, r_\alpha \right) Y_{1m}(\vartheta_\alpha, \varphi_\alpha) \right| J_a\, m_a \right) \right|^2 .$$

Berücksichtigt man die Relation $\sum_\alpha r_\alpha Y_{1m}(\vartheta_\alpha, \varphi_\alpha) = 0$, so wird

$$B(E1) = \sum_{m, m_b} \left| \left(J_b\, m_b \left| \frac{1}{2} \sum_\alpha \tau_3(\alpha)\, r_\alpha\, Y_{1m}(\vartheta_\alpha, \varphi_\alpha) \right| J_a\, m_a \right) \right|^2 . \qquad (11.1.25)$$

Aus (11.1.25) folgt unmittelbar, daß elektrische Dipolübergänge in leichten Kernen bei Erfüllung der folgenden Auswahlregeln für den Isospin möglich sind:

$$\left.\begin{aligned} \Delta T &= 0, \pm 1 \quad \text{für} \quad T_3 \neq 0, \\ \Delta T &= \pm 1 \quad \text{für} \quad T_3 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (11.1.26)$$

Für Kerne mit der gleichen Neutronen- und Protonenzahl ($T_3 = 0$) sind also elektrische Dipolübergänge ohne Änderung des Isospins um 1 verboten. Insbesondere sind die Übergänge $T = 0 \to T = 0$ verboten.

Experimentell wurden die Isospinauswahlregeln von WILKINSON und Mitarb. [11,2] untersucht. Sie zeigten, daß für leichte Kerne mit $T_3 = 0$ die Übergänge $\Delta T = 0$ sehr wenig wahrscheinlich sind. Solche Übergänge können auf Grund der ungleichen Massen von Proton und Neutron und des Einflusses der COULOMB-Kräfte, die Zustände mit verschiedenem Isospin vermischen, sowie auf Grund von Gliedern, die in der langwelligen Näherung fortgelassen wurden, auftreten. Die Genauigkeit der Isospinauswahlregeln wurde von MACDONALD [11,3] abgeschätzt.

Neben den Verboten auf Grund der Isospinauswahlregeln kann die Wahrscheinlichkeit für $E1$-Übergänge auch auf Grund von Korrelationen in der Protonen- und Neutronenverteilung im Kern verkleinert werden. In der Summe $\sum_\alpha \tau_3(\alpha)\, r_\alpha\, Y_{1m}(\vartheta_\alpha, \varphi_\alpha)$, die in (11.1.25) eingeht, liefern Neutronen und Protonen Beiträge mit verschiedenem Vorzeichen. Demzufolge kann bei bestimmter Neutronen- und Protonenanordnung im Kern die Größe $B(E1)$ sehr klein werden. Auf diese Ursache für die Verkleinerung der Wahrscheinlichkeit von $E1$-Übergängen in schweren Kernen wiesen schon DELBRUCK und GAMOW [11,4] sowie BETHE [11,5] hin.

11.2. Theorie der elektromagnetischen Übergänge bei Veränderung von Zuständen einzelner Nukleonen im Kern

Nach (11.1.22a) und (11.1.13) wird die Wahrscheinlichkeit für einen elektrischen Multipolübergang EJ durch die Größe

$$B(EJ) = \sum_{m, m_b} \left| \left(b \left| \sum_\alpha \varepsilon_\alpha\, r_\alpha^J\, Y_{Jm}(\vartheta_\alpha, \varphi_\alpha) \right| a \right) \right|^2 \qquad (11.2.1)$$

bestimmt. Dabei bedeuten ε_α die elektrische Ladung des Nukleons ($\varepsilon_\alpha = 1$ für Protonen und $= 0$ für Neutronen) und r_α die Koordinate des Nukleons im Schwerpunktsystem des Kerns.

Wir betrachten der Einfachheit halber ein Nukleon außerhalb von abgeschlossenen Schalen. Nimmt man an, daß sich beim elektromagnetischen Übergang die Zustände der Nukleonen auf den abgeschlossenen Schalen nicht ändern, so kann man den Kern als System, bestehend aus einem äußeren Nukleon und einem Rumpf, betrachten. Die Wellenfunktion für die Relativbewegung besitzt die Form

$$\psi_{LJm} = \varphi_{nL}(r)\, \Phi_{Jm} \tag{11.2.2}$$

mit $\varphi_{nL}(r)$ als Radialteil der Wellenfunktion, der von der Form des Potentials abhängt und dem Bahndrehimpuls L zugeordnet ist; n charakterisiert alle übrigen Quantenzahlen, Φ_{Jm} bedeutet den spin- und winkelabhängigen Teil der Wellenfunktion.

Für das System Rumpf – äußeres Nukleon läßt sich eine effektive elektrische Ladung einführen. Sie berücksichtigt die Relativbewegung beider Teile und wird auf folgende Art erhalten: Der Ort des Nukleons mit der Masse M und der Ladung ε (gleich 1 für Protonen und gleich 0 für Neutronen) werden in einem bestimmten Koordinatensystem durch den Radiusvektor $\mathfrak{q}_1$ beschrieben. Gleichzeitig werde die Lage des übrigen Teils des Kerns mit der Masse $M(A-1)$ und der Ladung $(Z-\varepsilon)$ durch den Radiusvektor $\mathfrak{q}_2$ beschrieben. Dann gilt

$$\sum_\alpha \varepsilon_\alpha \mathfrak{r}_\alpha^J = \varepsilon(\mathfrak{q}_1 - \mathfrak{R})^J + (Z-\varepsilon)\,(\mathfrak{q}_2 - \mathfrak{R})^J.$$

Setzt man auf der rechten Seite dieser Gleichung den expliziten Ausdruck für den Radiusvektor des Schwerpunkts des gesamten Kerns $\mathfrak{R} = \frac{\mathfrak{q}_1 + \mathfrak{q}_2(A-1)}{A}$ ein, so erhält man

$$\sum_\alpha \varepsilon_\alpha \mathfrak{r}_\alpha^J = \varepsilon_J\, \mathfrak{r}^J$$

mit $\mathfrak{r} \equiv \mathfrak{q}_1 - \mathfrak{q}_2$ als Vektor, der die relative Lage von Nukleon und Rumpf fixiert, und

$$\varepsilon_J = \varepsilon\left(\frac{A-1}{A}\right)^J + (Z-\varepsilon)\left(-\frac{1}{A}\right)^J \tag{11.2.3}$$

als „effektiver" elektrischer Ladung, die die Relativbewegung von Nukleon und Rumpf berücksichtigt.

Meist benutzt man nach [11,6] einen Näherungswert für ε_J. Man setzt für das Proton

$$\varepsilon_{J\geqq 2} = 1, \qquad \varepsilon_1 = \frac{N}{A} \approx \frac{1}{2}$$

und für das Neutron

$$\varepsilon_1 = -\frac{Z}{A} \approx -\frac{1}{2}, \qquad \varepsilon_{J\geqq 2} = 0.$$

Führt man also den Kern auf ein Zweikörpersystem zurück, so nimmt $B(EJ)$ in (11.2.1) die Form

$$B(EJ) = \frac{\varepsilon_J^2}{4\pi}\left|\int \varphi_{n_b L_b}^* r^J \varphi_{n_a L_a} r^2\, dr\right|^2 S_E(J_b, J, J_a) \tag{11.2.4}$$

mit

$$S_E(J_b, J, J_a) = 4\pi \sum_{m, m_b} |(\Phi_{J_b m_b}, Y_{Jm}\, \Phi_{J_a m_a})|^2 \tag{11.2.5}$$

als sogenanntem statistischem Faktor an, der sich nach dem Anhang, Gl. (1.9.10), durch die RACAH- und Vektoradditionskoeffizienten (explizite Ausdrücke dafür findet man im Anhang 1.2.) ausdrücken läßt:

$$S_E = (2J+1)(2L_a+1)(2J_b+1)\,|(L_a J\, 0\, 0 \,|\, L\, 0)|^2\, W^2\left(L_a J_a L_b J_b; \frac{1}{2} J\right).$$

Aus den Eigenschaften der Vektoradditionskoeffizienten und der RACAH-Koeffizienten folgen außer der allgemeinen Auswahlregel $\Delta(J_a, J_b, J)$ [s. Gl. (11.1.11)] noch weitere Auswahlregeln, die durch die Einzelteilchennäherung bedingt sind:

$$\Delta(L_a, L_b, J); \quad \Delta\left(L_a, L_a, \frac{1}{2}\right); \quad \Delta\left(L_b, J_b, \frac{1}{2}\right) \tag{11.2.6}$$

und

$$L_a + J + L_b = \text{gerade Zahl.} \tag{11.2.7}$$

Aus diesen Auswahlregeln folgt z. B. die Unmöglichkeit von elektrischer Dipolstrahlung bei den Übergängen $s_{1/2} \longleftrightarrow s_{1/2}$, $p_{1/2} \longleftrightarrow p_{1/2}$. Der Übergang $s_{1/2} \longleftrightarrow p_{1/2}$ entspricht elektrischer Dipolstrahlung. Für J_a, $J_b > 1/2$ und $|L_a - L_b| = |J_a - J_b| = 0$ beträgt der kleinste mögliche Wert von J für elektrische Multipolstrahlung 2. Daher werden die entsprechenden Übergänge elektrische Quadrupolübergänge sein.

Der Zahlenwert für die Wahrscheinlichkeit der durch die Auswahlregeln erlaubten Übergänge ergibt sich aus dem Radialmatrixelement in (11.2.4), das vom detaillierten Potentialverlauf abhängt:

$$N(EJ) = R^J \int \varphi^*_{n_b L_b}(r) \left(\frac{r}{R}\right)^J \varphi_{n_a L_a}(r)\, r^2\, dr.$$

Berücksichtigt man (11.1.22) und (11.2.4), so erhält man für die Emissionswahrscheinlichkeit von elektrischer Multipolstrahlung der Ordnung 2^J je Sekunde den Ausdruck

$$P(EJ) = \frac{2e^2}{\hbar} \frac{(J+1)\, k^{2J+1}}{J[(2J+1)!!]^2}\, \varepsilon_J^2\, S_E(J_a, J, J_b) \frac{[N(EJ)]^2}{4\pi}. \tag{11.2.8}$$

Für grobe Abschätzungen kann man $S_E \approx 1$ setzen und die Größe des Radialmatrixelements $N(EJ)$ abschätzen, indem man nach WEISSKOPF [11,7] die Radialwellenfunktion im Kern als konstant und außerhalb des Kerns gleich Null ansetzt. Dann gilt

$$N(EJ) \approx \frac{3R^J}{J+3} \tag{11.2.8a}$$

mit

$$R = 1{,}2 \cdot 10^{-13} A^{1/3} \quad [\text{cm}].$$

Die Näherung des Integrals durch (11.2.8a) ist sehr grob, da die Funktionen $\varphi_{n_a L_a}$ und $\varphi_{n_b L_b}$ innerhalb des Kerns keineswegs konstant sind, sondern oszillieren. Aus diesem Grund kann die wirkliche Größe von $N(EJ)$

um den Faktor 10 ··· 100 kleiner sein, als sich nach (11.2.8a) ergibt. Die mit Hilfe von (11.2.8) und (11.2.8a) erhaltenen Abschätzungen für die Übergangswahrscheinlichkeiten liefern lediglich die obere Grenze.

Die Größe $B_1(EJ) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{3}{3+J}\right)^2 R^{2J}$ wird oft als Maßeinheit für die reduzierte Wahrscheinlichkeit des EJ-Übergangs benutzt. Wir wollen sie als *Einheit der reduzierten Wahrscheinlichkeit für den EJ-Übergang* („single particle unit") eines Protons in der Einzelteilchennäherung bezeichnen.

Für Dipolübergänge schätzte Wilkinson [11,8] die Größe $\left[\frac{N(E1)}{R}\right]^2$ mit Hilfe eines Kernmodells in der Form eines rechteckigen Potentialtopfes ab. Er erhielt in Abhängigkeit von der Hauptquantenzahl und der Bahndrehimpulsquantenzahl folgende Werte für $\left[\frac{N(E1)}{R}\right]^2$:

Übergang \ L_a	0	1	2	3
$1L_a \to 1L_a + 1$	0,28	0,38	0,44	0,49
$2L_a \to 2L_a + 1$	0,23	0,28	0,33	0,37
$1L_a \to 2L_a - 1$	—	0,09	0,065	0,050
$1L_a \to 2L_a + 1$	0,001	0,002	0,002	0,003

In der Näherung (11.2.8a) wird die Emissionswahrscheinlichkeit von elektrischer Multipolstrahlung der Ordnung 2^J durch die Gleichung

$$P(EJ) = \frac{18e^2(J+1)\,k^{2J+1}}{\hbar\,J[(2J+1)!!]^2}\,\varepsilon_J^2\,\frac{R^{2J}}{(J+3)^2} \qquad (11.2.9)$$

gegeben. Wie schon im Abschn. 11.1. bemerkt wurde, verringert die große Korrelation in der Bewegung von Neutronen und Protonen die Wahrscheinlichkeit für elektrische Dipolübergänge zwischen niedrigen Kernniveaus sehr stark. Daher ist die auf Grund der Einzelteilchennäherung erhaltene Abschätzung (11.2.9) für solche Übergänge nicht anwendbar.

Zur Bestimmung der Emissionswahrscheinlichkeit von magnetischer Multipolstrahlung muß man folgendes Matrixelement berechnen:

$$B(MJ) = \sum_{m,\,m_b}\left|\left(b\,\middle|\,\frac{1}{ec(J+1)}\int r^J\,\hat{\mathfrak{L}}\,Y_{Jm}\,\hat{\mathfrak{j}}\,d\tau\,\middle|\,a\right)\right|^2. \qquad (11.2.10)$$

Der Stromdichteoperator lautet dabei

$$\hat{\mathfrak{j}} = \sum_\alpha e_\alpha\,\delta(\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_\alpha)\,\frac{\mathfrak{P}_\alpha}{M_\alpha} + \frac{e\hbar}{2}\sum_\alpha \delta(\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_\alpha)\,\frac{\mu_\alpha}{M_\alpha}\,[\vec{\sigma}_\alpha\,\nabla]. \qquad (11.2.11)$$

In der Einzelteilchennäherung, in der die Wellenfunktion des Kerns in der Form (11.2.2) gewählt wird, lautet das Matrixelement (11.2.10)

$$B(MJ) = B_K(MJ) + B_S(MJ) \qquad (11.2.12)$$

mit
$$B_K(MJ) = \left[\frac{\varepsilon_J \hbar}{M c(J+1)}\right]^2 \sum_{m,\, m_b} \left|(b\,|r^J \hat{\mathfrak{L}} Y_{Jm} \nabla|\, a)\right|^2 \qquad (11.2.12\text{a})$$

als reduzierter Wahrscheinlichkeit für die magnetische Multipolstrahlung, die durch Konvektionsströme hervorgerufen wird, und

$$B_S(MJ) = \left[\frac{\mu \hbar}{M c(J+1)}\right]^2 \sum_{m,\, m_b} \left|(b\,|r^J \hat{\mathfrak{L}} Y_{Jm} \operatorname{rot}\vec{\sigma}\,|\, a)\right|^2 \qquad (11.2.12\text{b})$$

als reduzierter Wahrscheinlichkeit für die magnetische Multipolstrahlung, die durch die magnetischen Momente der Nukleonen hervorgerufen wird.

Benutzt man die Gl. (1.4.10) des Anhangs, so kann man schreiben

$$\hat{\mathfrak{L}} Y_{Jm} \nabla = \sqrt{J(J+1)} \sum_{\mu=0,\, \pm 1} (1J,\, m+\mu,\, -\mu\,|\, J,\, m)\, Y_{J,\, m+\mu} \nabla_{-\mu}.$$

Benutzt man weiterhin die sogenannte Gradientenformel

$$\nabla_\mu(\varphi Y_{Jm}) = \sqrt{\frac{J+1}{2J+3}}\,(J\,1\,m\,\mu\,|\, J+1,\, m+\mu)\, Y_{J+1,\, m+\mu} \left(\frac{d}{dr} - \frac{J}{r}\right) \varphi(r) -$$
$$- \sqrt{\frac{J}{2J-1}}\,(J\,1\,m\,\mu\,|\, J-1,\, m+\mu)\, Y_{J-1,\, m+\mu} \left(\frac{d}{dr} + \frac{(J+1)}{r}\right) \varphi(r), \qquad (11.2.13)$$

so läßt sich das Matrixelement berechnen:

$$(b\,|\, r^J \hat{\mathfrak{L}} Y_{Jm} \nabla |\, a) = \sum_\mu \left\{ \sqrt{\frac{J+1}{2J+3}}\,(J\,1\,m\,\mu\,|\, J+1,\, m+\mu)\, \times \right.$$
$$\times\, (\Phi_{J_b m_b},\, Y_{J+1,\, m+\mu}\, \Phi_{J_a m_a}) \int r^{J+2} \varphi_{n_b L_b} \left(\frac{d}{dr} - \frac{J}{r}\right) \varphi_{n_a L_a}\, dr -$$
$$- \sqrt{\frac{J}{2J-1}}\,(J\,1\,m\,\mu\,|\, J-1,\, m+\mu)\, (\Phi_{J_b m_b},\, Y_{J-1,\, m+\mu}\, \Phi_{J_a m_a})\, \times$$
$$\left. \times \int r^{J+2} \varphi_{n_b L_b} \left(\frac{d}{dr} + \frac{J+1}{r}\right) \varphi_{n_a L_a}\, dr \right\} (1J,\, M+\mu,\, -\mu\,|\, Jm). \qquad (11.2.14)$$

Setzt man dies in (11.2.12a) ein, so erhält man die reduzierte Wahrscheinlichkeit für die magnetische Multipolstrahlung, die durch Konvektionsströme bedingt ist. Dabei drücken sich die Quadrate der Matrixelemente, die von den Spinwinkelfunktionen abhängen, durch die Funktionen

$$\frac{Z^2\left(L_a+1,\, J_a L_b J_b;\, \frac{1}{2} J\right)}{(2J_a+1)}, \qquad \frac{Z^2\left(L_a-1,\, J_a L_b J_b;\, \frac{1}{2} J\right)}{(2J_a+1)} \qquad (11.2.15)$$

aus, die im Anhang 1.9. definiert sind. Die Integrale der Radialwellenfunktionen können grob durch den Ausdruck

$$N(MJ) \approx \frac{3 R^{J-1}}{J+2}$$

angenähert werden. Unter Benutzung der Eigenschaften der Funktionen Z erhält man aus (11.2.15) die Auswahlregeln für die magnetische Multipol-

strahlung, die durch Konvektionsströme hervorgerufen wird. Solche Übergänge sind möglich, wenn

a) $L_a + L_b + J \pm 1$ eine gerade Zahl ist;

b) gleichzeitig mit dem Erhaltungssatz für den Gesamtdrehimpuls $\Delta(J_a, J_b, J)$ folgende Erhaltungssätze erfüllt sind:

$$\Delta(L_a \pm 1, L_b, J), \quad \Delta\left(L_a, J_a, \frac{1}{2}\right), \quad \Delta\left(L_b, J_b, \frac{1}{2}\right).$$

Magnetische Dipolstrahlung ist z. B. möglich bei den Übergängen $L_a \longleftrightarrow L_b = L_a$, d. h. bei den Übergängen $s_{1/2} \longleftrightarrow s_{1/2}$, $p_{1/2} \longleftrightarrow p_{1/2}$. Beim Übergang $J_a \to L_b$ ist eine magnetische Multipolstrahlung der minimalen Ordnung $J = |L_a - L_b| + 1$ möglich, wenn gleichzeitig die Bedingung $J_a + J_b \geqq J$ erfüllt ist. Gilt dagegen $|J_a + J_b| < |L_a - L_b| + 1$, so ist diese magnetische Multipolstrahlung verboten. Zum Beispiel ist magnetische Dipolstrahlung beim Übergang $s_{1/2} \longleftrightarrow d_{3/2}$ verboten.

Zur Untersuchung der reduzierten Wahrscheinlichkeit von magnetischen Multipolübergängen, die durch die magnetischen Momente der Nukleonen bedingt sind, benutzen wir die Identität

$$\vec{\sigma}\,\nabla = \sigma_r\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\vec{\sigma}\,\hat{\mathfrak{L}}}{r}\right), \qquad \sigma_r = \frac{\vec{\sigma}\,\mathfrak{r}}{r}.$$

Dann gilt

$$\hat{\mathfrak{L}}\,\mathrm{rot}\,\vec{\sigma} \approx i\,r\,\sigma_r\left\{\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \vec{\sigma}\,\hat{\mathfrak{L}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\right)\right\},$$

und man kann schreiben

$$(b\,|\,r^J\,\hat{\mathfrak{L}}\,\mathrm{rot}\,\vec{\sigma}\,Y_{Jm}\,|\,a) = i\left(b\,\middle|\,r^{J+1}\,Y_{Jm}\,\sigma_r\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\middle|\,a\right) +$$

$$+\,i\left(b\,\middle|\,r^J\,\sigma_r\,\vec{\sigma}\,\hat{\mathfrak{L}}\,Y_{Jm}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right)\middle|\,a\right). \tag{11.2.16}$$

Beide Matrixelemente in (11.2.16) enthalten Integrale der Radialwellenfunktionen im Anfangs- und Endzustand, die grob durch den Ausdruck

$$N(MJ) \approx \frac{3\,R^{J-1}}{J+2}$$

angenähert werden können. Zur Bestimmung der Auswahlregeln sind die übrigbleibenden Matrixelemente von den Spin-Bahn-Funktionen zu untersuchen:

$$(\Phi_{L_b J_b},\ Y_{Jm}\,\sigma_r\,\Phi_{L_a J_a}) \tag{11.2.17}$$

und

$$(\Phi_{L_b J_b},\ \sigma_r\,\vec{\sigma}\,\hat{\mathfrak{L}}\ Y_{Jm}\,\Phi_{L_a J_a}). \tag{11.2.17a}$$

Da die Spin-Bahn-Funktionen Eigenfunktionen des Operators $\vec{\sigma}\,\hat{\mathfrak{L}}$ sind, werden die Bedingungen, unter denen das Matrixelement (11.2.17a) von Null verschieden ist, mit den entsprechenden Bedingungen für das Matrixelement (11.2.17) übereinstimmen.

Berücksichtigt man die Wirkung des Operators σ_r auf die Spin-Bahn-Funktion (s. Anhang 1.3.):

$$\sigma_r \, \Phi_{L_a = J_a - {}^1\!/_2,\, J_a} = \Phi_{L_a + 1,\, J_a},$$

$$\sigma_r \, \Phi_{L_a = J_a + {}^1\!/_2,\, J_a} = \Phi_{L_a - 1,\, J_a},$$

so erhält man analog wie für die elektrische Multipolstrahlung den Ausdruck

$$4\pi \sum_{m,\, m_b} |(\Phi_{L_b J_b}, Y_{Jm} \sigma_r \Phi_{L_a J_a})|^2 = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{Z^2\left(L_a + 1, J_a L_b J_b; \dfrac{1}{2} J\right)}{(2J_a + 1)} & \text{für} \quad L_a = J_a - {}^1\!/_2, \\ \dfrac{Z^2\left(L_a - 1, J_a L_b J_b; \dfrac{1}{2} J\right)}{(2J_a + 1)} & \text{für} \quad L_a = J_a + {}^1\!/_2. \end{array} \right. \tag{11.2.18}$$

Aus (11.2.18) folgen sofort die Auswahlregeln für die magnetische Multipolstrahlung, die durch die magnetischen Momente der Nukleonen bedingt sind:

a) Für $L_a = J_a - {}^1\!/_2$ ist magnetische Multipolstrahlung von der Ordnung 2^J möglich, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$L_a + L_b + J + 1 = \text{gerade Zahl}$$

und

$$\Delta(J_a, J_b, J); \qquad \Delta(L_a + 1, L_b, J).$$

b) Für $L_a = J_a + {}^1\!/_2$ ist magnetische Multipolstrahlung von der Ordnung 2^J möglich, wenn

$$L_a + J_b + J - 1 \text{ eine gerade Zahl ist}$$

und die Dreiecksbedingungen

$$\Delta(J_a, J_b, J); \qquad \Delta(L_a - 1, L_b, J)$$

erfüllt sind.

So ist z. B. der magnetische Dipolübergang $s_{1/2} \longleftrightarrow d_{3/2}$ erlaubt, wenn man die Spinumkehr für das Nukleon berücksichtigt.

Die obigen Betrachtungen sind nur gültig, wenn eine Spin-Bahn-Wechselwirkung vorhanden ist, d. h., wenn der Nukleonenzustand durch Spin-Bahn-Funktionen beschrieben wird. In diesem Fall sind die reduzierten Wahrscheinlichkeiten für die durch die magnetischen Momente bedingte magnetische Multipolstrahlung $B_S(MJ)$ und die reduzierten Wahrscheinlichkeiten $B_K(MJ)$ für die magnetische Multipolstrahlung, bedingt durch Konvektionsströme, von etwa gleicher Größenordnung:

$$B_K(MJ) \approx B_S(MJ).$$

Wäre keine Spin-Bahn-Wechselwirkung vorhanden, so würden die Spins keine Beiträge zur Multipolstrahlung liefern.

In grober Näherung unter Benutzung der Abschätzungen $N(MJ) \approx \frac{3R^{J-1}}{J+2}$ und $(2J_a+1)^{-1} Z^2(L_a \pm 1, J_a, L_b, J_b; {}^1/_2 J) \approx 1$ erhält man für die Wahrscheinlichkeit der magnetischen Multipolstrahlung

$$P(MJ) \approx \frac{18e^2}{\hbar}\left(\frac{\varepsilon_J \hbar}{Mc}\right)^2 \frac{R^{2J-2} k^{2J+1}}{J(J+1)[(2J+1)!!]^2 (J+2)^2}. \qquad (11.2.19)$$

Mit Hilfe von (11.2.19) und (11.2.9) kann man die Wahrscheinlichkeiten für die MJ- und die $E(J+1)$-Strahlung abschätzen:

$$\frac{P(MJ)}{P(E[J+1])} \approx \left(\frac{\hbar k}{Mc}\right)^2 (kR)^{-4}. \qquad (11.2.20)$$

Setzt man $R = 1{,}2 \cdot 10^{-13} A^{1/3}$ [cm] und drückt die Energie der γ-Strahlung in MeV aus, so wird

$$\frac{P(MJ)}{P(E[J+1])} \approx \left(\frac{25}{\hbar\omega[\mathrm{MeV}]}\right)^2 A^{-4/3}. \qquad (11.2.20\,\mathrm{a})$$

Kleine Strahlungsenergien und kleine A begünstigen somit die Vergrößerung des Verhältnisses der Wahrscheinlichkeit von MJ- und $E(J+1)$-Strahlung. Wie das Experiment zeigt, sind in einigen Fällen die Wahrscheinlichkeiten für $M1$- und $E2$-Strahlung von der gleichen Größenordnung, wenn sie nach den Auswahlregeln zulässig sind. Man muß jedoch beachten, daß die Abschätzung (11.2.20) sehr grob ist. In einzelnen Fällen kann sich das tatsächliche Intensitätsverhältnis für die Strahlung wesentlich von (11.2.20) unterscheiden.

In der Regel verlaufen Strahlungsübergänge zwischen den unteren Energieniveaus der Kerne über die Emission von Multipolstrahlung niedrigster Ordnung nach den entsprechenden Auswahlregeln. Die Strahlung besitzt elektrischen oder magnetischen Charakter, je nachdem, wie sich die Parität beim Übergang ändert.

Die gefundenen Auswahlregeln für die elektrische und magnetische Multipolstrahlung geben Anlaß zur Unterscheidung von 4 Fällen:

a) Für $J_a = L_a + {}^1/_2$ und $J_b = L_b + {}^1/_2$ ergibt sich die kleinste mögliche Ordnung der Multipolstrahlung aus der Zahl $J_{\min} = |L_a - L_b|$. Da in diesem Fall $L_a + L_b + J_{\min}$ eine gerade Zahl ist, wird die entsprechende Strahlung elektrischen Charakter tragen ($EJ_{\min}$), z. B. elektrische Oktupolstrahlung sein bei den Übergängen

$$h_{11/2} \longleftrightarrow d_{5/2}, \qquad i_{13/2} \longleftrightarrow f_{7/2}.$$

b) Für $J_a = L_a - {}^1/_2$ und $J_b = L_b - {}^1/_2$ ist ebenfalls nur elektrische $EJ_{\min}$-Strahlung möglich. Dabei gilt $J_{\min} = |L_a - L_b|$. Zum Beispiel erhält man elektrische Dipolstrahlung beim Übergang $s_{1/2} \longleftrightarrow p_{1/2}$.

In den Fällen *a)* und *b)* ist magnetische Multipolstrahlung MJ möglich, wenn $J_a + J_b \leqq J$ mit $J > J_{\min}$ gilt. Da die Wahrscheinlichkeit für solche Strahlung kleiner als die Wahrscheinlichkeit für elektrische Strahlung mit kleinerer Multipolordnung ist, werden nur elektrische Übergänge auftreten.

Im Falle $L_a = L_b$ ist jedoch eine elektrische Dipolstrahlung nicht möglich, und es muß magnetische Dipolstrahlung und möglicherweise elektrische Quadrupolstrahlung bei $J_a = J_b \geqq {}^3/_2$ beobachtet werden. Im Falle $J_a = J_b = {}^1/_2$ (für die Übergänge $s_{1/2} \longleftrightarrow s_{1/2}$ und $p_{1/2} \longleftrightarrow p_{1/2}$) ist nur die Emission von magnetischer Dipolstrahlung möglich.

c) Für $J_a = L_a + {}^1/_2$, $J_b = L_b - {}^1/_2$ und $L_a > J_b$ wird $J_{\min} = L_a - L_b + 1$, und $L_a + L_b + J_{\min}$ ist eine ungerade Zahl. Daher beobachtet man nur magnetische Multipolstrahlung $MJ_{\min}$.

d) Für $J_a = L_a - {}^1/_2$, $J_b = L_b + {}^1/_2$ und $L_a > L_b$ gilt $J_{\min} = L_a - L_b - 1$, und $L_a + L_b + J_{\min}$ wird eine ungerade Zahl, so daß magnetische Multipolstrahlung $MJ_{\min}$ zu erwarten ist.

Zu den Übergängen vom Typ *c*) und *b*) gehören z. B. die $M4$-Übergänge

$$g_{9/2} \longleftrightarrow p_{1/2}, \qquad h_{11/} \longleftrightarrow d_{3/2}, \qquad i_{13/2} \longleftrightarrow f_{5/2}.$$

11.3. Elementare Theorie der inneren Konversion

In den vorhergehenden beiden Abschnitten dieses Kapitels haben wir die Frage nach der Wahrscheinlichkeit für den Übergang aus einem angeregten Zustand in den Grundzustand (oder in einen anderen angeregten Zustand) durch γ-Quantenemission untersucht. Dabei wurde die Rolle der Elektronen, die den Kern im Atomverband umgeben, nicht berücksichtigt. Es erweist sich jedoch, daß die Anwesenheit der Elektronenhüllen einerseits die Wahrscheinlichkeit für γ-Emission durch den Kern etwas verändert und andererseits zu einem neuen Übergangsmechanismus in den Grundzustand durch unmittelbare Energieabgabe an ein Elektron der Hülle Anlaß gibt.

Der Einfluß der Elektronenhülle auf die Emissionswahrscheinlichkeit von γ-Quanten durch den Kern wurde für die Quadrupolstrahlung von Taylor und Mott [11,9] untersucht. Den allgemeinen Fall von Multipolstrahlung bei kleinen Anregungsenergien des Kerns untersuchte Dawydow [11,10]. In diesen Arbeiten wurde gezeigt, daß die Anwesenheit der Hüllenelektronen die Zahl der je Zeiteinheit emittierten γ-Quanten um eine sehr kleine Größe ändert. Nach [11,10] entspricht diese Änderung bei einer Energie von $\hbar\omega = 0{,}1\, mc^2$ für $Z = 20$ den Werten $1{,}4 \cdot 10^{-5}$ und $1{,}7 \cdot 10^{-7}$ für die $E2$- bzw. $E4$-Strahlung. Für den Kern mit $Z = 40$ lauten die Korrektionen für diese Strahlungstypen $5{,}8 \cdot 10^{-3}$ bzw. $1{,}7 \cdot 10^{-5}$.

Einen wesentlich größeren Einfluß übt die Elektronenhülle auf die Gesamtlebensdauer von Kernen im angeregten Zustand aus, da sie die Möglichkeit einer unmittelbaren Abgabe der Anregungsenergie des Kerns an die Elektronen bietet. Im Resultat einer solchen Energieübertragung geht das Elektron aus dem gebundenen Zustand in den Kontinuumzustand über und verläßt das Atom. Die Energie des emittierten Elektrons ist gleich dem Energieunterschied zwischen Anregungsenergie des Kerns und Bindungsenergie des Elektrons auf der entsprechenden Atomschale.

Dieser Energieübertragungsprozeß wird als *innere Konversion* (innere Umwandlung) bezeichnet. Die Bezeichnung drückt jedoch einen ursprüng-

lich falschen Standpunkt aus, nach dem die innere Konversion als innerer Kernphotoeffekt betrachtet wurde. Später wurde festgestellt, daß die Energieübertragung auch dann vor sich gehen kann, wenn die Emission von γ-Quanten vollständig verboten ist (0-0-Übergänge). Die innere Konversion und die γ-Quantenemission sind als zwei mögliche Prozesse zu betrachten, über die der Kern seine Anregungsenergie abgeben kann. Die Gesamtwahrscheinlichkeit für den Übergang des Kerns aus dem angeregten Zustand in den Grundzustand ist gleich der Summe aus der Wahrscheinlichkeit für den Strahlungsübergang und der Wahrscheinlichkeit für die innere Konversion.

Obwohl die innere Konversion unabhängig von der γ-Quantenemission verläuft, ist die Übertragung der Anregungsenergie auf die Elektronen durch elektromagnetische Wechselwirkung zwischen dem Kern und den Hüllenelektronen bedingt. Die Aufgabe der Theorie besteht in der Berechnung der Wahrscheinlichkeiten für die innere Konversion oder der relativen Wahrscheinlichkeit von Konversions- und Strahlungsübergängen, wenn der Übergang nicht zum $0 \to 0$-Typ gehört. Diese werden nicht durch γ-Quantenemission realisiert.

Die Relativwahrscheinlichkeit beider Prozesse, d. h. das Verhältnis der Gesamtzahl der emittierten Elektronen N_e zur Gesamtzahl der emittierten γ-Quanten N_γ, wird als *Koeffizient der inneren Konversion* bezeichnet:

$$\alpha = \frac{N_e}{N_\gamma}. \tag{11.3.1}$$

Am häufigsten benutzt man bei der Berechnung des Koeffizienten der inneren Konversion die halbklassische Methode. Die Äquivalenz dieser Methode gegenüber den genaueren quantenmechanischen Untersuchungen wurde von Berestezki [11,11] bewiesen. Bei der halbklassischen Methode wird der Kern durch einen monochromatischen Strahler von elektromagnetischen Wellen ersetzt. Man berechnet die Übergangswahrscheinlichkeit für ein Hüllenelektron aus dem gebundenen Zustand in einen Zustand des kontinuierlichen Spektrums auf Grund der Wechselwirkung mit dem Strahlungsfeld bestimmter Multipolordnung. Die erhaltene Übergangswahrscheinlichkeit je Sekunde wird durch die Zahl der γ-Quanten dividiert, die je Sekunde emittiert werden. Dabei nimmt man an, daß diese Zahl von Quanten je Sekunde in eine Kugel mit großem Radius um den Kern emittiert wird.

Zahlreiche Arbeiten [11,12] befassen sich mit der Berechnung von Koeffizienten der inneren Konversion. Sie unterscheiden sich voneinander durch die benutzte Näherung für die Wellenfunktionen der Hüllenelektronen. Es erwies sich, daß die innere Konversion mit kleiner werdender Übergangsenergie und zunehmender Multipolordnung des Übergangs wächst. Um grobe Abschätzungen für die Größenordnung des Koeffizienten der inneren Konversion zu erhalten, kann man die nichtrelativistische Näherung für die Elektronen benutzen. Diese Näherung ist für Elektronenenergien kleiner als die Ruhenergie des Elektrons zulässig. Sie erleichtert die Rechnungen erheblich. Zur weiteren Vereinfachung nimmt man meist an, daß die Wellenfunktionen der emittierten Elektronen in Form von ebenen Wellen angenom-

men werden können. Dies ist zulässig, wenn die Energie des emittierten Elektrons größer als die Bindungsenergie im Atom ist.

Zur elementaren Berechnung des Koeffizienten der inneren Konversion von der K-Schale wählen wir die Wellenfunktion des Anfangszustands in der Form

$$\varphi_a = \frac{e^{-r/\varrho}}{\sqrt{\pi \varrho^3}}, \tag{11.3.2}$$

wobei

$$\varrho = \frac{\hbar^2}{\mu e^2 Z}$$

den „Radius" der K-Schale bedeutet. Die Wellenfunktion des Endzustandes wird in Form einer ebenen Welle gewählt:

$$\varphi_b = e^{i\mathfrak{k}\mathfrak{r}}, \tag{11.3.3}$$

die auf die Volumeneinheit normiert ist; $\mathfrak{k}$ bedeutet den Wellenvektor des Elektrons nach der Emission. Bezeichnet man die Wellenfunktionen des Anfangs- und Endzustandes des Kerns mit $\psi_a(q)$ bzw. $\psi_b(q)$, so läßt sich die Wellenfunktion für den Anfangs- und Endzustand des gesamten Systems in folgender Form schreiben:

$$\Phi_a = \varphi_a(r)\,\psi_a(q) \quad \text{und} \quad \Phi_b = \varphi_b(r)\,\psi_b(q). \tag{11.3.4}$$

Die Wahrscheinlichkeit für innere Konversion je Zeiteinheit, bezogen auf die beiden Elektronen der K-Schale, wird durch den Ausdruck

$$P_{ba}(BK) = \frac{4\pi}{\hbar} \sum |(\Phi_a, H'\,\Phi_a)|^2\,\varrho(\varepsilon) \tag{11.3.5}$$

gegeben. Dabei bedeuten $\varrho(\varepsilon) = \frac{\mu \hbar k}{(2\pi\hbar)^3}\,d\Omega$ die Zahl der Zustände je Einheitsenergieintervall (μ = Masse des Elektrons) und $d\Omega$ das Raumwinkelelement. Zu summieren ist über die Endzustände des Kerns, die sich durch ihre Magnetquantenzahlen unterscheiden, zu integrieren über die Winkelveränderlichen.

Bei der Bestimmung des Wechselwirkungsoperators H' für die innere Konversion berücksichtigen wir, daß bei Kernanregung ($\hbar\omega$) für Wellenlängen der γ-Strahlung, die groß gegen den Radius der K-Schale sind ($\hbar\omega < 25Z$ [keV]), die Effekte der retardierenden Wechselwirkung klein werden. Dabei ist H' in erster Näherung gleich der elektrostatischen Wechselwirkung zwischen dem Elektron und den Protonen des Kerns, d. h.

$$H' = \sum_{\alpha=1}^{Z} \frac{e^2}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{q}_\alpha|}. \tag{11.3.6}$$

$\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_\alpha$ entsprechen den Koordinaten von Elektron und Proton im Schwerpunktsystem des Kerns. Selbstverständlich kann man bei der Wahl des Störungsoperators in der Form (11.3.6) die innere Konversion für Kernübergänge, die magnetische Multipolstrahlung begleiten, nicht beschreiben.

Für $r \gg q_i$ läßt sich der Störungsoperator (11.3.6) nach Kugelfunktionen entwickeln:

$$H' = \sum_{\alpha=1}^{Z} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{M} \frac{4\pi e^2}{(2l+1)\,r} \left(\frac{q_\alpha}{r}\right)^l Y_{lM}(\Theta, \Phi)\, Y_{lM}^*(\vartheta_\alpha, \varphi_\alpha) \qquad (11.3.6\text{a})$$

mit Θ, Φ als Winkel, die die Richtung von $\mathfrak{r}$, und ϑ_α und φ_α als Winkel, die die Richtung von $\mathfrak{q}_\alpha$ festlegen.

Mit (11.3.4) und (11.3.6a) kann man schreiben

$$(\Phi_b, H'\,\Phi_a) = \sum_{l,M} \frac{4\pi e^2}{2l+1} \left(\psi_b, \sum_{\alpha=1}^{Z} q_\alpha^l\, Y_{lM}^*(\vartheta_\alpha, \varphi_\alpha)\, \psi_a\right) \left(\varphi_b, \frac{Y_{lM}(\Theta,\Phi)}{r^{l+1}}\, \varphi_a\right). \qquad (11.3.7)$$

Vergleicht man (11.3.7) mit (11.2.1), so sieht man, daß das Matrixelement

$$\left(\psi_b, \sum_{\alpha=1}^{Z} q_\alpha^l\, Y_{lM}(\vartheta_\alpha, \varphi_\alpha)\, \psi_a\right)$$

aus (11.3.7) gleich dem Matrixelement ist, das in der langwelligen Näherung die reduzierte Wahrscheinlichkeit für einen Kernübergang über elektromagnetische Strahlung vom Typ *El* bestimmt.

Das Matrixelement, in dem die Integration über die Elektronenkoordinaten auftritt, läßt sich nach Einsetzen der Wellenfunktionen (11.3.2) und (11.3.3) auf das Integral

$$\left(\varphi_b, \frac{Y_{lM}}{r^{l+1}}\, \varphi_a\right) = (\pi\, \varrho^3)^{-1/2} \int e^{-\frac{r}{\varrho} - i\mathfrak{k}\mathfrak{r}}\, \frac{Y_{lM}(\Theta,\Phi)}{r^{l+1}}\, d\mathfrak{r}$$

zurückführen. Entwickelt man $\exp\{-i\,\mathfrak{k}\,\mathfrak{r}\}$ nach Kugelfunktionen (siehe Anhang 1.1.):

$$\exp\{-i\,\mathfrak{k}\,\mathfrak{r}\} = 4\pi \sum_{l,m} (-i)^l\, j_l(k\,r)\, Y_{lm}(\vartheta, \varphi)\, Y_{lm}^*(\Theta, \Phi),$$

und integriert über die Winkelveränderlichen, so erhält man

$$\left(\varphi_b, \frac{Y_{lM}}{r^{l+1}}\, \varphi_a\right) = 4 \sqrt{\frac{\pi}{\varrho^3}}\, (-i)^l\, Y_{lM}(\vartheta, \varphi) \int \frac{j_l(k\,r) \exp\left(-\frac{r}{\varrho}\right)}{r^{l-1}}\, dr. \qquad (11.3.8)$$

Dabei bedeuten ϑ, φ die Winkel, die die Richtung des Vektors $\mathfrak{k}$ festlegen. Bei der Berechnung des Integrals ist zu berücksichtigen, daß für $k\,\varrho > 1$ wegen des schnellen Oszillierens der sphärischen Bessel-Funktion im Integral nur kleine Werte von r wesentlich sind. Es wird somit

$$\int_0^\infty r^{-l+1}\, j_l(k\,r) \exp\left(-\frac{r}{\varrho}\right) dr \approx \int_0^\infty r^{-l+1}\, j_l(k\,r)\, dr = \frac{k^{l-2}}{(2l-1)!!}, \qquad k\,\varrho > 1.$$

Setzt man dies in (11.3.8) und danach (11.3.7) in (11.3.5) ein, so erhält man nach Integration über die Winkelveränderlichen (unter Berücksichtigung

der Orthonormierung der Kugelfunktionen) die Wahrscheinlichkeit für innere Konversion beim El-Übergang:

$$P(BK) = 128\pi \frac{e^4 \mu}{\hbar^3 \varrho^3} \frac{k^{2l-3}}{[(2l+1)!!]^2} \sum_{m,\, m_b} \left| \left(\psi_b, \sum_{\alpha=1}^{Z} q_\alpha^l Y_{lM}(\vartheta_\alpha, \varphi_\alpha)\, \psi_a \right) \right|^2 .$$

Da die Wahrscheinlichkeit je Zeiteinheit nach (11.1.22) durch den Ausdruck

$$P(El) = 8\pi \frac{e^2}{\hbar} \frac{(l+1)}{l[(2l+1)!!]^2} \left(\frac{\omega}{c}\right)^{2l+1} \sum_{m,\, m_b} \left| \left(\psi_b, \sum_{\alpha=1}^{Z} q_\alpha^l Y_{lM}(\vartheta_\alpha, \varphi_\alpha)\, \psi_a \right) \right|^2$$

gegeben wird, lautet der Koeffizient der inneren Konversion für Elektronenenergien, die groß gegen die Bindungsenergie des Elektrons sind,

$$\alpha(El) = \frac{P(BK)}{P(El)} = \frac{16 e^2 \mu\, l\, k^{2l-3}}{\hbar^2 (l+1)\, \varrho^3 \left(\dfrac{\omega}{c}\right)^{2l+1}} .$$

Setzt man $\varrho = \hbar^2/\mu e^2 Z$ ein und nimmt $k = \sqrt{2\mu\omega/\hbar}$ an, so erhält man einen Näherungswert für den Koeffizienten der inneren Konversion:

$$\alpha(El) \approx Z^3 \frac{l}{l+1} \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^4 \left(\frac{2\mu c^2}{\hbar\omega}\right)^{l+5/2} . \qquad (11.3.9)$$

Die Formel (11.3.9) ist annähernd nur dann richtig, wenn die Übergangsenergie groß gegen die Bindungsenergie des K-Elektrons und die Möglichkeit der Benutzung von nichtrelativistischen Elektronenwellenfunktionen gegeben ist ($v/c \ll 1$, $Z e^2/\hbar v \ll 1$). Nach (11.3.9) nimmt der Koeffizient der inneren Konversion mit wachsendem Z und l sehr stark zu und wird mit wachsender Übergangsenergie kleiner.

In der nichtrelativistischen Theorie (die den Spin des Elektrons nicht berücksichtigt) wird die Konversion an der K-Schale bei magnetischen Multipolübergängen durch die Paritätsauswahlregeln verboten. Bei magnetischer Multipolstrahlung vom Typ Ml ändert sich die Parität nach $(-1)^{l+1}$, beim Übergang des Elektrons $0 \to l$ ändert sie sich um $(-1)^l$. Die Konversion bei magnetischen Multipolübergängen hängt also wesentlich vom Elektronenspin ab.

Obwohl der Koeffizient der inneren Konversion bei kleinen Übergangsenergien mit wachsender Multipolordnung schnell wächst, besitzt nur der Konversionskoeffizient für den kleinsten nach den Auswahlregeln noch zulässigen Wert von l praktische Bedeutung.

Bei der inneren Konversion kann auch ein Elektron aus der L-Schale herausgeschlagen werden. Im allgemeinen ist dieser Prozeß — bedingt durch den größeren Abstand der L-Elektronen vom Kern — wesentlich weniger wahrscheinlich als die Konversion an der K-Schale. Mit abnehmender Übergangsenergie und zunehmender Ordnungszahl des Kerns wächst jedoch die Wellenlänge der Strahlung, und die Radien der K- und L-Schale werden kleiner. Aus diesem Grund sind die Unterschiede der Radien dieser Schalen weniger von Bedeutung. Dies führt zu einer Vergrößerung des Verhältnisses

der Koeffizienten für die Konversion an der L- und K-Schale. Die Vergrößerung des Verhältnisses α_L/α_K ist besonders bedeutungsvoll bei großer Multipolordnung. Wird schließlich die Übergangsenergie kleiner als die Ionisationsenergie für die Elektronen der K-Schale, so verschwindet die Konversion an der K-Schale vollständig, es gilt $\alpha_L/\alpha_K \to \infty$. In der Abb. 64 ist die Abhängigkeit zwischen α_K/α_L und dem Verhältnis $Z^2/\hbar\,\omega$ für elektrische Übergänge verschiedener Multipolordnung dargestellt. Wie man daraus ersieht,

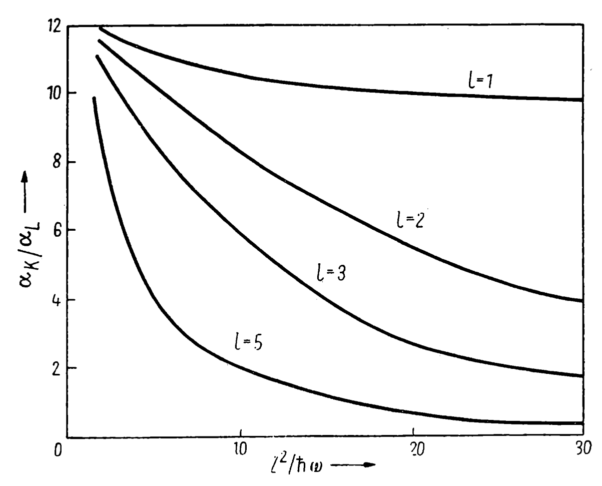


Abb. 64. Verhältnis der Koeffizienten der inneren Konversion an der K- und L-Schale in Abhängigkeit von $Z^2/\hbar\,\omega$

kann die Messung des Verhältnisses α_K/α_L Aufschluß über die Multipolordnung des Übergangs geben.

Für genaue Berechnungen der Koeffizienten der inneren Konversion sind nicht nur relativistische Elektronenwellenfunktionen zu verwenden, sondern auch die endlichen Abmessungen der Kerne zu berücksichtigen (siehe z. B. Sliw [11,13] und die Arbeit [11,14]).

Wegen der Transversalität des elektromagnetischen Feldes sind in Kernen 0-0-Übergänge mit Emission eines Quants vollständig verboten. Die Anregungsenergie des Kerns kann nur entweder durch innere Konversion oder bei $\hbar\,\omega > 2\mu\,c^2$ durch innere Paarbildung abgegeben werden.

Die Übergänge $\Delta J = 0$ ohne Änderung der Parität werden als *elektrische Monopolübergänge* ($E\,0$) bezeichnet. Derartige Übergänge können sowohl bei 0-0-Übergängen als auch bei Übergängen zwischen Zuständen mit gleichem Spin und gleicher Parität auftreten.

Ist die Anregungsenergie des Kerns größer als $2\mu\,c^2$, so kann sie zur Bildung eines Elektron-Positron-Paares im Kernfeld und zur Emission des Paares aus dem Bereich des Atoms verwendet werden. Einen solchen Prozeß bezeichnet man als innere Paarbildung. Er konnte in verschiedenen Fällen

beobachtet werden. Als klassisches Beispiel der inneren Paarbildung ist der elektrische Monopolübergang zwischen dem ersten angeregten Niveau und dem Grundzustand des ^{16}O-Kerns mit einer Übergangsenergie von 6 MeV anzusehen.

Wir haben in diesem Abschnitt nur die elementare Theorie der inneren Konversion dargestellt. Sie gestattet nur, qualitative Besonderheiten der Erscheinung zu erklären. Für ein genaueres Studium der Theorie der inneren Konversion empfehlen wir neben den angeführten Originalarbeiten das 6. Kapitel des Buches von GROSCHEW und SCHAPIRO [11,15].

11.4. Kernisomerie und ihr Zusammenhang mit der Schalenstruktur des Kerns

Angeregte Kernzustände können im Resultat von Kernreaktionen, β- und α-Übergängen, γ-Quantenabsorption und COULOMB-Anregung entstehen. Reicht die Anregungsenergie für Nukleonenemission nicht aus, so verläuft der Kernübergang in den Grundzustand entweder über Emission von elektromagnetischer Multipolstrahlung oder über Elektronenemission bzw. innere Paarbildung.

Die Lebensdauer eines Kerns im angeregten Zustand (τ) ist der Summe der Übergangswahrscheinlichkeiten vom gegebenen Zustand in alle niedriger gelegenen Zustände umgekehrt proportional:

$$\tau \sim \left(\sum_b P_{ba}\right)^{-1}. \tag{11.4.1}$$

Ist die Anregungsenergie jedoch kleiner als die Schwellenenergie für Nukleonenemission, so sind in der Summe $\sum P_{ba}$ nur die Glieder $P(\gamma)$ und $P(BK)$ wesentlich, die den Übergangswahrscheinlichkeiten für γ-Strahlung und innere Konversion entsprechen. Führt man den Koeffizienten der inneren Konversion $\alpha = P(BK)/P(\gamma)$ ein, so gilt

$$\tau = \tau_\gamma (1 + \alpha)^{-1} \tag{11.4.1a}$$

mit $\tau_\gamma = [P(\gamma)]^{-1}$ als Lebensdauer des angeregten Kernzustands in bezug auf γ-Emission. Der Koeffizient der inneren Konversion liegt meist in der Nähe von 1, in einigen Fällen wird er sogar größer als 1. Aus diesem Grund besitzt die innere Konversion bei der Bestimmung der Lebensdauer von angeregten Kernzuständen große Bedeutung.

In einigen Kernen sind angeregte Zustände mit großer Lebensdauer vorhanden. Solche Zustände werden als metastabile Zustände bezeichnet. Beim Übergang eines Kerns in einen angeregten metastabilen Zustand ändern sich einige Kerneigenschaften, z. B. die Halbwertzeit, wenn der Kern nicht stabil ist. Kerne mit gleicher Zusammensetzung, die sich nur dadurch voneinander unterscheiden, daß sie sich in verschiedenen Energiezuständen befinden, werden als *isomere Kerne* bezeichnet.

Die Erscheinung der Isomerie wurde von KURTSCHATOW und Mitarb. [11,16] bei der Untersuchung von radioaktiven Bromisotopen entdeckt. Einen Überblick über die Entdeckungsgeschichte und die wichtigsten experi-

mentellen Angaben über die Kernisomerie geben KORSUNSKI [11,17] sowie SEGRE und HELMHOLTZ [11,18].

Bei der Untersuchung von isomeren Kernen stellte man fest, daß viele Nuklide relativ lange Zeit in angeregten Zuständen existieren können. Die Halbwertzeit einiger dieser Nuklide beträgt Stunden, Tage, ja sogar Jahre. Die Lebensdauer angeregter Zustände von isomeren Kernen übersteigt also die Lebensdauer von gewöhnlichen angeregten Kernzuständen (10^{-12} s) um das 10^8- bis 10^{21}fache.

Die erste theoretische Begründung für die Isomerieerscheinungen wurde von WEIZSÄCKER [11,19] gegeben. Nach WEIZSÄCKER liegt der Grund für die lange Existenz von Kernen in angeregten Zuständen in dem großen Unterschied zwischen den Drehimpulsen von angeregtem und Grundzustand.

Die langlebigen angeregten Kernzustände gehören zu den Einzelteilchenanregungen. Nach den Formeln des Abschn. 11.1. ist die Wahrscheinlichkeit für Multipolübergänge proportional $(k R)^{2J+1}$. Für Übergangsenergien der Größenordnung 0,1 MeV und einem Kernradius von $6 \cdot 10^{-13}$ cm ergibt sich $k R \approx (300)^{-1}$, so daß man erwarten kann, daß die Wahrscheinlichkeit für Multipolstrahlung mit $J = 5$ um 10^{18}mal kleiner als die Wahrscheinlichkeit für Dipolstrahlung ist. Um also die großen Lebensdauern der angeregten Zustände von Kernen erklären zu können, muß man annehmen, daß sich für einige Kerne der erste angeregte Zustand um mehrere Einheiten im Drehimpuls vom Grundzustand unterscheiden.

Experimentell zeigt sich, daß isomere Paare am häufigsten bei Kernen mit ungerader Massenzahl beobachtet werden, und zwar für ungerade Protonen- oder Neutronenzahlen im Gebiet von $39 \cdots 49$ oder von $63 \cdots 81$. Diese Besonderheit der Existenz isomerer Kerne konnte mit Hilfe des Schalenmodells erklärt werden.

Nach dem Schalenmodell wird, beginnend mit dem 39. Nukleon, die $2p_{1/2}$-Schale aufgefüllt. Das nächste freie Niveau ist $1g_{9/2}$. Der Spinunterschied zwischen beiden Niveaus beträgt vier, ihre Parität ist verschieden. Beim Übergang $1g_{9/2} \longleftrightarrow 2p_{1/2}$ muß somit $M4$-Strahlung auftreten. Das Experiment zeigt, daß die Kerne

$$^{87}_{39}\mathrm{Y},\quad ^{89}_{39}\mathrm{Y},\quad ^{91}_{39}\mathrm{Y},\quad ^{69}_{30}\mathrm{Zn},\quad ^{71}_{31}\mathrm{Ge} \quad \text{u. a.}$$

tatsächlich isomere Zustände besitzen und der isomere Übergang dieser Kerne zum Typ $M4$ gehört. Berücksichtigt man, daß nach den Angaben über den Spin im Grundzustand in dem Maße, in dem die Schalenauffüllung vor sich geht, eine Umstellung der Lage der beiden Niveaus erfolgt (das Niveau $1g_{9/2}$ liegt jetzt tiefer als das Niveau $2p_{1/2}$), so läßt sich auch der isomere Zustand zahlreicher anderer Kerne, wie z. B. $^{91}_{41}\mathrm{Nb}$, $^{95}_{41}\mathrm{Nb}$, $^{97}_{41}\mathrm{Nb}$, $^{95}_{43}\mathrm{Te}$, $^{99}_{43}\mathrm{Te}$, $^{113}_{49}\mathrm{In}$, $^{115}_{49}\mathrm{In}$, erklären. Alle diese Kerne gehen bei Emission von $M4$-Strahlung in den Grundzustand über.

Genauso erklärt das Schalenmodell die Anwesenheit von isomeren Zuständen für Kerne mit ungerader Neutronenzahl im Intervall von $63 \cdots 81$. Bei einigen dieser isomeren Kerne verläuft der Übergang in den Grundzustand über eine zweifache Kaskade, z. B. auf folgende Art: $1h_{11/2} \to 2d_{3/2} \to 3s_{1/2}$.

Es werden auch isomere Kerne mit $M4$-Strahlung bei den Übergängen $i_{13/2} \longleftrightarrow f_{5/2}$ beobachtet. Dies gilt z. B. für

$$^{195}_{78}\mathrm{Pt}, \quad ^{197}_{78}\mathrm{Pt}, \quad ^{197}_{80}\mathrm{Hg}, \quad ^{199}_{80}\mathrm{Hg}.$$

Man muß natürlich beachten, daß das Schalenmodell zwar eine gute qualitative Erklärung auf Grund der Einzelteilchenanregung liefert, bei quantitativen Berechnungen aber die Kopplung zwischen Einzelteilchenanregungen und Kollektivfreiheitsgraden (siehe z. B. [11,20] und Abschn. 11.5.) berücksichtigt werden muß. Zur Zeit kann die Theorie noch keine quantitative Übereinstimmung mit dem Experiment herstellen.

11.5. Theorie der elektromagnetischen Übergänge im kombinierten Modell des Kerns

In nichtsphärischen Kernen entsprechen die ersten angeregten Zustände kollektiven Anregungen. In der Näherung der starken Kopplung werden die Kollektivbewegungen durch die Quantenzahlen J, M, K und Ω charakterisiert, die in dieser Reihenfolge den Gesamtdrehimpuls des Kerns, dessen Projektion auf eine ausgezeichnete Richtung (OZ), dessen Projektion auf die Symmetrieachse des Kerns und die Projektion des Gesamtdrehimpulses des äußeren Nukleons auf dieselbe Achse angeben. Den niedrigsten angeregten Zuständen entspricht meist $K = \Omega$.

Die Abweichung des Kerns von der Kugelform drückt sich durch die Anwesenheit eines Trägheitsmoments und eines großen inneren Quadrupolmoments Q_0 aus.

Im kombinierten Modell wird der Kernzustand durch Kollektivfreiheitsgrade und Einzelteilchenfreiheitsgrade bestimmt. Die Kollektivfreiheitsgrade beschreiben die Gesamtheit der stark gekoppelten Nukleonen (alle Nukleonen, die zu den vollbesetzten Schalen gehören). Die Einzelteilchenfreiheitsgrade beschreiben die Zustände der „äußeren", schwach gebundenen Nukleonen.

Übergänge, die durch Veränderung der Einzelteilchenzustände hervorgerufen werden, lassen sich durch die im Abschn. 11.2. angeführten Wahrscheinlichkeiten beschreiben. In einzelnen Fällen können sich diese Wahrscheinlichkeiten jedoch von den wirklichen Übergangswahrscheinlichkeiten auf Grund der Veränderung der Wellenfunktionen infolge eines nichtsphärischen Potentials und infolge des Einflusses von Kollektivfreiheitsgraden stark unterscheiden. Die Theorie dieser Effekte ist bisher nur wenig bekannt [11,20; 11,21]. Es lassen sich lediglich folgende qualitative Überlegungen durchführen. Das nichtsphärische Potential kann zu Übergängen führen, die durch Auswahlregeln des Schalenmodells verboten sind. Weiter darf man bei der Berücksichtigung der Kollektivfreiheitsgrade die Wellenfunktion des Kerns nicht in der Form (11.2.2), sondern muß sie in folgender Form schreiben:

$$\Psi = R_{nl}(r)\,\Phi_{Jm}\,\varphi(\alpha_\mu);$$

dabei bedeutet $\varphi(\alpha_\mu)$ die Wellenfunktion für die Kollektivbewegung im Kern. Die im Abschn. 11.2. betrachteten Übergangswahrscheinlichkeiten müssen somit mit dem Faktor

$$F = |(\varphi_b(\alpha_\mu),\, \varphi_a(\alpha_\mu))|^2$$

multipliziert werden. Hierbei sind $\varphi_b(\alpha_\mu)$ und $\varphi_a(\alpha_\mu)$ die Wellenfunktionen für die Kollektivbewegung im Kern im Anfangs- bzw. Endzustand. Da diese Funktionen z. T. orthogonal sind, gilt $F < 1$. Bei wesentlicher Veränderung der Kollektivzustände (Veränderung der Gleichgewichtsform beim Übergang in einen anderen Einzelteilchenanregungszustand) kann der Faktor F die Übergangswahrscheinlichkeit für Einzelteilchenübergänge auf $^1/_{10} \cdots {}^1/_{100}$ verkleinern.[1])

In diesem Abschnitt interessieren wir uns nur für Übergänge, die mit Kollektivanregungen verknüpft sind.

Die allgemeinen Gln. (11.1.22) und (11.1.24), die die Emissionswahrscheinlichkeit für Multipolstrahlung der Ordnung 2^J bestimmen, lassen sich in folgender Form schreiben:

$$P(\lambda J) = 8\pi \frac{e^2}{\hbar} \frac{(J+1)\,k^{2J+1}}{J\,[(2J+1)!!]^2} B(\lambda J), \qquad \lambda = E,\, M. \tag{11.5.1}$$

Dabei drückt sich die reduzierte Übergangswahrscheinlichkeit für elektrische Multipolstrahlung durch den Operator des elektrischen Multipolmoments

$$\hat{Q}_{Jm} = 4\sqrt{\frac{\pi}{2J+1}} \sum_{\alpha=1}^{Z} r_\alpha^J Y_{Jm}(\vartheta_\alpha, \varphi_\alpha)$$

mit Hilfe der Beziehung

$$B(EJ) = \sum_{m,m_b} \left|\left(b\left|\sqrt{\frac{2J+1}{16\pi}}\, \hat{Q}_{Jm}\right|a\right)\right|^2 \tag{11.5.2}$$

aus. Die reduzierte Übergangswahrscheinlichkeit für magnetische Multipolstrahlung wird durch den Ausdruck

$$B(MJ) = \sum_{m,m_b} \left|\left(b\left|\frac{1}{e(J+1)} \frac{e\hbar}{2Mc} \vec{\hat{\mu}} \operatorname{rot}(r^J \hat{\mathfrak{L}} Y_{Jm})\right|a\right)\right|^2 \tag{11.5.3}$$

gegeben. Hierbei bedeutet $\vec{\hat{\mu}}$ den Operator des magnetischen Moments (ausgedrückt in Kernmagnetonen) im kombinierten Modell:

$$\vec{\hat{\mu}} = (g_\Omega - g_R)\,\hat{\Omega}\,\mathfrak{n} + g_R \hat{\mathfrak{J}}. \tag{11.5.4}$$

Die in (11.5.4) eingehenden Größen sind im Abschn. 4.8. definiert.

Zur Berechnung der reduzierten Übergangswahrscheinlichkeit für elektrische Multipolstrahlung, die den Kollektivfreiheitsgraden entspricht, drückt man das elektrische Multipolmoment in (11.5.2) durch das innere Multipolmoment $Q^0_{J\nu}$ aus. Es ergibt sich

$$\hat{Q}_{Jm} = \sum_\nu D^J_{m\nu}(\alpha, \beta, \gamma)\, Q^0_{J\nu}. \tag{11.5.5}$$

[1]) In einigen Fällen führt die Wechselwirkung zwischen den Einzelteilchenanregungen und der Kollektivbewegung zur Vergrößerung der Übergangswahrscheinlichkeit. Dies läßt sich durch eine Vergrößerung der effektiven Ladung des Nukleons erklären.

In gg-Kernen mit axialer Symmetrie entspricht den Kollektivanregungen eine Rotationsbande mit den Drehimpulsen $J = 0, 2, 4, 6, \ldots$ Die Parität dieser Rotationszustände ist in allen Fällen die gleiche. Der Kern kehrt über eine γ-Kaskade vom Typ $E2$ in den Grundzustand zurück. Magnetische Übergänge sind verboten.

Wir berechnen nun die reduzierte Übergangswahrscheinlichkeit für einen Übergang $J \to J + 2$ zwischen Zuständen mit den Wellenfunktionen

$$\psi_b = \sqrt{\frac{2J+5}{8\pi^2}}\, D^{J+2}_{m_b 0}(\alpha, \beta, \gamma) \quad \text{und} \quad \psi_a = \sqrt{\frac{2J+1}{8\pi^2}}\, D^{J}_{m_a 0}(\alpha, \beta, \gamma). \tag{11.5.6}$$

Setzt man (11.5.5) und (11.5.6) in (11.5.2) ein, so erhält man

$$B(E2) = \frac{5\,(2J+5)\,(2J+1)}{16\pi\,(8\pi^2)^2} \sum_{m, m_b} \left|\left(D^{J+2}_{m_b 0}, \sum_{\nu} D^2_{m\nu} D^J_{m_a 0}\right)\right|^2 Q^2_{20}. \tag{11.5.7}$$

Zur Berechnung dieses Ausdrucks benutzen wir die Gleichungen des Anhangs 1. Nach der Formel (A 1.5.11) gilt

$$\left(D^{J+2}_{m_b 0}, D^2_{m\nu} D^J_{m_a 0}\right) = \frac{8\pi^2}{(2J+5)} (2\,J\,m\,m_a \mid J+2, m_b)\,(2\,J\,0\,0 \mid J+2, 0)\,\delta_{\nu 0}. \tag{11.5.8}$$

Weiter erhält man mit Gl. (A 1.2.11)

$$\sum_{m, m_b} \left|(2\,J\,m\,m_a \mid J+2, m_b)\right|^2 = \frac{2J+5}{2J+1}. \tag{11.5.9}$$

Schließlich gilt

$$(2\,J\,0\,0 \mid J+2, 0)^2 = \frac{3\,(J+2)\,(J+1)}{2(2J+1)\,(2J+3)}. \tag{11.5.10}$$

Mit Hilfe der Beziehungen (11.5.8) bis (11.5.10) erhält man den endgültigen Ausdruck für die reduzierte Übergangswahrscheinlichkeit der elektrischen Quadrupolstrahlung bei Übergängen zwischen Rotationszuständen von gg-Kernen (die reduzierte Übergangswahrscheinlichkeit bezieht sich auf Absorption):

$$B(E2) = \frac{15\,(J+2)\,(J+1)}{32\pi\,(2J+1)\,(2J+3)}\, Q^2_{20} \qquad (J \to J+2). \tag{11.5.11}$$

Der elektrische Quadrupolübergang, der der Emission eines γ-Quants beim Übergang $J + 2 \to J$ entspricht, wird durch die reduzierte Übergangswahrscheinlichkeit

$$B(E2) = \frac{15\,(J+1)\,(J+2)}{32\pi\,(2J+3)\,(2J+5)}\, Q^2_{20} \qquad (J+2 \to J) \tag{11.5.11a}$$

charakterisiert. Da die Zahlen der möglichen Endzustände für die Übergänge $J \to J + 2$ und $J + 2 \to J$ verschieden sind, sind auch die ihnen entsprechenden reduzierten Übergangswahrscheinlichkeiten (11.5.11) und (11.5.11a) untereinander nicht gleich.

Für Kerne mit ungerader Massenzahl bilden die Rotationsniveaus eine Folge mit den Spins $J = K,\ K + 1,\ K + 2, \ldots$ und gleicher Parität.

Wir berechnen nun die Wahrscheinlichkeit für elektrische Quadrupolübergänge zwischen Zuständen mit den Wellenfunktionen

$$\psi_b = \sqrt{\frac{2J+3}{8\pi^2}}\, D^{J+1}_{m_b K}(\alpha, \beta, \gamma), \qquad \psi_a = \sqrt{\frac{2J+1}{8\pi^2}}\, D^{J}_{m_a K}(\alpha, \beta, \gamma).$$

Es gilt

$$B(E2) = \frac{5(2J+3)(2J+1)}{16\pi(8\pi^2)^2} \sum_{m, m_b} \left|\left(D^{J+1}_{m_b K} \sum_{\nu} D^2_{m\nu} D^J_{m_a K}\right) Q^0_{2\nu}\right|^2$$

und, da jetzt

$$(D^{J+1}_{m_b K}, D^2_{m\nu} D^J_{m_a K}) = \frac{8\pi^2}{2J+3} (2J\, m\, m_a \mid J+1, m_b)(2J\,0\,K \mid J+1, K)\,\delta_{\nu 0};$$

$$\sum_{m, m_b} |(2J\, m\, m_a \mid J+1, m_b)|^2 = \frac{2J+3}{2J+1},$$

$$(2J\,0\,K \mid J+1, K)^2 = \frac{3K^2(J-K+1)(J+K+1)}{J(2J+1)(J+1)(J+2)}$$

ist,

$$B(E2) = \frac{15K^2(J-K+1)(J+K+1)}{16\pi J(J+1)(J+2)(2J+1)} Q^2_{20} \qquad (J \to J+1). \qquad (11.5.12)$$

Bei der Ableitung von (11.5.12) haben wir angenommen, daß das äußere Nukleon seinen Bewegungszustand nicht verändert und keinen Beitrag zur Übergangswahrscheinlichkeit für die elektrische Quadrupolstrahlung liefert.

Die reduzierte Übergangswahrscheinlichkeit für Emission von elektrischer Quadrupolstrahlung beim Übergang $J+1 \to J$ wird

$$B(E2) = \frac{15K^2(J+1-K)(J+1+K)}{16\pi J(J+1)(2J+3)(J+2)} Q^2_{20} \qquad (J+1 \to J). \qquad (11.5.12\text{a})$$

Ebenso läßt sich die reduzierte Übergangswahrscheinlichkeit für elektrische Quadrupolstrahlung beim Übergang $J+2 \to J$ bestimmen:

$$B(E2) = \frac{15}{32\pi} Q^2_{20} \frac{(J+1-K)(J+1+K)(J+2-K)(J+2+K)}{(J+1)(J+2)(2J+3)(2J+5)}, \quad (J+2 \to J).$$

Bei Kernen mit ungerader Massenzahl kann bei $J+1 \to J$-Übergängen zwischen Rotationszuständen (ohne Paritätsänderung) auch magnetische Dipolstrahlung auftreten. Die reduzierte Übergangswahrscheinlichkeit für diesen Übergang ($M1$) ist unmittelbar mit dem Operator des magnetischen Moments

$$\hat{\vec{\mu}} = (g_\Omega - g_R)\,\hat{\Omega}\,\mathfrak{n} + g_R\,\hat{\mathfrak{J}}$$

verknüpft. Mit Hilfe dieses Operators wurde im Abschn. 4.8. das magnetische Moment für den Grundzustand des Kerns bestimmt.

Zur Berechnung der reduzierten Übergangswahrscheinlichkeit für $M1$-Strahlung berücksichtigen wir, daß in der langwelligen Näherung

$$\operatorname{rot}(r^J\, \mathfrak{L}\, Y_{Jm}) \approx i(J+1)\,\nabla\,(r^J\, Y_{Jm})$$

gilt. Damit folgt aus (11.5.3)

$$B(M1) = \sum_{m, m_b} \left| \left(b \left| \frac{\hbar}{2Mc} \vec{\mu} \nabla (r\, Y_{1m}) \right| a \right) \right|^2 . \qquad (11.5.13)$$

Nimmt man an, daß der Zustand eines axialsymmetrischen Kerns durch die Quantenzahlen J, M, K und Ω bestimmt wird, so folgt für den Übergang $J + 1 \to J$ bei K, $\Omega > {}^1/_2$ aus (11.5.13)

$$B(M1) = \frac{3}{4\pi} \left(\frac{\hbar}{2Mc} \right)^2 (g_\Omega - g_R)^2 \frac{\Omega^2 (J+1-K)(J+1+K)}{(J+1)(2J+3)} .$$

Für den Fall $K = \Omega = {}^1/_2$ erhält man für das Rotationsspektrum des Kerns und die Wahrscheinlichkeit für $M1$-Übergänge kompliziertere Formeln (vgl. [11,20]).

Bisher haben wir nur elektromagnetische Übergänge zwischen Zuständen einer Rotationsbande untersucht, d. h. Übergänge, bei denen sich die inneren Kernzustände nicht änderten. In axialsymmetrischen Kernen wird eine der Quantenzahlen, die den inneren Zustand des Kerns bestimmt, durch K gegeben. Diese Größe bestimmt die Projektion des Gesamtdrehimpulses auf die Symmetrieachse des Kerns. Die Erhaltung der Quantenzahl K bei elektromagnetischen Übergängen kann man als zusätzliche Auswahlregel betrachten. Im allgemeinen Fall — bei Berücksichtigung von Übergängen zwischen verschiedenen Rotationsbanden — muß die Änderung der Quantenzahl K bei Emission von Multipolstrahlung der Ordnung 2^J der Ungleichung

$$\Delta K \leqq J \qquad (11.5.14)$$

genügen. Übergänge, die dieser Ungleichung nicht genügen, werden als *K-verbotene Übergänge* bezeichnet. Dieses Verbot trägt keinen absoluten Charakter, da K nicht als strenge Quantenzahl anzusehen ist.

Die Möglichkeit einer Störung der Ungleichung (11.5.14) ist verknüpft mit der Tatsache, daß der reale Kernzustand $\psi_{\alpha JM}$ nicht als einfaches Produkt $D^J_{MK}\, \varphi_{\alpha K}$ anzusehen ist, sondern eine Superposition von Zuständen mit verschiedenen K darstellt:

$$\psi_{\alpha JM} = \sum_K a_K\, D^J_{MK}\, \varphi_{\alpha K} .$$

Für axialsymmetrische Kerne, die sich wesentlich von kugelförmigen Kernen unterscheiden, ist K als relativ gute Quantenzahl anzusehen. Daher besitzen K-verbotene Übergänge hier eine recht geringe Wahrscheinlichkeit. Zum Beispiel beträgt die Lebensdauer des angeregten Zustandes vom ^{180}Hf mit dem Spin $J = K = 9^-$ 5,5 h, obwohl ein elektrischer Dipolübergang ($E1$) auf das Rotationsniveau $J = 8^+$, $K = 0$ vor sich geht. Die kleine Wahrscheinlichkeit dieses Übergangs (der Verbotsfaktor ist von der Größenordnung 10^{-15}) hängt wahrscheinlich mit seinem K-Verbot zusammen. Das Niveau $J = 8^+$ ist im wesentlichen als ein Rotationsniveau mit $K = 0$ anzusehen und enthält nur eine sehr kleine Beimischung des Zustandes mit $K = 8^+$.

11.6. Winkelverteilung der Strahlung. Winkelkorrelationen bei Kaskadenübergängen

In allen vorangehenden Abschnitten dieses Kapitels interessierten wir uns nicht für die Winkelverteilung der Strahlung. Aus diesem Grund konnte bei der Ableitung der Grundformel für die Gesamtwahrscheinlichkeit der Strahlung über alle Emissionsrichtungen integriert werden. In diesem Abschnitt wollen wir nun auf die Winkelverteilung der Strahlung etwas näher eingehen.

Mit den Resultaten des Abschn. 11.1. läßt sich die Emissionswahrscheinlichkeit je Zeiteinheit für elektrische und magnetische Multipolstrahlung der Ordnung λJ in das Raumwinkelelement $d\Omega$ beim Kernübergang $a \to b$ folgendermaßen schreiben:

$$P_{ba}(\lambda J)\, d\Omega = \frac{\pi k}{2\hbar c^2} \sum_{p=1,\,-1} \Big| \sum_m i^J \sqrt{2J+1}\, D^J_{mp} \Big(b \,\Big|\, \int \mathfrak{A}_\lambda(J\,m)\, \mathfrak{j}\, d\tau \Big| a\Big) \Big|^2 d\Omega,$$

$$\lambda = E, M. \tag{11.6.1}$$

Verläuft der Übergang zwischen den Zuständen a und b mit den Quantenzahlen J_a, m_a und J_b, m_b, so bleibt in der Summe über m in (11.6.1) nur das Glied $m = m_b - m_a$ übrig. Es wird also

$$P_{ba}(\lambda\, J)\, d\Omega = F_{J,\, m_b - m_a}(\vartheta)\, G(J, J_a, J_b, m_a, m_b, \lambda)\, d\Omega \tag{11.6.2}$$

mit

$$G(J, J_a, J_b, m_a, m_b, \lambda) \equiv \frac{\pi k}{2\hbar c^2} (2J+1) \Big| \Big(b \,\Big|\, \int \mathfrak{A}_\lambda(J\,m)\, \mathfrak{j}\, d\tau \,\Big|\, a\Big) \Big|^2 \tag{11.6.3}$$

als Faktor, der von den Quantenzahlen J, J_a, J_b, m_a, m_b und vom Strahlungstyp abhängt. G ist ungleich Null, wenn die Quantenzahlen J, J_a, J_b den Auswahlregeln genügen, $m = m_b - m_a$ ist und der Strahlungstyp der entsprechenden Paritätsauswahlregel bei gegebenem J entspricht.

$$F_{Jm}(\vartheta) = \sum_{p=1,\,-1} |D^J_{mp}|^2 \tag{11.6.4}$$

bedeutet eine Funktion, die die Winkelabhängigkeit der Strahlung bestimmt. Aus (11.6.2) folgt unmittelbar, daß die Winkelverteilung der Strahlung von J und $m = m_b - m_a$ abhängt, nicht aber von λ, d. h. vom Charakter der Strahlung (elektrische oder magnetische).

Wir untersuchen die Eigenschaften der Funktion $F_{Jm}(\vartheta)$, die sich leicht aus (11.6.4) und den Eigenschaften der Funktionen D^J_{mp} ableiten lassen:

$$F_{Jm}(\vartheta) = F_{J,\,-m}(\vartheta), \tag{11.6.5a}$$

$$\int F_{Jm}(\vartheta)\, d\Omega \quad \text{hängt nicht von } m \text{ ab,} \tag{11.6.5b}$$

$$\sum_{m=-J}^{J} F_{Jm}(\vartheta) \quad \text{hängt nicht von } \vartheta \text{ ab.} \tag{11.6.5c}$$

Weiterhin läßt sich zeigen [11,22], daß

$$\sum_{m_a=-J_a}^{J_a} G(J, J_a, J_b, m_a, m_a + m) \text{ nicht von } m \text{ abhängt,} \tag{11.6.6a}$$

$$\sum_{m=-J}^{J} G(J, J_a, J_b, m_a, m_a + m) \text{ nicht von } m_a \text{ abhängt.} \tag{11.6.6b}$$

Aus der Invarianz von (11.6.4) gegen räumliche Inversion $F_{Jm}(\vartheta) = F_{Jm}(\pi - \vartheta)$ folgt, daß $F_{Jm}(\vartheta)$ eine gerade Funktion von $\cos\vartheta$ sein muß. Berücksichtigt man weiter die Eigenschaften der Funktionen D^J_{mp} (Anhang 1.5.), so läßt sich zeigen, daß sich $F_{Jm}(\vartheta)$ durch ein Polynom in $\cos^2\vartheta$ ausdrücken läßt, dessen Grad J beträgt. Aus diesem Grund kann man im allgemeinen Fall schreiben

$$F_{Jm}(\vartheta) = \sum_{k=0}^{J} a_k^{(m)} \cos^{2k}\vartheta.$$

Wir beweisen jetzt, daß die totale Übergangswahrscheinlichkeit aus dem Zustand J_a, m_a in alle Zustände J_b, m_b, die sich durch die Quantenzahlen m_b unterscheiden, nicht von der Quantenzahl m_a abhängt. Es ist

$$\sum_{m_b} \int P_{ba}\, d\Omega = \sum_{m_b} \int F_{J,\, m_b - m_a}(\vartheta)\, G(J, J_a, J_b, m_a, m_b, \lambda)\, d\Omega. \tag{11.6.7}$$

Da $m_b = m_a + m$ gilt, läßt sich bei festem m_a die Summe über m_b durch eine Summe über m ersetzen. Unter Benutzung von (11.6.5b) wird

$$\sum_{m_b} \int P_{ba}\, d\Omega = \sum_{m} \int F_{Jm}(\vartheta)\, G(J, J_a, J_b, m_a, m_a + m, \lambda)\, d\Omega =$$
$$= \text{const} \sum_{m=-J}^{J} G(J, J_a, J_b, m_a, m_a + m, \lambda).$$

Hieraus folgt wegen (11.6.6b) sofort die Richtigkeit der oben aufgestellten Behauptung.

Analog kann man beweisen, daß die totale Übergangswahrscheinlichkeit für alle Übergänge $m_a \to m_b$, die einem Wert $m = m_b - m_a$ entsprechen, nicht von m abhängt.

Schließlich ergibt sich nach (11.6.5c) und (11.6.6a), daß

$$\sum_{m_a,\, m_b} P_{ba} \text{ nicht von } \vartheta \text{ abhängt.} \tag{11.6.7a}$$

Befindet sich der Kern (Spin J_a) nicht unter dem Einfluß äußerer Felder, so ist sein angeregter Quantenzustand ein nach der Magnetquantenzahl m_a $(2J_a + 1)$-fach entarteter Zustand. Daher muß zur Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeit in den Grundzustand J_b über alle möglichen Zustände mit verschiedenem m_a gemittelt werden. Dann muß aber nach (11.6.7a) die Strahlung isotrop sein.

Bringt man jedoch den Kern in ein äußeres elektrisches oder magnetisches Feld (z. B. in das Feld eines Kristalls), so wird in diesem Feld die Entartung des angeregten Zustandes aufgehoben. Der Zustand spaltet in $(2J_a + 1)$

Komponenten im magnetischen Feld und in $(J_a + 1)$ Komponenten im elektrischen Feld auf. Bezeichnet man die Niveaubesetzung für Niveaus, die sich nur durch die Magnetquantenzahl m_a unterscheiden, mit $f(m_a)$, so wird bei unterschiedlicher Niveaubesetzung die Winkelverteilung der Strahlung nicht mehr isotrop sein.

Wir erläutern das Gesagte an einem einfachen Beispiel. Nimmt man an, daß elektrische oder magnetische Dipolstrahlung beim Übergang $1\,m_a \to 0\,0$ emittiert wird, so kann man nach dem Anhang 1 zeigen, daß die die Winkelverteilung der Dipolstrahlung bestimmende Funktion folgende Form besitzt:

$$F_{10}(\vartheta) = \sin^2\vartheta, \quad F_{1,\pm 1}(\vartheta) = \frac{1}{2}(1 + \cos^2\vartheta). \tag{11.6.8}$$

Dabei bedeutet ϑ den Winkel zwischen der Quantelungsachse z und der Emissionsrichtung. In diesem Fall wird die Winkelverteilung bis auf einen Faktor, der nicht von den Winkeln abhängt, durch die Funktion

$$W(\vartheta) = \sum_m f(m)\, F_{1m}(\vartheta) = f(0)\sin^2\vartheta + \frac{f(1) + f(-1)}{2}(1 + \cos^2\vartheta) \tag{11.6.8a}$$

gegeben. Im allgemeinen Fall bestimmt sich die Winkelverteilung für Multipolstrahlung der Ordnung 2^J beim Übergang $a \to b$ aus der Funktion

$$W(\vartheta) = \sum_{m_a,\, m_b} f(m_a)\, G(J, J_a, J_b, m_a, m_b, \lambda)\, F_{J,\, m_b - m_a}(\vartheta). \tag{11.6.9}$$

Sind die Größen $f(m_a)$, d. h. die Anfangsverteilungen der angeregten Zustände, bekannt, so lassen sich aus der Formel (11.6.9) an Hand der gemessenen Winkelverteilung prinzipiell J, J_a, J_b bestimmen. Enthält (11.6.9) mehrere Summanden, so läßt sich jedoch nur schwer eine eindeutige Bestimmung erreichen.

In starken Feldern (orientierte Kerne) lassen sich bei niedrigen Temperaturen verschiedene Besetzungen $f(m_a)$ der Anfangszustände herstellen. In diesem Fall kann man (11.6.9) bei der Analyse der Winkelabhängigkeit für die Absorption von elektromagnetischer Strahlung verwenden. Die Winkelverteilung der γ-Strahlung, die von orientierten Kernen emittiert wird, wurde in mehreren Arbeiten untersucht.

Von großem praktischem Interesse ist die Untersuchung der Winkelverteilung bei Kaskadenübergängen aus einem angeregten Zustand in den Grundzustand. In diesem Fall lassen sich durch Untersuchung der Winkelverteilung (mit Hilfe der Koinzidenzmethode) zweier aufeinanderfolgender Strahlungen die Grundcharakteristiken der Kernniveaus feststellen.

Die Theorie der Winkelkorrelationen für γ-Kaskaden wurde von Dolginow [11,23] entwickelt. Eine ausführliche Darstellung dieser Theorie findet man bei Biedenharn und Rose [11,24] oder Frauenfelder [11,25]. Hier wollen wir nur eine elementare Ableitung der wichtigsten Beziehungen an einem einfachen Beispiel wiedergeben.

Wir nehmen an, daß der Kern vom angeregten Zustand $a(J = 0)$ unter Emission eines Quants γ_1 in die Richtung $\mathfrak{k}_1$ in den Zwischenzustand $c(J = 1)$

übergeht und dann beim Übergang $c \to b(J = 0)$ ein Quant γ_2 emittiert. Weiterhin setzen wir voraus, daß der angeregte Zwischenzustand c eine genügend kleine Lebensdauer besitzt, so daß sich der Zwischenzustand im Verlaufe dieser Zeit nicht unter der Einwirkung äußerer Bedingungen ändert. Wir berechnen nun die Wahrscheinlichkeit $W(\vartheta)$ für die Emission des Quants γ_2 unter dem Winkel ϑ zur Richtung $\mathfrak{k}_1$. Die Quantelungsachse z wählen wir in der Emissionsrichtung von γ_1. Dann werden beim Übergang $a \to c$ die Niveaus m_c des Zwischenzustandes mit der relativen Wahrscheinlichkeit $f(m_c)$ besetzt, die sich aus der Winkelverteilungsfunktion für Dipolstrahlung (11.6.8) mit $\vartheta = 0$ ergibt:

$$f(m_c) = F_{1m_c}(0). \tag{11.6.10}$$

Das Zwischenniveau mit $m_c = 0$ wird also nicht angeregt, während die Zwischenniveaus mit $m_c = \pm 1$ mit gleicher Wahrscheinlichkeit angeregt werden.

Setzt man (11.6.10) in (11.6.8a) ein, so erhält man folgenden Ausdruck für die Korrelationsfunktion zweier aufeinanderfolgender Strahlungen γ_1 und γ_2:

$$W_{\gamma\gamma}(\vartheta) = \sum_{m_c} F_{1m_c}(0)\, F_{1m_c}(\vartheta) = \frac{1}{2}(1 + \cos^2\vartheta). \tag{11.6.11}$$

Dem ersten Übergang $a \to c$ kann ein Absorptionsprozeß entsprechen. Dann bestimmt die Formel (11.6.11) beim umgekehrten Übergang $c \to a$ die Winkelverteilung der in Resonanz gestreuten γ-Strahlung.

Würde der Übergang $a(J = 0) \to c(J = 1)$ durch Emission (oder Absorption) eines Teilchens mit dem Spin 0 (z. B. eines α-Teilchens) vor sich gehen, so wäre die Winkelverteilungsfunktion bei Emission eines Teilchens mit dem Bahndrehimpuls L durch gewöhnliche Kugelfunktionen gegeben:

$$F_{LM}(\vartheta) = |Y_{LM}(\vartheta, \varphi)|^2 \quad \text{für } \alpha\text{-Teilchen.}$$

Aus diesem Grund wird die Winkelkorrelation zwischen der Emissionsrichtung eines spinlosen Teilchens und der Emissionsrichtung des nachfolgenden γ-Quants für den oben untersuchten Übergang $a \to c \to b$ durch die Funktion

$$W_{\alpha\gamma}(\vartheta) \approx \sum_{m_c} |Y_{Lm_c}(0)|^2\, F_{1m_c}(\vartheta) = \sin^2\vartheta$$

gegeben.

Im allgemeinen Fall kann die Korrelationsfunktion für zwei aufeinanderfolgende γ-Strahlungen bei Übergängen zwischen Niveaus $J_a m_a \to J_c m_c \to J_b m_b$ in folgender Form geschrieben werden:

$$W_{\gamma\gamma}(\vartheta) = \sum_{m_c} \Big\{\sum_{m_a} F_{J, m_c - m_a}(0)\, G(J, J_a, J_c, m_a, m_c) \times \\ \times \sum_{m_b} F_{J', m_b - m_c}(\vartheta)\, G(J', J_c, J_b, m_c, m_b)\Big\}. \tag{11.6.12}$$

Die erste Summe über m_a in (11.6.12) bestimmt die Anregungswahrscheinlichkeit der Zwischenniveaus mit m_c bei Emission des ersten γ-Quants in Richtung der z-Achse. Die zweite Summe bestimmt die Winkelverteilung der folgenden γ-Strahlung γ_2, die durch die nicht gleichwahrscheinliche Anregung der Zwischenniveaus mit m_c bei Emission des Quants γ_1 bedingt ist.

Die Beziehung (11.6.12) für die Winkelkorrelation zweier aufeinanderfolgender γ-Quanten eines Kaskadenübergangs ist gültig, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind: *1.* Der Zwischenzustand c ist nicht durch die Anwesenheit eines äußeren Feldes gestört (keine Einwirkung der Elektronenwolke); *2.* die Unterniveaus m_a und m_b im Anfangs- und Endzustand sind mit gleicher Wahrscheinlichkeit besetzt; *3.* die Übergänge $a \to c$ und $c \to b$ werden nur durch γ-Strahlung begleitet; *4.* die Detektoren, die beide Strahlungen registrieren, sind in bezug auf Polarisation der γ-Quanten unempfindlich.

Bei Erfüllung dieser Bedingungen läßt sich die Korrelationsfunktion (11.6.12) für zwei aufeinanderfolgende γ-Strahlungen als Polynom in $\cos^2\vartheta$ schreiben:

$$W_{\gamma\gamma}(\vartheta) = \sum_{l=0}^{L} a_l \cos^{2l}\vartheta. \qquad (11.6.12\text{a})$$

Hierbei nimmt l alle ganzzahligen Werte von 0 bis L an; L ist die kleinste der Zahlen J, J' und J_c, die die von den beiden Photonen weggetragenen Drehimpulse (J, J') und den Spin des Zwischenniveaus (J_c) bedeuten.

Ist der Spin des Zwischenzustandes gleich 0 oder $^1/_2$, so hängt $W_{\gamma\gamma}(\vartheta)$ nicht von ϑ ab. Die Anwesenheit des Gliedes $\cos^{2L}\vartheta$ deutet darauf hin, daß der Zwischenzustand und jede der beiden γ-Strahlungen einen Drehimpuls nicht kleiner als L besitzen. Man muß jedoch berücksichtigen, daß die hier angegebenen Formeln sich auf Winkel im Schwerpunktsystem beziehen.

Da (11.6.12a) nur die relative Emissionswahrscheinlichkeit in der gegebenen Richtung bestimmt, wird meist $a_0 = 1$ gesetzt. Zahlenwerte für die Koeffizienten a_2 und a_4 unter verschiedenen Bedingungen wurden von HAMILTON [11,26] und FALKOFF [11,27] angegeben.

Aus der Untersuchung der Winkelkorrelation von γ-Strahlung bei Kaskadenübergängen kann man die relative Intensität einiger Multipolstrahlungen bestimmen [11,28], wenn sie sich auf nur einen Übergang beziehen (z. B. $E2$ und $M1$).

11.7. Neutroneneinfang durch Protonen. Photospaltung des Deuterons

Ein Deuteron kann sich beim Einfang eines langsamen Neutrons durch ein Proton bei gleichzeitiger γ-Emission bilden. Die Wechselwirkung des langsamen Neutrons mit dem Proton erfolgt nur im S-Zustand. Daher muß dem Anfangsstadium der Deuteronenbildung ein Zustand mit dem Bahndrehimpuls 0 zugeordnet sein. Im System (n, p) gibt es nur zwei Zustände dieser Art: ^1S und ^3S. Der uns interessierende Zustand besteht aus dem Deuteron (Zustand ^3S) und einem γ-Quant.

Beide Übergänge ${}^1S(\mathrm{p\,n}) \to {}^3S(\mathrm{d})$ und ${}^3S(\mathrm{p\,n}) \to {}^3S(\mathrm{d})$ können durch magnetische Dipolstrahlung ($\Delta J = 1$, Parität ändert sich nicht) begleitet werden. Da in beiden Fällen der Bahndrehimpuls von Anfangs- und Endzustand gleich Null ist, kann ein solcher Übergang nur durch einen Wechselwirkungsoperator, der die Spins der Nukleonen enthält, hervorgerufen werden. Ein derartiger Operator besitzt, wie schon im Abschn. 11.2. bemerkt wurde, von Null verschiedene Matrixelemente nur für Zustände, die einer Änderung der Spinorientierung für eines der Nukleonen entsprechen. Aus diesem Grund kann der Nukleoneneinfang mit gleichzeitiger Photonenemission vom Typ $M1$ nur beim Übergang ${}^1S \to {}^3S$ vor sich gehen.

Die Berechnung des effektiven Einfangquerschnitts bei Emission von magnetischer Dipolstrahlung wird in der Näherung mit der Reichweite 0 der Kernkräfte vorkommen.

Die Wellenfunktion des Anfangszustandes muß die Wellenfunktion für einen S-Zustand im kontinuierlichen Spektrum sein. Sie läßt sich in der Form

$$\Phi_a = \frac{R_s(r)}{k r} \chi_0 \tag{11.7.1}$$

schreiben. Dabei ist k die Wellenzahl, die der relativen Energie von Proton und Neutron $\varepsilon = \hbar^2 k^2/M$ entspricht. M bedeutet die Nukleonenmasse und λ_0 die Spinwellenfunktion im Singulettzustand. Bei Nullreichweite der Kernkräfte gilt

$$R_s(r) = \sin(k r + \delta) \tag{11.7.1a}$$

mit δ als Phasenverschiebung, die sich in dieser Näherung durch die Streulänge im Singulettzustand a_s über die Formel (s. Abschn. 7.5.)

$$k \cot\delta = -\frac{1}{a_s} \tag{11.7.2}$$

ausdrücken läßt. Die Wellenfunktion des Endzustandes bei Nullreichweite der Kernkräfte besitzt die Form

$$\Phi_b = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{R_t(r)}{r} \chi_1 \tag{11.7.3}$$

mit χ_1 als Spinfunktion im Triplettspinzustand. Der Radialteil lautet

$$R_t(r) = \sqrt{2\beta}\, e^{-\beta r}, \tag{11.7.3a}$$

wobei der Parameter β aus der Bindungsenergie des Deuterons E_{d} bestimmt werden kann:

$$\frac{\hbar^2 \beta^2}{M} = E_{\mathrm{d}}.$$

Die Emissionswahrscheinlichkeit je Sekunde für magnetische Dipolstrahlung lautet nach (11.1.24) und (11.1.24a)

$$P(M1) = \frac{16}{9} \frac{\pi e^2}{\hbar} \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 B(M1), \quad \omega = \frac{\hbar(k^2 + \beta^2)}{M} \tag{11.7.4}$$

mit der reduzierten Übergangswahrscheinlichkeit

$$B(M1) = \sum_{m, m_b} |(\Phi_b| \frac{1}{2ec} \int r \hat{\mathfrak{L}} Y_{1m} \mathfrak{j}\, d\tau \,|\Phi_a)|^2. \tag{11.7.4a}$$

In unserem Fall ist für die Stromdichte folgender Ausdruck zu wählen:

$$\mathfrak{j} = \frac{e\hbar}{2M} \operatorname{rot} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{2} \hat{\mu}_\alpha \vec{\sigma}_\alpha \, \delta(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_\alpha) \right\}. \tag{11.7.5}$$

Setzt man (11.7.5) in (11.7.4a) ein und integriert partiell unter Berücksichtigung der Relation

$$\operatorname{rot}(r \hat{\mathfrak{L}} Y_{1m}) \approx 2i \nabla (r Y_{1m}) = 2i \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \nabla r_m,$$

wobei

$$r_0 = z, \qquad r_{\pm 1} = \frac{x \pm i y}{\sqrt{2}}$$

sind, so erhält man

$$B(M1) = \frac{3}{4\pi} \sum_{m, m_b} |(\Phi_b| \frac{\hbar}{2Mc} (\mu_p \vec{\sigma}_p + \mu_n \vec{\sigma}_n) \nabla r_m |\Phi_a)|^2. \tag{11.7.5a}$$

Das in diesen Ausdruck eingehende magnetische Moment stellen wir in folgender Form dar:

$$\mu_p \vec{\sigma}_p - \mu_n \vec{\sigma}_n = \frac{1}{2} (\mu_p + \mu_n)(\vec{\sigma}_p + \vec{\sigma}_n) + \frac{1}{2} (\mu_n - \mu_p)(\vec{\sigma}_n - \vec{\sigma}_p).$$

Es läßt sich zeigen, daß nur der zweite Summand einen Beitrag zur reduzierten Übergangswahrscheinlichkeit liefert. Dabei entsprechen den verschiedenen Quantenzahlen $m = 0, \pm 1$ gleiche Quadrate der Matrixelemente, und man erhält nach Einsetzen von (11.7.1) und (11.7.3) in (11.7.5a)

$$B(M1) = \frac{9\pi\hbar^2}{4M^2c^2} \frac{(\mu_n - \mu_p)^2}{k^2} \left| \int_0^\infty R_t R_s \, dr \right|^2.$$

Um den Einfangquerschnitt für den Strahlungseinfang eines Neutrons durch ein Proton zu berechnen, ist der Ausdruck für die Übergangswahrscheinlichkeit (11.7.4) durch die Dichte des einfallenden Neutronenflusses zu dividieren. Bei der Normierung der Wellenfunktion (11.7.1) wird die Flußdichte gleich der Relativgeschwindigkeit $v = 2\hbar k/M$. Außerdem ist zu berücksichtigen, daß im Neutronenfluß nur jedes vierte Neutron einen dem Protonenspin entgegengesetzten Spin besitzt. Infolgedessen wird

$$\sigma(M1) = \frac{P(M1)}{4v} = \frac{\pi e^2 \hbar^3}{2M^4 c^5} \left(\frac{k^2 + \beta^2}{k} \right)^3 (\mu_n - \mu_p)^2 \left| \int_0^\infty R_t R_s \, dr \right|^2. \tag{11.7.6}$$

Mit (11.7.1a), (11.7.3a) und (11.7.2) läßt sich leicht

$$\int_0^\infty R_t R_s \, dr = \sqrt{2\beta} \, \frac{k \cos\delta + \beta \sin\delta}{k^2 + \beta^2} = \frac{(\beta a_s - 1) k \sqrt{2\beta}}{(k^2 + \beta^2)\sqrt{a_s^2 k^2 + 1}}$$

zeigen. Setzt man dies in (11.7.6) ein, so folgt

$$\sigma_c(M1) = \frac{\pi e^2 \hbar^3}{M^4 c^5} \frac{(k^2+\beta^2)}{a_s^2 k^2 + 1} \frac{(\mu_n - \mu_p)^2}{k} \beta(\beta a_s - 1)^2. \qquad (11.7.7)$$

Im Grenzfall kleiner Energien ($\beta^2 \gg k^2$, $a_s^2 k^2 \ll 1$) nimmt der Wirkungsquerschnitt für den Strahlungseinfang eines Neutrons durch ein Proton folgende einfache Form an:

$$\sigma_c(M1) = 2\pi \frac{e^2}{\hbar c} \left(\frac{\hbar}{M c}\right)^2 \frac{E d}{Mc^2} \frac{(\beta a_s - 1)^2}{k} \beta(\mu_n - \mu_p)^2, \quad k^2 \ll \beta^2. \qquad (11.7.7a)$$

Die Gl. (11.7.7) zeigt, daß der Wirkungsquerschnitt für den Strahlungseinfang der Neutronengeschwindigkeit umgekehrt und dem Quadrat der Differenz zwischen den magnetischen Momenten des Neutrons und des Protons direkt proportional ist. Wären beide Momente gleich, so würde der Wirkungsquerschnitt Null betragen. Die Größe des Wirkungsquerschnitts hängt stark vom Vorzeichen der Streulänge im Singulettzustand ab. Historisch diente die Messung des Wirkungsquerschnitts für den Neutroneneinfang durch ein Proton [11,29] als erster Hinweis auf das negative Vorzeichen der Streulänge im Singulettzustand.

Da Anfangs- und Endzustand beim Neutroneneinfang durch ein Proton S-Zustände sind, muß die Winkelverteilung der emittierten γ-Quanten kugelsymmetrisch sein.

Wir gehen nun zur Untersuchung der umgekehrten Reaktion — der Photospaltung des Deuterons — über. Dieser Prozeß kann bei Absorption von γ-Quanten mit größerer Energie als der Bindungsenergie des Deuterons vor sich gehen. Die Hauptrolle bei der Photospaltung spielen die elektrische und magnetische Dipolstrahlung.

Bei der Absorption von magnetischer Dipolstrahlung geht das Deuteron aus dem gebundenen Zustand ^3S in den Zustand ^1S über, der zum kontinuierlichen Spektrum gehört. Dieser Prozeß ist dem oben betrachteten Strahlungsprozeß bei Emission eines $M1$-Quants genau entgegengesetzt. Daher kann sein Wirkungsquerschnitt mit Hilfe des Reziprozitätssatzes (Abschn. 8.3.) bestimmt werden.

Die Winkelverteilung der Spaltprodukte bei Photospaltung durch magnetische Dipolstrahlung ist genau wie die γ-Quanten-Verteilung bei der direkten Reaktion kugelsymmetrisch. Daher läßt sich der Reziprozitätssatz für die integralen Wirkungsquerschnitte anwenden. Die Wechselwirkung mit dem elektromagnetischen Feld wird durch eine Kopplungskonstante $e^2/\hbar c = 1/137$ charakterisiert. Aus diesem Grund geht der Reziprozitätssatz in den Satz vom detaillierten Gleichgewicht über und kann in folgender Form geschrieben werden:

$$v \varrho_f \sigma_c = c \varrho_c \sigma_f. \qquad (11.7.8)$$

Dabei bedeuten v die Relativgeschwindigkeit von Neutron und Proton und c die Lichtgeschwindigkeit. Die Größe

$$\varrho_f = \frac{4\pi p^2}{(2\pi\hbar)^3 \dfrac{d\varepsilon}{dp}} = \frac{k^2}{2\pi^2 \hbar v}$$

bedeutet die Dichte der Endzustände (je Einheitsenergieintervall) für die Photospaltung des Deuterons und

$$\varrho_c = 2\,\frac{4\pi p^2}{(2\pi\hbar)^3 \dfrac{d\varepsilon}{dp}} = \frac{\left(\dfrac{\omega}{c}\right)^2}{\pi^2 \hbar c}$$

die Dichte der Endzustände (je Einheitsenergieintervall) für den Neutroneneinfang durch ein Proton bei gleichzeitiger Emission eines γ-Quants.

Setzt man dies sowie den Wert der Frequenz $\omega = \hbar(k^2 + \beta^2)/M$ in (11.7.8) ein und benutzt (11.7.7), so erhält man

$$\sigma_f(M1) = \frac{k^2}{2\left(\dfrac{\omega}{c}\right)^2}\,\sigma_c = \frac{\pi}{2}\,\frac{e^2}{\hbar c}\left(\frac{\hbar}{Mc}\right)^2 \frac{\beta k(\beta a_s - 1)^2}{(k^2+\beta^2)(a_s^2 k^2 + 1)}(\mu_n - \mu_p)^2. \quad (11.7.9)$$

In der Nähe der Schwellenenergie wird σ_f proportional k, d. h. proportional der Wurzel aus der Energie von Neutron und Proton $(\hbar\omega - E_d)$. Mit wachsendem k nimmt der Wirkungsquerschnitt schließlich ein Maximum bei $k^2 = 1/a_s^2$, d. h. bei der Energie, die dem virtuellen Niveau des Systems (n, p) im Singulettzustand entspricht, an und fällt dann sehr schnell, zunächst wie k^{-1} und bei $k^2 > \beta^2$ wie k^{-3}, wieder ab.

Wir berechnen noch den Wirkungsquerschnitt für die Photospaltung des Deuterons bei Absorption von elektrischer Dipolstrahlung. Dabei ändert sich der Spinzustand nicht, während sich die Quantenzahl des Bahndrehimpulses um eine Einheit ändert. Folglich muß der Endzustand ein ^3P-Zustand sein. Ist die Energie des absorbierten γ-Quants nicht sehr groß, so daß die Wellenlänge der Relativbewegung von Proton und Neutron groß gegen die Reichweite der Kernkräfte ist, dann kann man die Wellenfunktion des ^3P-Zustandes gleich der Wellenfunktion der freien Bewegung annehmen und für die Wellenfunktion im Grundzustand des Deuterons den Ausdruck

$$\Phi_a = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\,\frac{R_t(r)}{r}\,\chi_1 \quad (11.7.10)$$

benutzen. Diese Wellenfunktion entspricht der Nullreichweite der Kernkräfte.

Liegt die z-Achse des Koordinatensystems in der Ausbreitungsrichtung der γ-Quanten, so ist die Wellenfunktion des P-Zustandes gleich dem Glied in der Zerlegung einer ebenen, sich unter den Winkeln Θ, Φ (Emissionsrichtung von Neutron und Proton) ausbreitenden Welle, das die Kugelfunktion Y_{1m} enthält. Beachtet man daher die Beziehung (A 1.1.4a) des Anhangs, so läßt sich für die Wellenfunktion des Endzustandes schreiben

$$\Phi_b = 4\pi i\, j_1(kr) \sum_{m'} Y^*_{1m'}(\Theta, \Phi)\, Y_{1m'}(\vartheta, \varphi) =$$

$$= \frac{4\pi i}{kr}\left(\frac{\sin kr}{kr} - \cos kr\right) \sum_{m'} Y^*_{1m'}(\Theta, \Phi)\, Y_{1m'}(\vartheta, \varphi). \quad (11.7.11)$$

Benutzt man weiterhin die allgemeinen Beziehungen für elektrische Multipolstrahlung (11.1.22) und (11.1.25), so wird der differentielle Wirkungsquerschnitt für den Strahlungseinfang mit $E1$-Emission

$$d\sigma_c = \sigma_c(E1)\,\frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{e^2}{9\hbar v}\left(\frac{\omega}{c}\right)^3 \sum_{m,\,m_b} \left|(\Phi_b|r\,Y_{1m}(\vartheta,\varphi)\,|\,\Phi_a)\right|^2 d\Omega .$$

Damit erhält man für den Wirkungsquerschnitt für den Zerfall des Deuterons bei der Absorption von elektrischer Dipolstrahlung mit Hilfe von (11.7.8) mit $v = 2\hbar\, k/M$

$$d\sigma_f(E1) = \frac{1}{2}\,\frac{k^2}{2\left(\frac{\omega}{c}\right)^2}\,d\sigma_c(E1) = \frac{1}{36}\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)\frac{M\,\omega\,k}{\hbar}\sum_{m,\,m_b}\left|(\Phi_b|r\,Y_{1m}|\,\Phi_a)\right|^2 d\Omega . \tag{11.7.12}$$

Um die endgültige Größe des differentiellen Wirkungsquerschnitts $d\sigma_f$ berechnen zu können, ist noch das in (11.7.12) eingehende Matrixelement zu bestimmen. Berücksichtigt man, daß für die einfallende γ-Strahlung $m = \pm 1$ gilt, so erhält man unter Benutzung von (11.7.10) und (11.7.11)

$$\sum_{m,\,m_b}\left|(\Phi_b|\,r\,Y_{1m}\,|\,\Phi_a)\right|^2 = \frac{24\,k^2\,\beta}{(\beta^2+k^2)^4}\sin^2\Theta$$

und damit

$$d\sigma_f(E1) = \frac{2}{3}\,\frac{e^2}{\hbar c}\,\beta\left(\frac{k}{\beta^2+k^2}\right)^3 \sin^2\Theta\, d\Omega . \tag{11.7.12a}$$

In der Nähe der Schwellenenergie ($k \ll \beta$) wächst $d\sigma_f(E1)$ mit der Energie wie $k^3 \approx (\hbar\,\omega - E_\text{d})^{3/2}$, nimmt bei $k = \beta$, d.h. bei der Energie $\hbar\,\omega = 2\hbar^2\beta^2/M = 2E_\text{d}$, ein Maximum an und wird dann wieder kleiner.

Zum Unterschied von der kugelsymmetrischen Verteilung der Spaltprodukte bei der Spaltung durch magnetische Strahlung wird der Wirkungsquerschnitt (11.7.12a) durch eine Anisotropie charakterisiert, die durch $\sin^2\Theta$ gegeben wird. Dabei bedeutet Θ den Winkel zwischen der Emissionsrichtung von Neutron und Proton und der Einfallsrichtung der γ-Quanten.

Das Maximum im Wirkungsquerschnitt bei einer Photonenenergie gleich der doppelten Schwellenenergie trägt keinen Resonanzcharakter.

Das Maximum bei $k = \beta$ entspricht dem wahrscheinlichsten Wert des Relativimpulses von Neutron und Proton im Deuteron in einem Zustand, der durch die Wellenfunktion (11.7.10) beschrieben wird.

Die elektrische und magnetische Photospaltung kann experimentell durch die Winkelverteilung der Spaltprodukte unterschieden werden. Bei Energien $\hbar\omega$ in der Nähe der Schwellenenergie herrscht die magnetische Dipolspaltung vor, bei Energien mit $k^2 \gg \beta^2$ umgekehrt die elektrische Dipolspaltung. Es gilt

$$\frac{\sigma_f(M1)}{\sigma_f(E1)} \sim \left(\frac{\hbar}{Mc}\right)^2 \frac{\beta\,a_s - 1}{a_s^2}\,(\mu_\text{n} - \mu_\text{p})^2 .$$

Man muß natürlich beachten, daß bei Energien $\hbar\,\omega > \approx 10\,\text{MeV}$ das Verhalten der Wellenfunktion im Gebiet der Reichweite der Kernkräfte an Bedeutung gewinnt. Die Rolle der elektrischen Quadrupolstrahlung nimmt zu, und bei der Berechnung der Absorption von magnetischer Strahlung können

Korrektionen notwendig werden, die mit Mesonenströmen zusammenhängen. Die Vielzahl der Versuche, die Theorie auch in dieses Energiegebiet auszudehnen, ist auf konkrete Annahmen über die Kernkräfte zwischen Proton und Neutron begründet.

11.8. Strahlungseinfang von Nukleonen durch Kerne

Die Anregung eines Kerns mit nachfolgender γ-Emission kann bei Neutronen-, Protonen- und α-Teilchen-Einfang mit Resonanzcharakter vonstatten gehen. Die (n, γ)-Reaktionen verlaufen bei kleinen Neutronenenergien am effektivsten. (p, γ)- und (α, γ)-Reaktionen werden in einem Energiegebiet beobachtet, das von der Seite kleiner Energien her durch die Bedingung begrenzt ist, daß das Teilchen noch durch den COULOMB-Wall hindurchdringen kann. Von der Seite hoher Energien besteht die Beschränkung, daß die Anregungsenergie nicht für die Neutronenemission ausreichend sein darf. Außerdem wird eine obere Schranke für die Energie der einfallenden Teilchen durch die Bedingung für die Auflösung der Resonanzen gegeben. Der Deuteronen- oder Tritoneneinfang führt meist auf so hohe Anregungsenergien, daß Nukleonen und nicht γ-Quanten emittiert werden.

Die Untersuchung der γ-Strahlung beim Strahlungseinfang läßt Rückschlüsse über die Eigenschaften der Energieniveaus (Spin, Parität und Isospin) zu. Umfassende Angaben kann man erhalten, wenn gleichzeitig neben dem Strahlungseinfang auch unelastische Streuprozesse untersucht werden.

Beim Strahlungseinfang von Neutronen durch ug-Kerne bilden sich uu-Kerne, die mit Ausnahme von ^{2}H, ^{6}Li, ^{10}B, ^{14}N, ^{50}V und ^{176}Lu radioaktiv sind. Die Energieniveaus von uu-Kernen besitzen interessante Besonderheiten. In letzter Zeit wurden die Energieniveaus dieser Kerne von GROSCHEW und DEMIDOW [11,30] untersucht. Bei der Interpretation der experimentellen Werte gingen diese Autoren von der Annahme aus, daß die niedrig angeregten Zustände der uu-Kerne durch die Zustände des ungeraden Neutrons und des ungeraden Protons bestimmt werden. Nimmt man an, daß der Gesamtdrehimpuls des Neutrons j_n und des Protons j_p in diesen Kernen erhalten bleibt, so kann der Gesamtdrehimpuls des Kerns in Übereinstimmung mit dem Vektoradditionsgesetz verschiedene Werte annehmen:

$$|j_p - j_n| \leqq J \leqq j_p + j_n. \tag{11.8.1}$$

Alle Zustände mit verschiedenem J aus (11.8.1) besitzen gleiche Parität und können sich auf Grund der Wechselwirkung zwischen den Nukleonen in der Energie unterscheiden. Es ist zu erwarten, daß der Energieunterschied dieser Zustände klein ist, wenn die Bahndrehimpulse der ungeraden Nukleonen voneinander verschieden sind, aber wesentlich größer sein wird, wenn die Bahndrehimpulse gleich sind. Die Gesamtheit der Energiezustände mit verschiedenem J bei gegebenem j_n und j_p wurde von GROSCHEW und DEMIDOW als *Kernmultiplett* bezeichnet.

Besitzen Proton oder Neutron im uu-Kern den Bahndrehimpuls $^1/_2$, so müssen Grundzustand und erster angeregter Zustand ein Kerndublett bilden. Ein derartiges Dublett ist im ^{28}Al-Kern deutlich ausgeprägt. In diesem

Kern befinden sich Proton und Neutron in den Zuständen $d_{5/2}$ bzw. $s_{1/2}$. Der Grundzustand des Kerns ^{28}Al besitzt den Spin 3 und gerade Parität. Der erste angeregte Zustand befindet sich 29 keV über dem Grundzustand, besitzt den Spin 2 und gerade Parität. Der nächste angeregte Zustand besitzt eine Energie von 970 keV. Ein ähnliches Dublett existiert beim Phosphor ^{32}P (Nukleonenzustände $s_{1/2}$ und $d_{3/2}$). Der Grundzustand und der erste angeregte Zustand in diesem Kern unterscheiden sich um 77 keV und werden durch Spin und Parität 1^+ bzw. 2^+ charakterisiert. Der nächste angeregte Zustand befindet sich bei 570 keV.

Betragen die Drehimpulse vom ungeraden Proton und ungeraden Neutron $^3/_2$ oder sind sie noch größer, so werden Multipletts höherer Ordnung beobachtet, die besonders gut ausgeprägt in Kernen sind, in denen das ungerade Proton und ungerade Neutron durch verschiedene l charakterisiert werden. Dann ist die Wechselwirkung zwischen Neutron und Proton nicht sehr groß, und die Aufspaltung übersteigt nicht den Abstand zwischen Niveaus anderer Anregungstypen.

Bei der Untersuchung der γ-Strahlung nach dem Neutroneneinfang kann man die Parameter der Resonanzniveaus bestimmen. Diese entsprechen Anregungsenergien des Kerns von 6 · · · 7 MeV. So wurden z. B. durch Untersuchung der relativen Anzahl von γ-Quanten als Funktion der Neutronenenergie in der Arbeit [11,31] der Wirkungsquerschnitt für den Einfang und die Lage der Resonanzen im Einfangquerschnitt gemessen. Man zeigte, daß diese Methode für die Bestimmung der Parameter in der BREIT-WIGNER-Formel empfindlicher ist als die Methoden, die sich auf die Untersuchung von Streuungen oder Schwächungen des Neutronenflusses beim Durchgang durch die untersuchte Substanz (vgl. Abschn. 8.8.) stützen. Besonders vorteilhaft kann diese Methode zur Feststellung von Einfangniveaus bei relativ hohen Energien angewendet werden, wenn die Einfangwahrscheinlichkeit klein wird.

Der Kern, der sich beim Einfang eines langsamen Neutrons bildet, geht durch Emission einer Kaskade von γ-Quanten in den Grundzustand über. Von leichten Kernen mit geringer Anzahl angeregter Niveaus wird meist nur ein Quant emittiert, das dem Übergang in den Grundzustand entspricht. In schwereren Kernen kann der Übergang in den Grundzustand sowohl unmittelbar als auch über eine Reihe von aufeinanderfolgenden Übergängen vor sich gehen. Die größte Energie der γ-Quanten ist (bis auf kleine Korrektionen durch die Rückstoßenergie) gleich der Bindungsenergie des Neutrons im Targetkern. Die Tab. 29 zeigt verschiedene Werte der γ-Quantenenergie für Übergänge in den Grundzustand für einige leichte Kerne beim Neutroneneinfang.

Tabelle 29

Kern	ε_γ [MeV]	Kern	ε_γ [MeV]
^{2}H	2,230	^{13}C	4,949
^{3}H	6,251	^{15}N	10,832
^{10}Li	6,816	^{20}F	6,63

Beim Neutroneneinfang durch mittelschwere und schwere Kerne wird eine große Anzahl von γ-Quanten emittiert. Daher besitzt ihr Spektrum eine komplizierte, schlecht auflösbare Struktur. Die Form des γ-Spektrums hängt von der relativen Übergangswahrscheinlichkeit zwischen den verschiedenen Kernniveaus, von der Zahl und von der Lage der Niveaus ab.

Untersuchungen der Einfangspektren sind von großem Interesse, da sie die Lage und die Hauptcharakteristiken der Kernniveaus festzustellen gestatten. Eine Untersuchung der Einfangspektren beim Einfang langsamer Neutronen wurde in letzter Zeit von Kinsey und Mitarb. [11,32; 11,33] sowie von Groschew und Estulin und Mitarb. [11,34–11,37] durchgeführt. Zur Messung der γ-Spektren verwendeten Kinsey und Mitarb. ein magnetisches Paarspektrometer, das die durch die γ-Quanten gebildeten Elektronen-Positronen-Paare analysiert. Es wurden γ-Strahlen mit Energien größer als 3 MeV untersucht. Groschew und Mitarb. benutzten zur Energie- und Intensitätsmessung der γ-Strahlung ein magnetisches Compton-Spektrometer. Die Messungen an der γ-Strahlung ließen sich dabei in einem Energiegebiet von 0,3 $\cdots$ 12 MeV vornehmen. Estulin und Mitarb. benutzten ein Einkristall-Lumineszenzspektrometer für das Energieintervall 50 $\cdots$ 500 keV.

Bei der Untersuchung von γ-Strahlung der (n, γ)-Reaktion mit langsamen Neutronen an gg-Kernen beträgt der Spin im Eingangskanal $^1/_2$. In diesem Fall wird die Strahlung beim Übergang auf ein genau bestimmtes Niveau emittiert. Beim Neutroneneinfang durch einen ungeraden Kern mit einem Spin im Grundzustand $i \neq 0$ ist die Möglichkeit der Bildung eines Compoundkerns mit den Spins $i \pm {}^1/_2$ gegeben. Infolgedessen ergibt sich eine Unbestimmtheit in der Wahl des Spins im Eingangskanal, und der statistische Faktor

$$g = \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{1}{2i+1}\right)$$

in der Breit-Wigner-Formel wird unbestimmt. Diese Unbestimmtheit kann durch Untersuchung des Einfangs von polarisierten Neutronen durch orientierte Kerne (siehe z. B. [11,38]) beseitigt werden.

Bei der Messung der Strahlungs- und Neutronenbreiten von Resonanzniveaus, die sich beim Einfang langsamer Neutronen bilden, wurde festgestellt, daß die Strahlungsbreiten für verschiedene Niveaus eines Kerns ungefähr gleich groß sind, die Neutronenbreiten sich jedoch von Niveau zu Niveau ändern. Als Beispiel sind in der Tab. 30 Angaben über die Strah-

Tabelle 30

Strahlungs- und Neutronenbreiten für Energieniveaus von 2 Silberisotopen

ε_0 [eV]	Ag-Isotop	Γ_n [MeV]	Γ_γ [MeV]	Spin
5,22	109	12,1	158	1
16,3	107	12	138	0
30,7	109	6,7	142	1
51,8	107	20,8	136	1
56	109	36,3	144	0
71	109	27,8	162	1
88	109	18,3	140	0

lungs- und Neutronenbreiten verschiedener Niveaus von 2 Silberisotopen angeführt [11,39].

Die relative Konstanz der Strahlungsbreiten für die verschiedenen Niveaus hängt damit zusammen, daß die γ-Quanten, die beim Einfang langsamer Neutronen emittiert werden, einer Vielzahl von Übergängen auf sehr zahlreiche Kernniveaus entsprechen. Die totale γ-Breite dieser Übergänge hängt praktisch nicht vom angeregten Niveau des Kerns ab. Die Abhängigkeit der Strahlungsbreite von der Massenzahl beim Einfang langsamer Neutronen ist nur klein; merkliche Änderungen der Strahlungsbreiten beobachtet man nur im Gebiet magischer Kerne (Abb. 65).

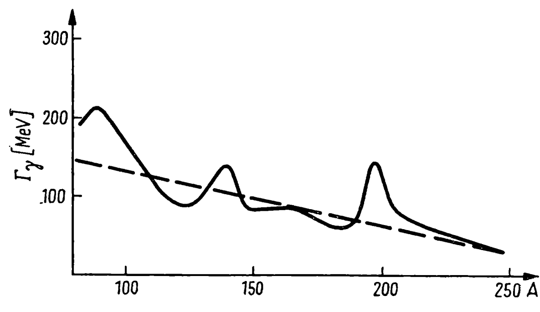


Abb. 65. Strahlungsbreiten beim Einfang thermischer Neutronen in Abhängigkeit von der Massenzahl

Im γ-Spektrum der (n, γ)-Reaktion stellt man Übergänge mit Anregungsenergien in der Nähe der Bindungsenergie des Neutrons (≈ 7 MeV) fest. KINSEY und BARTHOLOMEW [11, 33] zeigten, daß beim Einfang langsamer Neutronen durch Kerne mit gerader Ordnungszahl die Emission von elektrischer Dipolstrahlung hoher Energie am wahrscheinlichsten ist. An den Kernen ^{25}Mg, ^{29}Si und ^{33}S wurde durch unmittelbaren Vergleich festgestellt, daß die Emissionswahrscheinlichkeit für $E1$-Strahlung die Emissionswahrscheinlichkeit für $M1$-Strahlung, bezogen auf gleiche Übergangsenergie, um das 200fache übertrifft. Am Beispiel des ^{25}Mg konnte gezeigt werden, daß die Intensität der Quadrupolstrahlung um 2000mal kleiner ist als die Intensität der Dipolstrahlung, bezogen auf die gleiche Energie (7 MeV). Beim Einfang eines langsamen Neutrons tragen die γ-Quanten, die dem Übergang des sich bildenden Kerns in den Grundzustand entsprechen, den größten Teil der Energie fort. Die Strahlung ist besonders intensiv, wenn nach den Auswahlregeln ein elektrischer Dipolübergang erlaubt ist. Beim Einfang eines langsamen Neutrons durch einen gg-Kern bildet sich ein angeregter Zustand mit $^1/_2{}^+$. Daher ist $E1$-Strahlung beim Übergang in den Grundzustand nur dann möglich, wenn der Grundzustand zum $p_{1/2}$- oder $p_{3/2}$-Typ gehört. Gehört er zum s-, d- oder f-Typ, so erfolgt der Übergang in den Grundzustand über $M1$-, $E2$- oder $E3$-Strahlung mit kleiner Intensität. Beim Einfang eines langsamen Neutrons durch einen gu-Kern bildet sich ein gg-Kern mit dem Grundzustand 0^+. In diesem Fall ist die Emission intensiver elektrischer Dipolstrahlung beim Übergang in den Grundzustand nur möglich, wenn sich das ungerade Neutron des Targetkerns im Zustand $p_{3/2}$ oder $p_{1/2}$ befindet.

Häufig wurde die Untersuchung der γ-Quanten beim Strahlungseinfang, der durch Protonen ausgelöst wird, zur Bestimmung von Spin und Parität angeregter Kernzustände benutzt (siehe z. B. [11,40]).

11.9. Kernphotoeffekt

Als Kernphotoeffekt bezeichnet man Wechselwirkungsprozesse hochenergetischer Photonen mit Kernen, die durch Emission eines oder mehrerer γ-Quanten, Neutronen, Protonen usw. begleitet werden.

Die Experimente in bezug auf den Kernphotoeffekt werden vielfach mit Hilfe von Bremsstrahlung durchgeführt, die bei der Abbremsung schneller Elektronen entsteht. Ihr Energiespektrum ist kontinuierlich und durch eine Maximalenergie E_0 (der kinetischen Energie der Elektronen) begrenzt. Das kontinuierliche γ-Strahlspektrum macht die Interpretation der experimentellen Resultate sehr schwierig.

Meist bestimmt man die Ausbeute der entsprechenden Reaktion in Abhängigkeit von der maximalen Photonenenergie. Führt man die Messungen bei mehreren Werten von E_0 durch und kennt man die Energieverteilung der Photonen im Bremsstrahlungsspektrum sowie die Energieempfindlichkeit der Geräte für die Registrierung der Strahlungsintensität, so lassen sich die Wirkungsquerschnitte der entsprechenden Reaktionen berechnen. Bei weniger genauen, einfacheren Methoden wird die Reaktionsausbeute als Funktion einer gewissen effektiven Energie der Bremsstrahlung festgestellt, die dann aus zusätzlichen Experimenten ermittelt werden muß.

Zur Vereinfachung wollen wir hier nur den Fall monochromatischer γ-Strahlung betrachten.

Bei Kernreaktionen, die durch Photonen mit einer Energie < 50 MeV hervorgerufen werden, besitzen nur $E1$-, $E2$- und $M1$-Übergänge wesentliche Bedeutung. Übergänge höherer Multipolordnung spielen keine besondere Rolle.

Für leichte gg-Kerne mit gleicher Neutronen- und Protonenzahl ($T_3 = 0$) können die Auswahlregeln bezüglich des Isospins von großer Bedeutung sein (vgl. Abschn. 11.1.). Für Kerne mit $T_3 = 0$ sind elektrische Dipolübergänge nur bei $\Delta T = \pm 1$ möglich. Der Grundzustand dieser Kerne besitzt den Spin 0 und gerade Parität (0^+). Bezeichnet man mit E_1 die Energie des niedrigsten angeregten Zustandes in diesen Kernen mit dem Isospin $T = 1$, so muß die Absorption von γ-Strahlung folgenden Regeln unterworfen sein [11,41]:

a) Bei einer γ-Quantenenergie $\hbar\omega < E_1$ kann $M1$-Strahlung mit gleichzeitigem Übergang in Zustände gerader Parität und dem Gesamtdrehimpuls $J = 1$ absorbiert werden. Ebenso kann $E2$-Strahlung beim Übergang in Zustände mit $J = 2$ ($T = 0$) und gerader Parität absorbiert werden.

b) Für γ-Quantenenergien $\hbar\omega > E_1$ ist Absorption von $E1$-, $E2$- und $M1$-Strahlung möglich. Diese Absorption kann durch Deuteronenemission ($T = 0$) oder α-Teilchen-Emission ($T = 0$) nur dann begleitet werden, wenn $\hbar\omega - E_1$ größer oder gleich der Bindungsenergie dieser Teilchen im Kern ist.

Für uu-Kerne mit $T_3 \neq 0$ sind die Auswahlregeln bezüglich des Isospins weniger bedeutungsvoll. In diesem Fall kann man interessante Ergebnisse [11,41] über die Beziehungen zwischen den Reaktionen (γ, np) und (γ, d) erhalten. Ist bei der Absorption von $E1$-Strahlung beim Übergang des

Kerns in einen Zustand mit $T = 1$ die γ-Quantenenergie $\hbar\omega$ nicht groß genug, um bei Deuteronenemission den Endkern im Zustand mit $T = 1$ zu belassen, so werden Neutron und Proton einzeln im Zustand mit dem Isospin 1 emittiert. In diesem Zustand besteht keine Bindung zwischen n und p.

Die elektrische Dipolabsorption ($E1$) muß vom Standpunkt des Verhältnisses $\lambda\!\!\!^{-}/R$ stärker als die Absorption von elektrischer Quadrupolstrahlung ($E2$) sein, und zwar um den Faktor $(\lambda\!\!\!^{-}/R)^2$. Die starke Korrelation zwischen der Lage der Neutronen und Protonen im Kern verkleinert jedoch das Matrixelement für die Dipolabsorption beträchtlich, so daß bei kleinen Photonenenergien die Wahrscheinlichkeit für die Quadrupolabsorption größer als die Wahrscheinlichkeit für die Dipolabsorption wird. Bei Photonenenergien über 9 MeV für schwere Kerne und über 17 MeV für leichte Kerne überwiegt die Dipolabsorption die Quadrupolabsorption.

Man muß allerdings berücksichtigen, daß die Abwesenheit von Dipolübergängen bei der Absorption von γ-Quanten kleiner Energien durch die Auswahlregeln bedingt sein kann. Für zahlreiche Kerne fällt die Parität der ersten angeregten Niveaus mit der Parität des Grundzustandes zusammen. Solche Zustände können durch elektrische Dipolstrahlung nicht angeregt werden.

Die durch elektrische Quadrupolabsorption hervorgerufenen Kernreaktionen (γ, α), (γ, n) und (γ, p) werden dann beobachtet, wenn diese Reaktionen eine genügend ausgeprägte Schwellenenergie besitzen, die unterhalb des Energiegebietes liegen muß, bei dem die Dipolabsorption wahrscheinlicher wird. Am häufigsten beobachtet man dies bei (γ, α)-Reaktionen.

In der Abb. 66 ist die Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts der (γ, n)-Reaktion von der γ-Quantenenergie für den Kern ^{14}N dargestellt. Hierbei entspricht das Energiegebiet 10,5 $\cdots$ 17 MeV der Quadrupolabsorption, das zweite große Maximum entspricht der Dipolabsorption [11,42]. Das Maximum im Absorptionsquerschnitt von ^{12}C entspricht der Dipolabsorption.

Die experimentellen Kurven für die Abhängigkeit der Wirkungsquerschnitte der Kernphotoreaktionen von der Photonenenergie zeigen meist breite, verwaschene Maxima. Dieser Charakter der Kurven (für den Fall leichter Kerne) ist wahrscheinlich nicht immer durch die Natur des Vorgangs bedingt, sondern drückt offensichtlich experimentelle Schwierigkeiten bei der Bestimmung der Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts von der Photonenenergie bei der Verwendung von Strahlungsquellen mit kontinuierlichem Spektrum aus. Zum Beispiel gestattet eine Verbesserung der Meßmethodik [11,43] die Beobachtung einer Feinstruktur an den Kurven der (γ, n)-Reaktion für die leichten Kerne ^{7}Li, ^{19}F, ^{12}C, ^{16}O. Diese Experimente zeigten, daß die Photonenabsorption durch leichte Kerne über die Anregung ganz bestimmter Kernniveaus verläuft. Die Mehrzahl der beobachteten Resonanzen entspricht einer elektrischen Dipolabsorption. In der Arbeit [11,44] wird auf die diskrete Struktur der Photonenabsorption in Cu, Zn, Ag hingewiesen.

Die Schwellenenergie für Kernphotoreaktionen vom Typ (γ, n) kann sich von der Bindungsenergie des Neutrons im Kern unterscheiden, wenn die Spins des Targetkerns und des Endkerns (nach der Neutronenemission)

stark voneinander verschieden sind. In diesem Fall muß nämlich der Kern für die Neutronenemission zu höheren Energiezuständen angeregt werden, damit der entsprechende Spin garantiert ist.

Kernphotoreaktionen werden im wesentlichen durch Absorption von Dipol-γ-Quanten ausgelöst. Die Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts für Kernphotoreaktionen besitzt einen stark ausgeprägten Resonanzcharakter.

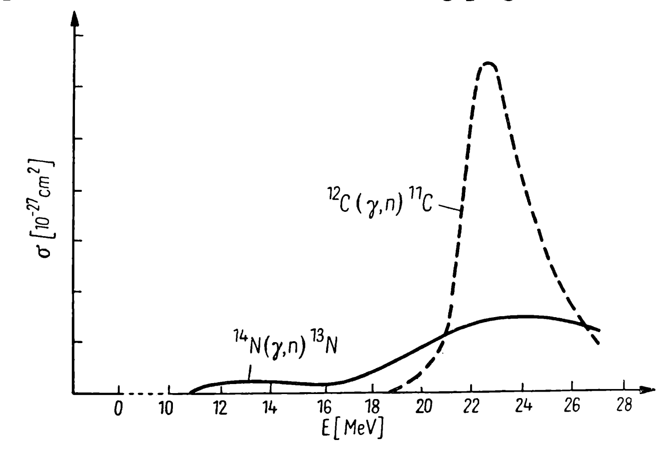


Abb. 66. Abhängigkeit der Wirkungsquerschnitte der Reaktionen $^{14}N(\gamma, n)\,^{13}N$ und $^{12}C(\gamma, n)\,^{11}C$ von der Energie der γ-Quanten

Die Größe des Absorptionsquerschnitts beträgt im Maximum ungefähr 0,1 barn. Die Lage des Maximums (E_m) entspricht einer Energie von etwa 22 MeV für leichte Kerne, die sich mit wachsender Massenzahl A immer weiter in Richtung kleinerer Energien bis zu 14 MeV verschiebt. Diese Verkleinerung von E_m läßt sich durch die empirische Formel $E_m \sim A^{-0,2}$ wiedergeben. Die Halbwertsbreite der Resonanzen ändert sich zwischen 1,7 und 7,9 MeV. Der Absorptionsquerschnitt fällt relativ steil vom Maximalwert ab. Integration über die Energie liefert eine der Massenzahl proportionale Größe.

Die bei elektrischer Dipolabsorption im Kern auftretende breite Resonanz wird als *Riesenresonanz* bezeichnet. Ihr Entstehungsmechanismus wurde in der Literatur vielfach diskutiert. Im Jahre 1945 schlug Migdal [11,45] als Ursache für die Dipolabsorption die Schwingungsanregung des Schwerpunkts aller Protonen bezüglich des Schwerpunkts aller Neutronen vor. Unter Benutzung der Summenregel für die Matrixelemente von Dipolübergängen und der Polarisationsfähigkeit von Kernmaterie aus der halbempirischen Weizsäcker-Formel für die Bindungsenergie schätzte Migdal den „Schwerpunkt" für die Energien der Dipolübergänge ab. Er erhielt für $A = 240$ und $A = 200$ entsprechend 14 und 16 MeV.

Goldhaber und Teller [11,46] betrachten drei verschiedene Näherungen für die Beschreibung der klassischen harmonischen Schwingungen der Neu-

tronen bezüglich der Protonen: *a*) Jedes Proton und jedes Neutron schwingt um seine Gleichgewichtslage ähnlich wie die Ionen in Kristallgittern; *b*) die Protonen und Neutronen schwingen gegeneinander wie zwei kompressible Flüssigkeiten; *c*) die Protonen und Neutronen schwingen wie inkompressible Flüssigkeiten. Es erwies sich, daß die Lage des Maximums E_m für den Fall *a*) nicht von A abhängt. Für den Fall *b*) wird $E_m \sim A^{-1/3}$ und für den Fall *c*) $E_m \sim A^{-1/6}$. Das Modell der gegenseitigen Schwingungen von inkompressiblen Protonen- und Neutronenflüssigkeiten gestattete also bei entsprechender Wahl der Parameter, die Abhängigkeit zwischen E_m und der Massenzahl zu erklären. STEINWEDEL und JENSEN [11,47] betrachteten Protonen und Neutronen als zwei hydrodynamische Flüssigkeiten. Sie erhielten für die Resonanzfrequenz und für den Wirkungsquerschnitt, integriert über alle Energien, folgende Resultate:

$$\hbar\,\omega = 60 A^{-1/3}\ [\mathrm{MeV}], \qquad \int \sigma(\varepsilon)\, d\varepsilon = 0{,}0065 A\ [\mathrm{MeV\ barn}].$$

FERENTZ, GELL-MANN und PINES [11,48] untersuchten auf der Grundlage der quantenmechanischen Betrachtung eines Vielteilchensystems Resonanzschwingungen von Neutronen und Protonen als Plasmaschwingungen. Es ergab sich $E_m = 80\, A^{-1/3}$.

Nach den oben angeführten Theorien verteilt sich die bei der Photonenabsorption übertragene Energie auf alle Nukleonen des Kerns, und die Emission von α-Teilchen, Neutronen und Protonen muß über den gewöhnlichen Verdampfungsmechanismus verlaufen. Der Wirkungsquerschnitt einer (γ, p)-Reaktion muß sich z. B. nach der Gleichung

$$\sigma(\gamma, \mathrm{p}) = \sigma(\gamma)\, W_{\mathrm{p}}$$

berechnen lassen. Dabei bedeutet $\sigma(\gamma)$ den Absorptionsquerschnitt der γ-Strahlung und W_{p} das Verhältnis der Emissionswahrscheinlichkeit für Protonen zur Gesamtemissionswahrscheinlichkeit für alle Teilchen.

Diese Schlußfolgerungen aus der Theorie sind nicht vollständig mit dem Experiment vereinbar. Besonders große Abweichungen wurden für mittlere und schwere Kerne beobachtet. So stellten TOMS und STEPHENS [11,49] fest, daß die Protonenausbeute der (γ, p)-Reaktion (für Photonenenergien von $7 \cdots 9$ MeV) die nach der Verdampfungstheorie zu erwartende Ausbeute 17mal für Bi, 1300mal für ^{208}Pb, 110mal für Ta und 170mal für Ce übersteigt. Diese Abweichungen weisen darauf hin, daß die emittierten Protonen ihre Energie höchstwahrscheinlich unmittelbar von den Photonen übertragen bekommen.

In den Abschn. 11.1. und 11.2. hatten wir Ausdrücke für die Emissionswahrscheinlichkeiten von elektrischer Multipolstrahlung abgeleitet. Zur Bestimmung der Absorptionswahrscheinlichkeit von Multipolstrahlung kann man die Tatsache benutzen, daß der Absorptionsprozeß zum Emissionsprozeß umgekehrt ist und daß beide durch den Reziprozitätssatz verknüpft sind. Nach dem Reziprozitätssatz wird die Emissionswahrscheinlichkeit für spontane Emission gleich der Absorptionswahrscheinlichkeit, wenn der

Intensität der einfallenden elektromagnetischen Strahlung bei der Absorption genau 1 Quant für jede Eigenschwingung des Strahlungsfeldes zugeordnet ist. Um also den Absorptionsquerschnitt zu bestimmen, ist die Emissionswahrscheinlichkeit durch die Flußdichte der Photonen in der elektromagnetischen Strahlung, deren Intensität oben bestimmt wurde, zu dividieren. Die Flußdichte der Photonen für Strahlung der Multipolordnung 2^J beträgt $\frac{2k^2}{\pi^2(2J+1)}$. Die Wahrscheinlichkeit für Dipolstrahlung ist

$$P_{ba} = \frac{16\pi\, e^2\, k^3}{9\hbar} B(E1).$$

Daher wird der Wirkungsquerschnitt für Dipolabsorption beim Übergang $a \to b$

$$\sigma_{ab}(E1) = \frac{8\pi^3\, e^2\, k}{3\hbar} B(E1) \tag{11.9.1}$$

mit der reduzierten Übergangswahrscheinlichkeit für einen Dipolübergang

$$B(E1) = \sum_m \left|\left(b \,\middle|\, \sum_\alpha \varepsilon_\alpha r_\alpha Y_{1m}(\vartheta_\alpha, \varphi_\alpha) \,\middle|\, a\right)\right|^2 = \frac{3}{2\pi} \left|\left(b \,\middle|\, \sum_\alpha \varepsilon_\alpha z_\alpha \,\middle|\, a\right)\right|^2. \tag{11.9.2}$$

Zur Ableitung von (11.9.2) wurde die Identität $r_\alpha Y_{1m} = \sqrt{3/4\pi}\, r_m$ verwendet und außerdem angenommen, daß in einer ebenen einfallenden Welle wegen der Transversalität der Polarisation nur 2 Zustände mit $m = \pm 1$ vorhanden sind. Die Matrixelemente für beide Zustände sind gleich groß. Weiterhin gilt für Protonen $\varepsilon_\alpha = 1$ und für Neutronen $\varepsilon_\alpha = 0$.

Die Koordinaten z_α in (11.9.2) werden vom Schwerpunkt des Kerns aus gemessen: $z_0 = A^{-1}\{\sum_{\mathrm{p}} z'_{\mathrm{p}} + \sum_{\mathrm{n}} z'_{\mathrm{n}}\}$. Daher gilt

$$\sum_\alpha \varepsilon_\alpha z_\alpha = \sum_{\mathrm{p}} (z'_{\mathrm{p}} - z_0) = \frac{N}{A} \sum_{\mathrm{p}} z'_{\mathrm{p}} - \frac{Z}{A} \sum z'_{\mathrm{n}},$$

und der Absorptionsquerschnitt (11.9.1) nimmt folgende Form an:

$$\sigma_{ab} = \frac{4\pi^2\, e^2\, k}{\hbar} \left\{ \left(\frac{N}{A}\right)^2 \sum_{\mathrm{p}} |(b\,|z'_{\mathrm{p}}|\,a)|^2 + \left(\frac{Z}{A}\right)^2 \sum_{\mathrm{n}} |(b\,|z'_{\mathrm{n}}|\,a)|^2 \right\}. \tag{11.9.3}$$

Wir führen noch die Oszillatorkraft für den Übergang $a \to b$ mit Hilfe der bekannten Beziehung

$$f_{ba} = \frac{2M(E_b - E_a)}{\hbar^2} |(b\,|z|\,a)|^2 \tag{11.9.4}$$

ein. Dann liefert die Integration des Wirkungsquerschnitts für Dipolabsorption über die Energie unter Zugrundelegung der Beziehungen (11.9.1) bis (11.9.3)

$$\int \sigma_{ab}\, d\varepsilon = \frac{2\pi^2\, e^2\, \hbar\, N\, Z}{M\, c\, A} \sum_b f_{ba}, \tag{11.9.5}$$

d. h., das Integral drückt sich durch die Summe der Oszillatorkräfte aller Dipolübergänge aus.



Gehören die zwischen den Nukleonen wirkenden Kräfte zum normalen Typ (keine Austauschkräfte), so sind die Geschwindigkeiten der Ladungen gleich den Nukleonengeschwindigkeiten, und es gilt

$$(b\,|z|\,a) \equiv z_{b\,a} = \frac{\hbar}{i\,\mu(E_b - E_a)}\,p_{b\,a}. \tag{11.9.6}$$

mit $p_{b\,a}$ als Matrixelement des Impulsoperators. Gl. (11.9.4) läßt sich damit in folgender Form schreiben:

$$f_{b\,a} = \frac{1}{i\,\hbar}\,(z_{a\,b}\,p_{b\,a} - p_{a\,b}\,z_{b\,a}).$$

Hieraus folgt unmittelbar die in der Theorie der Atomspektren gut bekannte Summenregel

$$\sum_b f_{b\,a} = \frac{1}{i\,\hbar}\,(\hat{z}\,\hat{p} - \hat{p}\,\hat{z})_{a\,a} = 1, \tag{11.9.7}$$

wenn man die Vertauschungsrelationen zwischen Impuls- und Koordinatenoperator beachtet. In diesem Fall nimmt die Summenregel folgende Form an:[1])

$$\int \sigma_{a\,b}\,d\varepsilon = \frac{2\pi^2\,e^2\,\hbar}{M\,c}\,\frac{N\,Z}{A} \approx 0{,}058\,\frac{N\,Z}{A} \quad [10^{-24}\,\mathrm{MeV\,cm^2}]. \tag{11.9.8}$$

Bei Anwesenheit von Austauschkräften, die zum Ladungsaustausch zwischen den Nukleonen führen, wird die Geschwindigkeit der Ladungen größer als die Nukleonengeschwindigkeit und die Summe (11.9.7) dementsprechend größer als Eins. Nimmt man an, daß die Austauschkräfte einen bestimmten Teil x der gewöhnlichen Kräfte ausmachen, so erhält man, wie LEVINGER und BETHE [11,50] zeigten, folgende Korrektion zur Summenregel (11.9.7):

$$\int \sigma_{a\,b}\,d\varepsilon = \frac{2\pi^2\,e^2\,\hbar}{M\,c}\,\frac{N\,Z}{A}\,(1 + 0{,}8\,x). \tag{11.9.8a}$$

Die Übereinstimmung der experimentellen Werte der über die Energie integrierten Absorptionsquerschnitte von γ-Strahlung mit Gl. (11.9.8) bestätigt die Vorstellung, daß die Dipolabsorption den Hauptmechanismus beim Kernphotoeffekt ausmacht.

Von großem Interesse ist eine Arbeit von GELL-MANN, GOLDBERGER und TIRRING [11,65], in der auf der Grundlage des allgemeinen Kausalitätsprinzips eine Formel für die Summenregel abgeleitet wurde, in die die Übergänge aller Multipolordnungen eingehen. In der Arbeit wurde gezeigt, daß der über die Energie integrierte Absorptionsquerschnitt für die Absorption von γ-Strahlung durch Kerne durch die Gleichung

$$\int_0^{\mu} \sigma\,d\varepsilon = 2\pi^2\,\frac{Z\,N\,e^2\,\hbar}{A\,M\,c}\left(1 + 0{,}1\,\frac{A^2}{N\,Z}\right)$$

---

[1]) Eine allgemeine Untersuchung der Summenregel für die Wirkungsquerschnitte des Kernphotoeffekts führte CHOCHLOW [11,67] durch.

gegeben wird. Die obere Integrationsgrenze entspricht hierbei der Schwellenenergie für die Entstehung von Mesonen. Der erste Summand auf der rechten Seite bezieht sich auf alle Absorptionsprozesse von Photonen, die ohne Beteiligung von Mesonen verlaufen. Der zweite Summand ist für alle Mesoneneffekte, z. B. für Austauschkräfte, Veränderungen der Nukleonenströme durch das Mesonenfeld usw., verantwortlich.

Zur Erklärung der großen Ausbeute an hochenergetischen Protonen beim Kernphotoeffekt und zur Erklärung ihrer Winkelverteilung entwickelte WILKINSON [11,8] vor kurzem eine Theorie des Kernphotoeffekts, deren Grundlage in der Annahme besteht, daß zunächst Einzelteilchenzustände angeregt werden. Dabei nehmen nicht nur Nukleonen der äußeren, nicht vollbesetzten Schalen teil, sondern auch Nukleonen, die sich auf vollständig besetzten Schalen befinden. Da die Anzahl der Nukleonen auf den besetzten Schalen die Zahl der äußeren Nukleonen übersteigt, müssen den Hauptbeitrag gerade die Nukleonen der besetzten Schalen liefern. Beim Übergang zu höheren Anregungsenergien, die die Nukleonenbindungsenergie im Kern übersteigen, kann das Nukleon entweder den Kern verlassen (dies entspricht dem direkten Photoeffekt) oder seine Energie den anderen Nukleonen (auf Grund seiner Wechselwirkung mit ihnen) übertragen und so einen Compoundkern bilden. Der Compoundkern zerfällt dann über den gewöhnlichen Verdampfungsmechanismus. Beide Mechanismen führen zu einer starken Verbreiterung der hochangeregten Niveaus. Als Hauptgrund für die Niveauverbreiterung ist offensichtlich die Wechselwirkung mit den anderen Nukleonen anzusehen, die zur Verteilung der Energie der Einzelteilchenanregung auf alle Freiheitsgrade des Kerns führt. Die Größe der Verbreiterung kann mit Hilfe des Imaginärteils des komplexen optischen Potentials für die entsprechende Nukleonenenergie abgeschätzt werden, der auch die Energieverteilung bewirkt. Nach WILKINSON wird die Ungenauigkeit des Modells der Einzelteilchenanregungen z. T. durch die Berücksichtigung der Niveaubreiten kompensiert. Die Wahrscheinlichkeit für den direkten Photoeffekt von Zuständen mit großem Bahndrehimpuls wird wegen des großen Zentrifugalwalls stark verringert. Nach den Abschätzungen von WILKINSON sind im Zinnkern die Übergänge vom Typ $1g \to 1h$ am wesentlichsten. Dabei beträgt sogar für Neutronen mit einer Anregungsenergie, die die Bindungsenergie um mehr als 5 MeV übersteigt, die Verbreiterung auf Grund der Emission nur 500 keV. Dies ist wesentlich kleiner als die Gesamtbreite des Niveaus.

Nukleonen, die infolge des direkten Kernphotoeffekts emittiert werden, tragen große Energien fort. Ihre Winkelverteilung muß sich von der isotropen Verteilung unterscheiden. Nukleonen, die nach der Verteilung der Anregungsenergie des Einzelteilchenzustandes auf alle Freiheitsgrade des Kerns emittiert werden, müssen kleine Energien besitzen (1 · · · 2 MeV). Ihre Energieverteilung muß der MAXWELL-Verteilung nahekommen. Diese qualitativen Schlußfolgerungen der Theorie konnten durch Experimente bestätigt werden [11,66].

11.10. Kernanregung durch das Coulomb-Feld schwerer geladener Teilchen

Die Eindringungswahrscheinlichkeit eines Teilchens in den Wirkungsbereich der spezifischen Kernkräfte wird sehr klein, wenn die Energie der Relativbewegung des schweren geladenen Teilchens der Ordnungszahl Z_a kleiner als die Energie des Coulomb-Walls des Kerns der Ordnungszahl Z_A ist. Die Energie des Coulomb-Walls ist dann

$$E_B = \frac{Z_A Z_a e^2}{R}, \tag{11.10.1}$$

wobei R der effektive Wechselwirkungsradius ist (Summe von Kernradius und Teilchenradius). In diesem Fall ist eine Anregung des Kerns auf Grund der elektromagnetischen Wechselwirkung zwischen Kern und Teilchen möglich. Derartige Wechselwirkungen können mit Hilfe der Störungsrechnung untersucht werden.

Die Anregungswahrscheinlichkeit des Kerns durch das elektromagnetische Feld eines geladenen schweren Teilchens wurde erstmals von Ter-Martirosjan [11,51] berechnet. Dabei wurde die sogenannte halbklassische Methode benutzt, in der angenommen wird, daß sich das einfallende Teilchen auf seiner klassischen Bahn bewegt. Eine solche klassische Beschreibung ist möglich unter der Bedingung

$$\eta \equiv \frac{Z_a Z_A e^2}{\hbar v} \gg 1$$

mit v als Relativgeschwindigkeit des Systems Teilchen—Kern. Die Anwendungsbedingung der halbklassischen Methode ist stets erfüllt, wenn die Energie der Relativbewegung von Teilchen und Kern kleiner als die Höhe des Coulomb-Walls ist. Dann ist nämlich die Teilchengeschwindigkeit klein gegen die Lichtgeschwindigkeit, und die Wechselwirkung des Teilchens mit dem Kern kann als reine Coulomb-Wechselwirkung betrachtet werden, da der Einfluß des Magnetfeldes außerordentlich klein ist.

Wir wählen als Koordinatenursprung den Schwerpunkt des Kerns. Betrachtet man das einfallende Teilchen als punktförmig und bezeichnet mit $\mathfrak{r}_p(t)$ den Radiusvektor seiner Bahn, so läßt sich der Operator für die Wechselwirkung von Kern und Teilchen in der Form schreiben:

$$H'(t) = \int \varrho(\mathfrak{r})\, \varphi(\mathfrak{r}, t)\, d\mathfrak{r}, \tag{11.10.2}$$

wobei $\varrho(\mathfrak{r}) = e \sum_{k=1}^{Z_A} \delta(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_k)$ der Ladungsdichteoperator ist. Das elektrostatische Potential lautet

$$\varphi(\mathfrak{r}, t) = \frac{Z_a e}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_p(t)|} - \frac{Z_a e}{|\mathfrak{r}_p(t)|} \tag{11.10.3}$$

und wird so gewählt, daß die Wechselwirkung zwischen den Massenzentren, die zu keiner Kernanregung führt, ausgeschlossen ist.

Die Übergangswahrscheinlichkeit aus dem Anfangszustand des Kerns a in den Endzustand des Kerns b läßt sich nach Mittelung über alle Magnetquantenzahlen m_a des Anfangszustandes und Summierung über alle Magnetquantenzahlen m_b des Endzustandes durch folgende Gleichung ausdrücken:

$$P_{ba} = (2J_a + 1)^{-1} \sum_{m_a, m_b} |W_{ba}|^2; \qquad (11.10.4)$$

J_a ist der Spin des Anfangszustandes, und W_{ba} bedeutet die Matrixelemente der Quantenübergänge unter dem Einfluß der zeitabhängigen Störung:

$$W_{ba} = \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} (b|H'|a) e^{i\omega t}\, dt \qquad (11.10.5)$$

mit der Übergangsenergie $\hbar\omega = E_b - E_a$.

Setzt man $\varrho(\mathfrak{r})$ und (11.10.3) in (11.10.5) ein und beachtet die Relation

$$\frac{1}{|\mathfrak{r}_k - \mathfrak{r}_p(t)|} = 4\pi \sum_{\lambda,\mu} \frac{r_k^\lambda}{(2\lambda+1)[r_p(t)]^{\lambda+1}} Y^*_{\lambda\mu}(\vartheta_k, \varphi_k) Y_{\lambda\mu}(\vartheta, \varphi) \text{ für } \mathfrak{r}_p|(t)| > |\mathfrak{r}_k|,$$

so erhält man

$$W_{ba} = \frac{4\pi Z_a e^2}{i\hbar} \sum_{\lambda,\mu} \left(\psi_b \left| \frac{1}{e} \sum_k e_k r_k^\lambda Y^*_{\lambda,\mu}(\vartheta_k, \varphi_k) \right| \psi_a\right) S_{\lambda\mu}, \quad \lambda \geqq 1 \qquad (11.10.6)$$

mit

$$S_{\lambda\mu} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} [r_p(t)]^{-\lambda-1} Y_{\lambda\mu}(\vartheta(t), \varphi(t))\, dt \qquad (11.10.6a)$$

als Integral, das durch die Bahnbewegung des geladenen Teilchen bestimmt wird.

Setzt man (11.10.6) in (11.10.4) ein, so erhält man den endgültigen Ausdruck für die Anregungswahrscheinlichkeit des Kerns durch das COULOMB-Feld eines vorbeifliegenden schweren geladenen Teilchens:

$$P_{ba} = \frac{(4\pi)^2 Z_a^2 e^4}{\hbar^2} \sum_{\lambda \geqq 1} B(E\lambda) \sum_\mu |S_{\lambda\mu}|^2; \qquad (11.10.7)$$

$$B(E\lambda) = \frac{1}{2J_a + 1} \sum_{m_a, m_b} \left| \left(\psi_b \left| \frac{1}{e} \sum_k e_k r_k^\lambda Y^*_{\lambda\mu}(\vartheta_k, \varphi_k) \right| \psi_a\right) \right|^2 \qquad (11.10.7a)$$

ist die reduzierte Absorptionswahrscheinlichkeit für Strahlung vom Typ $E\lambda$.

Man zeigt leicht, daß (11.10.7a) gerade gleich der reduzierten Übergangswahrscheinlichkeit für die schon untersuchten elektromagnetischen Übergänge ist. Aus diesem Grund fallen die Auswahlregeln für COULOMB-Anregung mit den Auswahlregeln bei Emission oder Absorption elektromagnetischer Strahlung vom Typ $E\lambda$ zusammen.

Im COULOMB-Feld des Kerns bewegt sich das Teilchen auf einer hyperbolischen Bahn. Da die dem Kern beim Stoß mit dem Teilchen übertragene Energie im Vergleich zur ursprünglichen Teilchenenergie klein ist, kann man die Veränderung in der Bahnbewegung des Teilchens bei der Energieübertragung vernachlässigen. Dann wird der differentielle Wirkungsquerschnitt

für die Streuung des Teilchens in den Raumwinkel $d\Omega$ durch die RUTHERFORD-Formel gegeben:

$$d\sigma_R = \frac{a^2\,d\Omega}{4\sin^4\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}; \tag{11.10.8}$$

dabei ist

$$2a = \frac{2Z_A Z_a e^2}{M v^2} \tag{11.10.8a}$$

der Abstand der maximal möglichen Annäherung von Teilchen und Kern, M bedeutet die reduzierte Masse von Teilchen und Kern, v ihre Relativgeschwindigkeit und ϑ den Streuwinkel.

Der differentielle Anregungsquerschnitt ($a \to b$) beim Stoß wird, wenn das Teilchen in das Raumwinkelelement $d\Omega$ gestreut wurde, durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$d\sigma_{ba} = P_{ba}\,d\sigma_R, \tag{11.10.9}$$

wobei P_{ba} die durch Gl. (11.10.7) bestimmte Anregungswahrscheinlichkeit ist. Integriert man (11.10.9) über alle Streuwinkel, so erhält man den totalen Anregungsquerschnitt des Kerns.

Zur Bestimmung des Zahlenwertes des Anregungsquerschnitts und seiner Abhängigkeit von Energie und Ladung des Teilchens ist das Integral $S_{\lambda\mu}$ (11.10.6a) zu berechnen. Dazu wählt man das Koordinatensystem am zweckmäßigsten so, daß die Teilchenbahn in der xy-Ebene liegt und die x-Achse parallel zur Symmetrieachse der Teilchenbahn gerichtet ist. Eine Berechnung des Integrals $S_{\lambda\mu}$ wurde von TER-MARTIROSJAN [11,51] vorgenommen. Wir führen hier die von ihm erhaltenen Resultate für den totalen Wirkungsquerschnitt der COULOMB-Anregung an. Es ergab sich die Beziehung

$$\sigma_{ba}(E\lambda) = 2\pi\,\eta^2 \frac{B(E\lambda)}{a^{2\lambda-2}} f(\beta)\,\mathrm{e}^{-2\pi\beta} \tag{11.10.10}$$

mit dem dimensionslosen Parameter

$$\beta = \frac{a\,\omega}{v} = \frac{\hbar\,\omega\,Z_A Z_a e^2}{2\varepsilon v}. \tag{11.10.11}$$

In (11.10.11) bedeuten $\hbar\,\omega$ die Anregungsenergie des Kerns, ε und v Energie und Geschwindigkeit der Relativbewegung von Teilchen und Kern.

Die Funktion $f(\beta)$ in (11.10.10) hängt relativ wenig von β ab. Daher verkleinert sich die Wahrscheinlichkeit der COULOMB-Anregung im wesentlichen exponentiell mit wachsendem β. Dies entspricht der Tatsache, daß die Stoßdauer ($\sim a/v$) für $\beta > 1$ groß gegen die Bewegungsdauer im Kern ($\sim \omega^{-1}$) ist. Daher verläuft die Wirkung des COULOMB-Feldes des Teilchens praktisch adiabatisch mit außerordentlich kleiner Anregungswahrscheinlichkeit des Kerns.

Aus der Bedingung $\beta \leqq 1$ kann man unter Benutzung von (11.10.11) die für die Anregung eines Niveaus mit der Energie $\hbar\,\omega$ notwendige Teilchenenergie bestimmen:

$$\varepsilon\,[\mathrm{MeV}] \geqq 0{,}2 Z_a \left(\frac{A_a}{Z_a}\right)^{1/3} (Z_A\,\hbar\,\omega\,[\mathrm{MeV}])^{2/3}. \tag{11.10.12}$$

Aus (11.10.12) folgt, daß bei Verwendung von Teilchen mit genügend großer Energie hochliegende Energieniveaus des Kerns (bis zu einigen MeV) angeregt werden können.

Da die Energie der Relativbewegung die Energie des COULOMB-Walls E_B nicht übersteigen darf, wird β nach unten durch die möglichen Werte der Anregungsenergie $\hbar\,\omega$ beschränkt:

$$\beta_{\min} = \frac{1}{13}\sqrt{\frac{A_a A_A}{Z_a Z_A}}\,\hbar\,\omega\ [\mathrm{MeV}]. \tag{11.10.13}$$

Nach (11.10.10) ist das Verhältnis der Wirkungsquerschnitte für COULOMB-Anregung bei Anregungen elektrischen Charakters der Multipolordnung $E(\lambda+1)$ und $E\lambda$

$$\frac{\sigma_{ba}(E(\lambda+1))}{\sigma_{ba}(E\lambda)} = \frac{B(E(\lambda+1))}{B(E\lambda)}\,a^{-2} \sim \left(\frac{R}{a}\right)^2. \tag{11.10.14}$$

Dieses Verhältnis ist wesentlich größer als das analoge Verhältnis für die Kernanregung durch elektromagnetische Strahlung, das $(\omega R/c)^2$ beträgt.

Der Wirkungsquerschnitt (11.10.10) für COULOMB-Anregung ist der reduzierten Übergangswahrscheinlichkeit für einen elektrischen Multipolübergang $B(E\lambda)$ proportional. Daher ist die Methode der Kernanregung durch das COULOMB-Feld eines geladenen Teilchen besonders vorteilhaft für die Untersuchung von Rotations- und Schwingungszuständen von Kernen, denen Kollektivanregungen mit großen $B(E2)$ entsprechen.

In der Abb. 67 ist das Verhältnis des Wirkungsquerschnitts für die COULOMB-Anregung eines Kerns bei $E2$-Übergängen durch Deuteronen, α-Teilchen und ^{12}C-Ionen zum Anregungsquerschnitt mit Protonen gleicher Energie in Abhängigkeit vom Parameter

$$\frac{\varepsilon}{(Z_A\,\hbar\,\omega)^{2/3}}\,[\mathrm{MeV}]^{1/3}$$

dargestellt. Dabei bedeutet ε die Teilchenenergie. Wie aus der Abbildung ersichtlich ist, werden kleine Anregungsenergien am besten durch schwere Ionen verwirklicht. Für die Anregung von hochgelegenen Niveaus verwendet man besser Protonen.

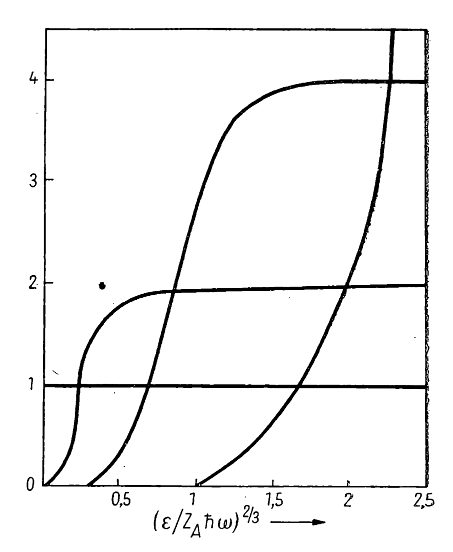


Abb. 67. Verhältnis des Wirkungsquerschnitts für die COULOMB-Anregung eines Kerns (die einem $E2$-Übergang entspricht) durch Deuteronen, α-Teilchen und ^{12}C-Ionen zum Wirkungsquerschnitt der Anregung durch Protonen der gleichen Energie

Über die COULOMB-Anregung von Kernen beim Beschuß mit geladenen Teilchen kann man durch Registrierung der γ-Quanten oder Konversions-

elektronen Aufschluß erhalten, die von den angeregten Kernen beim Übergang in den Grundzustand emittiert werden. Die gemessenen Werte der Anregungsquerschnitte gestatten, die reduzierten Übergangswahrscheinlichkeiten für die entsprechenden elektrischen Übergänge zu berechnen. In der Tab. 31 sind die Werte $B(E2)$ für einige Kerne in Einheiten $e^2 \cdot 10^{-48}$ cm^4 angeführt, die aus Angaben über die COULOMB-Anregung von Kernen $(B_Q(E2))$ und die Lebensdauer der angeregten Zustände $(B_\gamma(E2))$ erhalten wurden. Die Tabelle zeigt, daß beide Meßmethoden zu befriedigender Übereinstimmung führen.

Tabelle 31

Kern	Spin im Grundzustand	Spin im angeregten Zustand	Anregungsenergie [keV]	$B_\gamma(E2)$	$B_Q(E2)$
^{19}F	$^1/_2$	$^5/_2$	197	0,01	0,003
^{51}V	$^7/_2$	$^5/_2$	325	0,008	0,006
^{74}Ge	0	2	595	0,28	0,30
^{152}Sm	0	2	122	3,3	3,1
^{154}Cd	0	2	123	3,6	4,5
^{166}Er	0	2	81	5,7	6,8
^{182}W	0	2	100	4,3	5,6
^{199}Hg	$^1/_2$	$^5/_2$	159	0,35	0,26
^{207}Pb	$^1/_2$	$^5/_2$	569	0,031	0,028

11.11. Streuung von γ-Quanten an Kernen

Ist die Energie der γ-Strahlung kleiner als die Schwellenenergie für die Emission von Nukleonen durch den Kern, so ist bei Wechselwirkung von γ-Strahlung mit Kernen nur elastische oder unelastische Streuung möglich. Experimentell ist es äußerst schwierig, die elastische Streuung der γ-Strahlung von der unelastischen zu unterscheiden, wenn als Strahlungsquelle γ-Quanten der Bremsstrahlung mit kontinuierlicher Energieverteilung verwendet werden. Aus diesem Grund sind Experimente mit monochromatischer Strahlung wertvoller.

Da die Streuung der γ-Quanten nicht nur an den Kernen, sondern in größerem Maße auch an den Elektronen, die den Kern umgeben, vor sich geht, kompliziert sich die Untersuchung der elastischen Streuung an Kernen sehr stark. Die Streuung von γ-Quanten an Elektronen besteht aus 2 Anteilen: der elastischen oder RAYLEIGH-Streuung und der COMPTON-Streuung. In der Arbeit [11,52] wurde gezeigt, daß der Wirkungsquerschnitt der RAYLEIGH-Streuung nur den $(2{,}1 \cdot 10^{-5} Z^{5/3} m\, c^2/\hbar\,\omega)$-ten Teil der COMPTON-Streuung ausmacht. Hierbei bedeuten Z die Zahl der Elektronen im Atom, m die Masse des Elektrons und $\hbar\,\omega$ die Energie des γ-Quants. Mehr als $^3/_4$ der RAYLEIGH-Streuung erfolgt unter Winkeln kleiner als

$$\vartheta_0 = 2 \arcsin(2{,}6 \cdot 10^{-2}\, Z^{1/3} m\, c^2/\hbar\,\omega).$$

ϑ_0 beträgt z. B. 16° bei einer Energie von 0,41 MeV und Streuung am Blei. Für Winkel größer als ϑ_0 drückt sich der Wirkungsquerschnitt je Raumwinkeleinheit durch die Gleichung

$$\frac{d\sigma_R}{d\Omega} = \frac{8{,}67 \cdot 10^{-33}}{\sin^2 \frac{\vartheta}{2}} \left(\frac{Z m c^2}{\hbar \omega}\right)^3 \frac{1 + \cos\vartheta}{2}, \qquad \vartheta > \vartheta_0$$

aus. Die COMPTON-Streuung von γ-Quanten an Elektronen beträgt einige 0,1 barn je Raumwinkeleinheit. Die COMPTON-Streuung um große Winkel ist jedoch von hohen Energieverlusten begleitet und kann nur in Experimenten mit monochromatischer Strahlung berücksichtigt werden.

Die elastische Streuung von γ-Quanten an Kernen ist durch die Resonanzstreuung am Kern und die THOMSON-Streuung an der Kernladung bedingt, wenn die Wellenlänge der γ-Quanten den Kernradius übersteigt. Zum Beispiel übersteigt die Wellenlänge eines Photons mit der Energie 3 MeV die Größe des Bleikerns um das 50fache, so daß für solche γ-Quanten keine Streuung an einzelnen Nukleonen des Kerns zu erwarten ist.

Der Wirkungsquerschnitt für die THOMSON-Streuung von γ-Quanten an Kernen kann aus dem klassischen Ausdruck für die Streuung von Röntgenstrahlung an freien Elektronen erhalten werden, wenn man in dem entsprechenden Ausdruck an Stelle der Masse und Ladung des Elektrons die Masse und Ladung des Kerns benutzt. Der differentielle Wirkungsquerschnitt für die THOMSON-Streuung von γ-Quanten an Kernen bestimmt sich also aus der Gleichung

$$d\sigma_T(\vartheta) = \frac{r_0^2}{2}(1 + \cos^2\vartheta)\, d\Omega$$

mit $r_0 = Z^2 e^2/Mc^2$; M bedeutet die Masse des Kerns. Mit A als Massenzahl gilt

$$d\sigma_T \approx 2{,}39 \cdot 10^{-32} \frac{Z^4 (1 + \cos^2\vartheta)}{2A^2}\, d\Omega \quad [\mathrm{cm}^2].$$

Der totale Wirkungsquerschnitt für die THOMSON-Streuung von γ-Quanten an Kernen beträgt

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \frac{Z^4 e^4}{M^2 c^4}.$$

Dies ist $(m/M)^2 \approx 3/A \cdot 10^{-7}$mal kleiner als der entsprechende Streuquerschnitt an Elektronen. Der wesentliche Anteil der Streuung von γ-Quanten an den Elektronen des Atoms erschwert die Untersuchung der Streuung von γ-Quanten an Kernen.

Besonders schwierig wird die Untersuchung der THOMSON-Streuung an Kernen bei kleinen γ-Energien (<3 MeV), da bei diesen Energien der Anteil der γ-Quanten, der von den Elektronen der Hülle ohne wesentliche Frequenzänderung gestreut wird (RAYLEIGH-Streuung), sehr groß ist und die THOMSON-Streuung an den Atomkernen übersteigt. Diese Schwierigkeit wird dadurch noch vergrößert, daß — obwohl wegen der Frequenzänderung auf Grund der Wärmebewegung und der Rückstoßeffekte des Kerns mit der einfallenden Strahlung nicht kohärent — beide Streutypen untereinander kohärent

sind. Aus diesem Grunde kann man experimentell nur die Gesamtstreuung bestimmen. Die Unterscheidung der Streuung von γ-Quanten an Atomkernen von der RAYLEIGH-Streuung ist nur durch theoretische Abschätzung des Anteils der RAYLEIGH-Streuung möglich. Diese Abschätzungen besitzen aber z. Z. noch keine große Genauigkeit, so daß auch die Interpretationen der experimentellen Resultate nicht eindeutig sein können. Genauere Ausführungen zu diesem Problem findet man in der Arbeit von BURKHARDT [11,53], der die Streuung von γ-Quanten mit einer Energie zwischen 0,5 und 3 MeV an Kernen untersuchte.

Die elastische Resonanzstreuung von γ-Quanten mit Energien zwischen 4 und 28 MeV an den Kernen Au, Pb, U, Cu, Mn, Sn, Bi wurde von FULLER und HAYWARD [11,54] untersucht. Die Abhängigkeit des Streuquerschnitts von der Energie stimmte im wesentlichen mit der Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts der Photokernreaktion (γ, n) (Riesenresonanz) überein. Das Maximum des Streuquerschnitts für Streuung um $120°$ war von der Größenordnung 1 mbarn/sr. Außer dem Hauptmaximum, das dem Maximum der (γ, n)-Reaktion entspricht, wurde für alle untersuchten Elemente außer Gold ein relativ scharfes Maximum beobachtet, das der Energieschwelle der (γ, n)-Reaktion entspricht. Im Gebiet zwischen 4 und 28 MeV ist also die Streuung an Kernen im wesentlichen durch die Resonanzstreuung an Niveaus bedingt, die Kernanregungen entsprechen, die bei der Absorption von γ-Quanten im Gebiet der Riesenresonanz auftreten.

Bei weiterer Vergrößerung der γ-Energie wird der Anteil der Resonanzstreuung kleiner. Am Streuprozeß nehmen einzelne Nukleonen des Kerns teil. Bei Energien größer als 80 MeV verhält sich die Streuung wie die Streuung an freien Protonen und Neutronen (COMPTON-Effekt an Nukleonen). Da jedoch die Energie der γ-Quanten klein gegen Mc^2 bleibt, ist auch die Änderung der γ-Energie noch außerordentlich klein.

Bei Energien über 135 MeV kommt in der Streuung die innere Struktur der Nukleonen zum Ausdruck, und die Wechselwirkung der γ-Quanten mit Nukleonen wird durch Emission von π-Mesonen begleitet.

Bei γ-Energien unterhalb der Schwellenenergie der (γ, n)-Reaktion, bei der die Riesenresonanz beginnt, kann auch Resonanzstreuung an sehr schmalen Kernniveaus auftreten. Diese Resonanzstreuung, die einer virtuellen Absorption und einer darauf folgenden Emission von γ-Quanten durch den Kern entspricht, ist der Resonanzfluoreszenz in Atomen analog.

Der Wirkungsquerschnitt für die Resonanzstreuung von γ-Quanten mit der Energie $\hbar\omega$ an Kernen wird durch die Gleichung

$$\sigma_{\gamma\gamma} = \frac{g}{k^2} \frac{\Gamma_\gamma^2}{(\varepsilon_r - \hbar\omega)^2 + \dfrac{\Gamma^2}{4}}$$

gegeben. Dabei bedeutet g einen statistischen Faktor, der von den Spins der beim Übergang beteiligten Niveaus abhängt. ε_r ist die Resonanzenergie des Niveaus. Ist diese kleiner als die für die Nukleonenemission notwendige Energie, so gilt $\Gamma_\gamma \approx \Gamma$, und der Wirkungsquerschnitt der Resonanzstreuung

muß sehr groß werden: $(\sigma_{\gamma\gamma})_{\text{res}} = 4g\,\lambda\!\!\!^{-2}$. So gilt z. B. für $\varepsilon_r \approx 1$ MeV $(\sigma_{\gamma\gamma})_{\text{res}} \approx 10^{-21}\,\text{cm}^2$. Infolge der außerordentlich kleinen Breite der Kernniveaus $(\Gamma_\gamma \approx 10^{-4} \cdots 10^{-8}\,\text{eV})$ erreicht der Resonanzstreuquerschnitt sehr große Werte nur in einem sehr kleinen Energiegebiet um die Resonanz. Schon bei einem Abstand von 0,5 eV von der Resonanz verkleinert er sich auf den $10^8 \cdots 10^{16}$ten Teil. Dementsprechend ist der totale Wirkungsquerschnitt für die Resonanzstreuung an schmalen Energieniveaus des Kerns sehr klein (proportional $\lambda\!\!\!^{-2}\,\Gamma_\gamma^2/\Gamma$).

Wird ein Kern durch einen γ-Fluß mit kontinuierlichem Spektrum (Bremsstrahlung) bestrahlt, so geht er in den angeregten Zustand nur mit kleiner Wahrscheinlichkeit über, da nur sehr enge Energieintervalle von 10^{-4} bis 10^{-8} eV aus dem kontinuierlichen Strahlungsspektrum für die Kernanregung wirksam sind. Im gesamten γ-Fluß der Bremsstrahlung machen die Quanten in diesen Energieintervallen nur einen außerordentlich kleinen Teil aus, so daß sich die Intensität der Bremsstrahlung (mit Energien kleiner als die Energie der Riesenresonanz) beim Durchgang durch die Kernmaterie praktisch nicht ändert. Bisher gelang es experimentell noch nicht, diejenigen γ-Quanten, die der Resonanzstreuung unterliegen, aus dem Untergrund der großen Anzahl der anderen γ-Quanten der Bremsstrahlung herauszutrennen.

Um die Resonanzstreuung von γ-Quanten an Kernen festzustellen, muß man sie mit γ-Quanten sehr gut monochromatisierter Strahlung bestrahlen. In der Optik wird eine Resonanzstreuung bei Bestrahlung von Atomen mit Photonen, die von den gleichen Atomen emittiert werden, beobachtet [11,55]. In der Kernphysik ist die Benutzung von γ-Quanten, die von einem Kern emittiert wurden, unter gewöhnlichen Bedingungen für die Untersuchung der Streuung an einem anderen ebensolchen Kern wegen der Größe des Rückstoßeffekts bei der Emission und Absorption nicht möglich. Der Rückstoßeffekt führt zu einer Frequenzverschiebung und demzufolge zu einer Störung der Resonanzbedingungen. Nimmt man an, daß die Anregungsenergie des Kerns ε beträgt, so trägt das Quant eine Energie $\hbar\omega$ fort, die auf Grund der Erhaltungssätze von Energie und Impuls

$$\frac{\hbar\,\omega}{c} = p, \qquad \hbar\,\omega + \frac{p^2}{2M} = \varepsilon$$

beträgt, da ein Teil der Anregungsenergie in kinetische Energie des Rückstoßkerns übergeht. Löst man diese Gleichungen nach $\hbar\,\omega$ auf, so erhält man

$$\hbar\,\omega \approx \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2Mc^2}\,.$$

Bei Absorption dieses Quants durch einen anderen Kern geht ein Teil der Energie $(\approx \varepsilon^2/2Mc^2)$ in kinetische Energie dieses Kerns über. Zur Anregung wird der Anteil

$$\varepsilon^* = \hbar\,\omega - \frac{\varepsilon^2}{2Mc^2} = \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{Mc^2}$$

verwendet. Die Differenz $\varepsilon - \varepsilon^*$ ist in der Optik sehr klein $(\approx 10^{-8}\,\text{eV})$, in der Kernphysik jedoch sehr groß. So beträgt z. B. bei $\varepsilon \approx 1$ MeV und

$M \approx 100$ $\varepsilon - \varepsilon^* \approx 10$ eV. Dies ist wesentlich größer als die Breite der Energieniveaus. Trifft man keine besonderen Vorkehrungen für die Kompensation der Energie $\varepsilon^2/2\,M c^2$, die in kinetische Energie bei der Absorption und Emission übergeht, so läßt sich keine Resonanzstreuung verwirklichen. Die DOPPLER-Verbreiterung der Absorptions- und Emissionsbanden auf Grund der Wärmebewegung (s. Abschn. 8.8.) ist bei Zimmertemperatur klein gegen die Energiedifferenz $\varepsilon - \varepsilon^*$ und kann deshalb die Frequenzverschiebung infolge des Kernrückstoßes bei der Emission und Absorption der γ-Quanten nicht kompensieren. In der Optik hat die Frequenzverschiebung durch die Rückstoßatome keinen Einfluß auf die Resonanzstreuung, da sie um einen Faktor ≈ 100 kleiner als die DOPPLER-Verbreiterung der Linien ist.

Zur Verwirklichung der Resonanzstreuung von relativ weichen γ-Quanten (Energie < 1 MeV) an Kernen kann man folgende Methoden verwenden: *a*) Erhitzung von Quelle oder Streumaterial; *b*) mechanische Bewegung der Kerne gegeneinander, was sich durch Verschiebung der Quelle durch eine mechanische Vorrichtung oder durch die Rückstoßwirkung beim β-Zerfall oder bei einer anderen Kernreaktion, die dem Streuprozeß vorangeht, verwirklichen läßt.

Durch Erhitzen der Quelle auf 1100 °C gelang es MALMFOROS [11,56], Resonanzstreuung von γ-Quanten an den Kernen ^{198}Au und ^{198}Hg zu beobachten. Seine experimentellen Resultate konnten von METZGER und TODD [11,57] sowie von METZGER [11,58] bestätigt werden. In der letzten Arbeit gelang es, den Anteil der Resonanzstreuung von γ-Quanten an Kernen gegenüber der RAYLEIGH-Streuung dieser Quanten an Elektronen der Hülle wesentlich zu erhöhen (auf bis zu 8%).

Die mechanische Bewegung der Quelle zur Kompensation der Frequenzverschiebung beim Kernrückstoß wurde in den Versuchen von MOON und STORRUSTE [11,59] angewendet. Dabei gelang es, bei einer Geschwindigkeit der Quelle von $v = 7 \cdot 10^4$ cm/s Resonanzstreuung an ^{198}Hg-Kernen zu beobachten. Die Resonanzstreuung überstieg dabei die RAYLEIGH-Streuung um das 1,5fache.

Die Resonanzstreuung von weichen γ-Quanten konnte auch in einer Reihe weiterer Arbeiten beobachtet werden (DELJAGIN und SCHPINEL [11,60], BURGOW und TERECHOW [11,61], METZGER [11,62], ILAKOVAC [11,63]), wobei Rückstoßkerne verwendet wurden, die im Resultat vorhergehender β- und γ-Zerfälle auftraten.

Bei der Untersuchung der Streuung härterer γ-Quanten (Energie > 1 MeV) wird die Frequenzverschiebung $\varepsilon - \varepsilon^*$ so wesentlich, daß sie sich durch Erwärmung oder mechanische Bewegung nur noch schlecht kompensieren läßt, da zu hohe Temperaturen oder zu große Geschwindigkeiten notwendig werden.

Ausführlichere Angaben über die Resonanzstreuung von γ-Quanten an Kernen findet man bei DSHELEPOW [11,64].

KAPITEL 12

WECHSELWIRKUNG LANGSAMER NEUTRONEN MIT KERNEN

12.1. Begriff der kohärenten und inkohärenten Streulänge von Neutronen an Kernen

In diesem Kapitel untersuchen wir die Wechselwirkung „kalter" und „thermischer" Neutronen mit Kernen. In dieses Gebiet fallen die Neutronen, deren Relativenergie (in bezug auf die Kerne) 0,025 eV nicht übersteigt. Ihre Wellenlänge beträgt $\lambda \geqq 1{,}81 \cdot 10^{-8}$ cm. Beim Durchgang von Neutronen dieser Energie durch ein streuendes Medium mit regelmäßiger Struktur werden Interferenzeffekte beobachtet, da der Abstand zwischen den Atomen in festen Körpern und Flüssigkeiten (10^{-8} cm) von der Größenordnung der Wellenlänge der Neutronen ist.

Auf die Möglichkeit einer kohärenten Streuung von Neutronen an kristallinen Körpern wurde von ELSASSER [12,1] und WICK [12,2] hingewiesen. Die experimentelle Untersuchung dieser Erscheinung war jedoch lange Zeit durch das Fehlen genügend intensiver monochromatischer Neutronenquellen erschwert. Seit einiger Zeit stehen den Experimentatoren nun leistungsfähige Neutronenquellen, die Kernreaktoren, zur Verfügung. Dadurch konnte man umfangreiche Untersuchungen im Gebiet der Wechselwirkung langsamer Neutronen mit Stoffen durchführen. Insbesondere gelang es, die Neutronenbeugung für Strukturuntersuchungen auszunutzen.

Bevor wir Interferenzeffekte untersuchen, die beim Durchgang von Neutronen durch Materie auftreten, betrachten wir die Besonderheiten der Streuung von thermischen Neutronen an freien Kernen. Wie wir in Abschn. 7.5. sahen, wird die Streuung thermischer Neutronen an freien Kernen mit dem Spin 0 (gg-Kerne) vollständig durch die Streulänge a bestimmt, deren Betrag für die meisten Kerne in der Größenordnung des Kernradius ($\approx 10^{-12}$ cm) liegt. Meist ist die Streulänge eine komplexe Zahl $a = \alpha + i\beta$ mit $\beta < 0$ und $|\beta| \ll \alpha$.

Die Streuung von thermischen Neutronen an freien Kernen trägt kugelsymmetrischen Charakter. Daher kann man außerhalb der Reichweite der Kernkräfte ($r > b$) die Wellenfunktion für die Relativbewegung von Neutron und Kern (normiert auf den Einheitsfluß) in folgender Form darstellen:

$$\psi = v^{-1/2}\left(e^{ikz} - a\,\frac{e^{ikr}}{r}\right). \tag{12.1.1}$$

Dabei ist $k = \hbar^{-1}\sqrt{2\mu\,\varepsilon}$; ε bedeutet die Energie der Relativbewegung, μ die reduzierte Masse und v die Geschwindigkeit der Relativbewegung.

Da bei thermischen Energien an der Streuung nur Wellen mit dem Bahndrehimpuls 0 (s-Welle) teilnehmen, ist es manchmal bequemer, an Stelle der vollständigen Funktion (12.1.1) nur die s-Welle ψ_0 zu betrachten. Es läßt sich leicht zeigen, daß

$$\psi_0 = i\left(2k\,r\sqrt{v}\right)^{-1}\{e^{-ikr} - (1 - 2i\,k\,a)\,e^{ikr}\} \tag{12.1.2}$$

gilt. Nach der Definition des Diagonalelements der Streumatrix S_0 (Abschn. 8.2.) wird für unseren Fall

$$S_0 = (1 - 2i\,k\,a). \tag{12.1.3}$$

Nach (8.2.10) und (8.2.12) ist der Wirkungsquerschnitt für die elastische Streuung der s-Welle

$$\sigma_e = \frac{\pi}{k^2}\,|1 - S_0|^2 = 4\pi\,|a|^2 = 4\pi(\alpha^2 + \beta^2) \tag{12.1.4}$$

und der Absorptionsquerschnitt (Reaktionsquerschnitt)

$$\sigma_r = \frac{\pi}{k^2}\,(1 - |S_0|^2) = -\frac{4\pi\beta}{k} - 4\pi(\alpha^2 + \beta^2) = -\frac{4\pi\beta}{k} - \sigma_e. \tag{12.1.5}$$

Aus den letzten beiden Gleichungen folgt unmittelbar, daß der totale Wirkungsquerschnitt für die Streuung und Reaktion der s-Welle

$$\sigma_t = \sigma_e + \sigma_r = -\frac{4\pi\beta}{k}, \quad \beta < 0 \tag{12.1.6}$$

beträgt. Dieses Resultat erhält man auch, wenn man unmittelbar die Gleichung (8.2.15) benutzt.

Sind der Wirkungsquerschnitt für die elastische Streuung (σ_e) und der totale Wirkungsquerschnitt (σ_t) bekannt, so läßt sich nach den Gln. (12.1.4) und (12.1.6) die Streulänge bis auf das Vorzeichen des Realteils bestimmen:

$$a = \pm\left[\frac{\sigma_e}{4\pi} - \left(\frac{k\,\sigma_t}{4\pi}\right)^2\right]^{1/2} - i\,\frac{k\,\sigma_t}{4\pi}.$$

Das Vorzeichen des Imaginärteils der Streulänge ist eindeutig bestimmt.

Fällt die Energie der Neutronen in das Gebiet einer isolierten Resonanz des Compoundkerns, so wird nach Abschn. 8.6. der Streuquerschnitt durch die Gleichung

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2}\left|\frac{\frac{1}{2}\Gamma_e}{\varepsilon - \varepsilon_r - \frac{i}{2}\Gamma} + e^{ikb}\sin kb\right|^2 \tag{12.1.7}$$

gegeben. Hierbei bedeuten Γ_e die Breite für die elastische Neutronenstreuung, Γ die Gesamtbreite des Resonanzniveaus, ε_r die Resonanzenergie und b den Radius des Wirkungsbereichs der Kräfte zwischen Kern und Neutron. Vergleicht man (12.1.7) mit (12.1.4), so erhält man bis auf einen unwesentlichen Phasenfaktor genau einen Ausdruck für die Streulänge im Gebiet der isolierten Resonanz (für $k\,b \ll 1$):

$$a = \frac{1}{2k}\,\frac{\Gamma_e}{\varepsilon - \varepsilon_r - \frac{i}{2}\Gamma} + b. \tag{12.1.8}$$

Die Streulänge im Gebiet einer isolierten Resonanz ist demnach gleich der positiven Streulänge für Potentialstreuung, die durch die „Abmessungen" des Kerns bestimmt wird, plus der Resonanzstreulänge. In den meisten Fällen gilt für thermische Energien $|\varepsilon - \varepsilon_r| \gg \Gamma$, so daß die Streulänge für Resonanzstreuung positiv wird, wenn die Neutronenenergie größer, und negativ, wenn die Neutronenenergie kleiner als die Resonanzenergie ist. Der Absolutbetrag von a hängt stark von der Energiedifferenz $\varepsilon - \varepsilon_r$ ab.

Besitzt der Targetkern den Spin i, so wird entsprechend den beiden möglichen Spinzuständen des Systems $j = i + 1/2$, $i - 1/2$ die Streuung von thermischen Neutronen durch 2 Streulängen a_+ und a_- bestimmt.

Wir führen folgende Projektionsoperatoren ein:

$$\eta_+ = \frac{i + 1 + 2\hat{\mathfrak{i}}\hat{\mathfrak{s}}}{2i + 1}, \tag{12.1.9}$$

$$\eta_- = \frac{i - 2\hat{\mathfrak{i}}\hat{\mathfrak{s}}}{2i + 1}. \tag{12.1.10}$$

Die Wirkung dieser Operatoren auf die Spinfunktion χ_{jm} des Systems wird durch folgende Beziehungen gegeben:

$$\eta_+ \chi_{jm} = \begin{cases} \chi_{jm} & \text{für} \quad j = i + \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{für} \quad j = i - \frac{1}{2}, \end{cases} \qquad \eta_- \chi_{jm} = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad j = i + \frac{1}{2}, \\ \chi_{jm} & \text{für} \quad j = i - \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Die Wellenfunktion der Relativbewegung von Neutron und Kern (Spin i) kann jetzt folgendermaßen geschrieben werden:

$$\psi = v^{-1/2} \left\{ e^{ikz} - (\eta_+ a_+ + \eta_- a_-) \frac{e^{ikr}}{r} \right\} \chi_{jm}.$$

Setzt man den Wert der Projektionsoperatoren (12.1.9) und (12.1.10) ein, so erhält man

$$\psi = v^{-1/2} \left\{ e^{ikz} - a_{\text{eff}} \frac{e^{ikr}}{r} \right\} \chi_{jm} \tag{12.1.11}$$

mit der effektiven Streulänge

$$a_{\text{eff}} \equiv (2i + 1)^{-1} \{(i + 1) a_+ + i a_- + 2\hat{\mathfrak{i}}\hat{\mathfrak{s}} (a_+ - a_-)\} \tag{12.1.12}$$

als Operator. Der mittlere Streuquerschnitt für nichtpolarisierte Neutronen ergibt sich aus dem Quadrat der effektiven Streulänge, gemittelt über die Spinzustände:

$$\sigma = 4\pi \langle a_{\text{eff}}^2 \rangle. \tag{12.1.13}$$

Besteht keine Spinkorrelation zwischen Neutron und Kern, so gilt $\langle \hat{\mathfrak{i}}\hat{\mathfrak{s}} \rangle = 0$ und

$$\langle (\hat{\mathfrak{i}}\hat{\mathfrak{s}})^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle \hat{\mathfrak{i}}^2 \hat{\mathfrak{s}}^2 \rangle = \frac{i(i + 1)}{4}.$$

Der über die Spinzustände gemittelte Streuquerschnitt kann in Form einer Summe dargestellt werden:

$$\sigma = \sigma_k + \sigma_{nk}, \tag{12.1.14}$$

wobei

$$\sigma_k = 4\pi \left| \frac{i+1}{2i+1} a_+ + \frac{i}{2i+1} a_- \right|^2 \tag{12.1.15}$$

den Wirkungsquerschnitt für kohärente Streuung und

$$\sigma_{nk} = 4\pi \frac{i(i+1)}{(2i+1)^2} |a_+ - a_-|^2 \tag{12.1.16}$$

den Wirkungsquerschnitt für inkohärente Streuung bedeuten.

Der mittlere Wirkungsquerschnitt für die Streuung an einem Kern ist also

$$\sigma = \sigma_k + \sigma_{nk} = 4\pi \left\{ \frac{i+1}{2i+1} |a_+|^2 + \frac{i}{2i+1} |a_-|^2 \right\}. \tag{12.1.17}$$

Der Begriff der Kohärenz oder Inkohärenz für die Streuung von Neutronenwellen an einem Kern ist durch die Möglichkeit einer Interferenz der gestreuten Wellen mit der einfallenden Welle gegeben. Meist werden die Experimente an Targets mit einer großen Anzahl von Kernen durchgeführt. Ist die Wellenlänge der Neutronen vergleichbar mit dem Abstand zwischen den Kernen oder größer als dieser, so wird die Aufspaltung des totalen Wirkungsquerschnitts (12.1.14) in Wirkungsquerschnitte für kohärente und inkohärente Streuung für die Berechnung der Neutronenstreuung an einer Reihe von Kernen sehr wesentlich. Befinden sich z. B. zwei identische Kerne mit nichtkorrelierten Spins in einem Abstand kleiner als die Wellenlänge des Neutrons, so wird der über die Spinzustände gemittelte Streuquerschnitt durch den Ausdruck

$$\sigma_{1,2} = 4\pi \langle | a_{\text{eff}}(1) + a_{\text{eff}}(2) |^2 \rangle$$

geliefert. Benutzt man Gl. (12.1.12) und bezeichnet die Spinoperatoren der Kerne mit $\hat{\mathfrak{i}}_1$ und $\hat{\mathfrak{i}}_2$, so läßt sich schreiben

$$\sigma_{1,2} = \frac{4\pi}{(2i+1)^2} \langle |2[(i+1)\, a_+ + i\, a_-] + 2[\hat{\mathfrak{i}}_1 \hat{\mathfrak{s}} + \hat{\mathfrak{i}}_2 \hat{\mathfrak{s}}]\, (a_+ - a_-)|^2 \rangle .$$

Für nichtkorrelierte Kernspins gilt $\langle (\hat{\mathfrak{i}}_1 \hat{\mathfrak{s}})\, (\hat{\mathfrak{i}}_2 \hat{\mathfrak{s}}) \rangle = 0$, und man erhält unter Berücksichtigung der Bezeichnungen (12.1.15) und (12.1.16)

$$\sigma_{1,2} = 4\sigma_k + 2\sigma_{nk} .$$

Der Wirkungsquerschnitt für die Streuung von Neutronen an einem System aus 2 Kernen ist also die Summe aus den Wirkungsquerschnitten für inkohärente Streuung an jedem Kern und dem Wirkungsquerschnitt für kohärente Streuung. Um den Wirkungsquerschnitt für kohärente Streuung zu erhalten, sind nicht die Wirkungsquerschnitte, sondern die Streulängen für kohärente Streuung zu addieren, da die Interferenzerscheinung bereits durch die Streulänge für kohärente Streuung an jedem Kern bestimmt wird:

$$a_k = \frac{i-1}{2i+1} a_+ + \frac{i}{2i+1} a_- . \tag{12.1.18}$$

Im allgemeinen Fall gilt $|a_k| \leq \sqrt{\sigma/4\pi}$ mit σ als totalem Streuquerschnitt. Das Gleichheitszeichen entspricht dem Fall, daß die Streulänge nicht vom Spinzustand des Systems abhängt, d. h., daß $a_+ = a_-$ gilt. Dabei ist die gesamte

Streuung nur kohärente Streuung. Haben die Streulängen a_+ und a_- verschiedene Vorzeichen, dann kann die Streulänge für kohärente Streuung sehr klein werden. So ist z. B. für den Wasserstoffkern der Wirkungsquerschnitt für kohärente Streuung ungefähr 40 mal kleiner als der totale Streuquerschnitt (der Wirkungsquerschnitt für kohärente Streuung beträgt 1,79 barn, der totale Wirkungsquerschnitt 81,4 barn). Beim Beryllium hängt die Streulänge nur schwach vom Spin ab, so daß σ_k etwa gleich dem totalen Streuquerschnitt ist. Für Natrium gilt $\sigma_k = 1{,}55$ barn bei einem wesentlich kleineren totalen Streuquerschnitt von 3,6 barn. Die Streuung an Natrium besteht also zur Hälfte aus spinabhängiger inkohärenter Streuung. Ein dem Wasserstoff ähnliches Bild beobachtet man beim Vanadin. Hierfür beträgt σ_k nur 0,03 barn, der totale Streuquerschnitt jedoch 5 barn. Umgekehrt sind für alle gg-Kerne mit dem Spin 0 der totale Wirkungsquerschnitt und der Wirkungsquerschnitt für kohärente Streuung gleich.

Die oben betrachtete Inkohärenz der Streuung kann als *Spininkohärenz* bezeichnet werden, da sie die Abhängigkeit der Streuung vom Spin des Systems beschreibt. Die kohärente Streuung ist durch Stoß ohne Umklappen des Neutronenspins bedingt.

Interferenzerscheinungen beobachtet man nur für Neutronen mit großen Wellenlängen. Dabei ist die Neutronenenergie klein gegen die Bindungsenergie der Streuzentren (Kerne) in den Molekülen und Kristallen. Deshalb muß man bei der Untersuchung kohärenter Streuung von Neutronen an Kristallen die Streulänge für einen Kern benutzen, der eine sehr große Masse in den Molekülverband einbringt. Da die Streulänge der reduzierten Masse von Neutron und Streuzentrum proportional ist, existiert zwischen den Streulängen an freien und gebundenen Kernen die einfache Beziehung (s. Abschn. 7.7.)

$$(\mu\, a)_{\text{geb}} = (\mu\, a)_{\text{frei}}.$$

Für einen Kristall gilt $\mu_{\text{geb}} = M$, $\mu_{\text{frei}} = MA/(A+1)$ und damit

$$a_{\text{geb}} = \frac{A+1}{A}\, a_{\text{frei}}.$$

Im weiteren verstehen wir unter der Streulänge a für kohärente Streuung immer die Streulänge a_{frei}, wenn nichts anderes gesagt ist.

12.2. Kohärente Streuung von langsamen Neutronen an polykristallinen Stoffen mit unendlich schweren Kernen

Wie im vorhergehenden Abschnitt gezeigt wurde, ist die kohärente Streuung nur durch den kohärenten Anteil der Streuamplitude bedingt. Wir wollen nun den Einfluß der räumlichen Verteilung der Kerne auf die Streuung von thermischen Neutronen untersuchen. Der Einfachheit halber werden wir annehmen, daß der Kern keinen Spin besitzt und eine unendlich große Masse hat. In diesem Fall verlaufen alle Stöße ohne Änderung der kinetischen Energie der Neutronen (elastische Streuung).

Die Lage der Kerne im Einkristall sei durch die Radiusvektoren

$$\mathfrak{n} = \sum_{i=1}^{3} n_i \mathfrak{d}_i$$

festgelegt. Hierbei bedeuten $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}_2$, $\mathfrak{d}_3$ die Basisvektoren der Einheitszelle im Kristall. n_i durchläuft alle ganzzahligen Werte 0, 1, ..., N_i; $(N_1 + 1)(N_2 + 1)(N_3 + 1) = N$ ist die Gesamtzahl der Kerne im Kristall.

Bezeichnet man die Wellenvektoren des Neutrons vor der Streuung mit $\mathfrak{k}$ und nach der Streuung mit $\mathfrak{k}'$, so kann man die Wellenfunktion des Neutrons in großem Abstand vom Einkristall in der Form

$$\psi = e^{ikz} - \frac{a}{r} e^{ikr} \sum_{\mathfrak{n}} \exp\{i\, \mathfrak{n}(\mathfrak{k} - \mathfrak{k}')\}$$

schreiben. Hierbei entspricht a dem kohärenten Teil der Streulänge ($a \equiv a_k$). Zu summieren ist über n_1, n_2, n_3.

Der Streuquerschnitt je Raumwinkeleinheit in der Richtung $\mathfrak{k}'$, bezogen auf einen Kern, lautet

$$\frac{d\sigma(\mathfrak{k}')}{d\Omega} = \frac{|a|^2}{N} \left| \sum_{\mathfrak{n}} \exp\{i\, \mathfrak{n}(\mathfrak{k} - \mathfrak{k}')\} \right|^2. \tag{12.2.1}$$

Zur Berechnung von (12.2.1) drückt man die Wellenvektoren $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{k}'$ bequemer durch die *Basisvektoren des reziproken Gitters* $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{b}_3$ aus, die mit den *Basisvektoren des direkten Gitters* $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}_2$, $\mathfrak{d}_3$ durch die Beziehungen

$$\mathfrak{b}_1 = B^{-1}[\mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3], \qquad \mathfrak{b}_2 = B^{-1}[\mathfrak{d}_3, \mathfrak{d}_1], \qquad \mathfrak{b}_3 = B^{-1}[\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2]$$

verknüpft sind, wobei $B = \mathfrak{d}_1[\mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3]$ das Volumen der Elementarzelle bedeutet:

$$B\, \mathfrak{b}_1[\mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3] = 1.$$

Setzt man $\mathfrak{k} - \mathfrak{k}' = \sum_{i=1}^{3} (k_i - k_i')\, \mathfrak{b}_i$ und berücksichtigt $\mathfrak{d}_i \mathfrak{b}_j = \delta_{ij}$, so erhält man

$$\mathfrak{n}(\mathfrak{k} - \mathfrak{k}') = \sum_{i=1}^{3} n_i (k_i - k_i').$$

Setzt man dies in (12.2.1) ein, so folgt

$$\frac{d\sigma(\mathfrak{k}')}{d\Omega} = \frac{|a|^2}{N} F(\mathfrak{k} - \mathfrak{k}') \tag{12.2.2}$$

mit

$$F(\mathfrak{k} - \mathfrak{k}') \equiv \prod_{j=1}^{3} \left| \sum_{n_j=0}^{N_j} \exp\{i\, n_j (k_j - k_j')\} \right|^2 = \prod_{j=1}^{3} \frac{\sin^2\left\{\frac{(N_j + 1)(k_j - k_j')}{2}\right\}}{\sin^2\left(\frac{k_j - k_j'}{2}\right)}$$

als sogenanntem Strukturfaktor. Für $N \to \infty$ wird

$$F(\mathfrak{k} - \mathfrak{k}') = \prod_{j=1}^{3} \{2\pi (N_j + 1)\, \delta(k_j - k_j' - 2\pi \tau_j)\}, \tag{12.2.3}$$

wobei als Argumente der δ-Funktion die Komponenten des Vektors im Koordinatensystem mit den Basisvektoren des reziproken Gitters auftreten. Führt man die kartesischen Koordinaten dieser Vektoren ein, so wird[1])

$$\prod_j \delta(k_j - k_j' - 2\pi\tau_j) = B^{-1}\,\delta(k_x - k_x' - 2\pi\tau_x) \times$$
$$\times\, \delta(k_y - k_y' - 2\pi\tau_y)\,\delta(k_z - k_z' - 2\pi\tau_z)$$

und damit

$$F(\mathfrak{k} - \mathfrak{k}') = \frac{(2\pi)^3 N}{B}\,\delta(\mathfrak{k} - \mathfrak{k}' - 2\pi\vec{\tau}), \qquad (12.2.3\text{a})$$

wobei $\vec{\tau} = \sum_{j=1}^{3} \tau_j \mathfrak{b}_j$ ein Vektor des reziproken Gitters ist, der durch die Basisvektoren des reziproken Gitters $\mathfrak{b}_j$ und die ganzen Zahlen τ_j bestimmt wird, die als MILLERsche *Indizes* der Spiegelebenen bezeichnet werden. Jedem Vektor des reziproken Gitters $\vec{\tau}$ entspricht eine Schar von parallelen Kristallgitterebenen, deren Gleichung $\tau \sum_{j=1}^{3} \nu_j d_j = m$ mit ganzen Zahlen ν_1, ν_2, ν_3 und m lautet. Der Abstand zwischen benachbarten Ebenen beträgt $1/\tau$. Für den Fall des einfachen kubischen Gitters mit der Seitenlänge d gilt

$$\frac{1}{\tau} = d(\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2)^{-1/2}.$$

Bei Berücksichtigung von (12.2.3a) nimmt der Wirkungsquerschnitt für elastische Streuung folgende Form an:

$$\frac{d\sigma(\mathfrak{k}')}{d\Omega} = \frac{(2\pi)^3 |a|^2}{B}\,\delta(\mathfrak{k} - \mathfrak{k}' - 2\pi\vec{\tau}). \qquad (12.2.4)$$

Für Einkristalle großer Abmessung ($N \to \infty$) besitzt Gl. (12.2.4) scharfe Maxima bei Erfüllung der BRAGGschen Bedingung

$$\mathfrak{k} - \mathfrak{k}' = 2\pi\vec{\tau}. \qquad (12.2.5)$$

Die BRAGGsche Bedingung ist für Vorwärtsstreuung ($\mathfrak{k} = \mathfrak{k}'$) stets erfüllt ($\tau = 0$). Im weiteren bezeichnen wir mit elastischer Streuung nur die Streuung unter Winkeln $\vartheta \neq 0$. Damit ist der Fall $\tau = 0$ ausgeschlossen, wenn nichts anderes gesagt wird. Für Kristalle mit endlichen Maßen besitzen die Maxima im Wirkungsquerschnitt (12.2.4) eine endliche Winkelbreite der Größenordnung $\approx (k\,L)^{-2}$, wenn L die lineare Abmessung des Kristalls bedeutet.

Um den mittleren Wirkungsquerschnitt für elastische Streuung von Neutronen an Polykristallen zu bestimmen, muß (12.2.4) über alle Richtungen des Vektors $\vec{\tau}$ bei gegebenem Betrag von $\vec{\tau}$ gemittelt werden. Bei festem τ

[1]) Die Komponenten des Vektors $\mathfrak{A}$ seien im kartesischen Koordinatensystem A_x, A_y, A_z und im Basissystem des reziproken Gitters A_1, A_2, A_3. Dann gilt $A_j = \mathfrak{d}_j \mathfrak{A} = d_{jx} A_x + d_{jy} A_y + d_{jz} A_z$. Aus diesen Gleichungen folgt $dA_1\, dA_2\, dA_3 = B^{-1}\, dA_x\, dA_y\, dA_z$ mit $B = \mathfrak{d}_1 [\mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3]$.

entspricht einem gegebenen Wellenvektor $\mathfrak{k}$ der einfallenden Neutronen nach (12.2.5) eine Richtung $\mathfrak{k}'$, die mit $\mathfrak{k}$ den Winkel ϑ bildet, wobei ϑ der Bedingung

$$\sin\frac{\vartheta}{2} = \frac{\pi\tau}{k} \quad \text{oder} \quad 2d\sin\frac{\vartheta}{2} = \lambda \tag{12.2.6}$$

mit $d = 1/\tau$ als Abstand zwischen den BRAGGschen Ebenen im Kristall genügt.

Aus (12.2.6) folgt unmittelbar, daß nur die τ-Werte einen Beitrag zur Streuung liefern, die der Ungleichung

$$\tau \leqq \frac{k}{\pi} \quad \text{oder} \quad \frac{\lambda}{2} \leqq d \tag{12.2.7}$$

genügen. Für Neutronen mit Wellenlängen größer als dem doppelten maximalen Abstand zwischen den Kristallgitterebenen ist die BRAGGsche Bedingung (für Streuung mit $\vartheta \neq 0$) auch nicht für einen Mikrokristall erfüllt. Solche Neutronen gehen durch den Kristall ohne wesentliche Seitwärtsstreuung hindurch. Auf diese Eigenschaft ist die Wirkung von Filtern begründet, die in einem durchlaufenden Neutronenbündel das kurzwellige Gebiet im Spektrum abschneiden. Als Filter werden mikrokristalline Stoffe verwendet, die Neutronen nur schwach absorbieren und nur kohärente Spinstreuung aufweisen. Zum Beispiel kann Berylliumoxyd ($d = 4{,}4$ Å) oder Graphit ($d = 6{,}7$ Å) verwendet werden. In der aus der Arbeit [12,3] entnommenen Abb. 68 ist ein Teil des Neutronenspektrums eines thermischen Reaktors dargestellt. Die thermischen Neutronen wurden in polykristallinem Berylliumoxyd gefiltert. Verwendet man Graphit als Filter, so lassen sich Neutronen mit Energien um 18 °K erhalten.

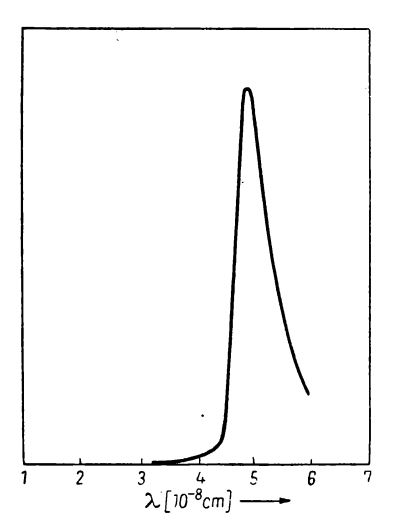


Abb. 68. Spektrum der mit Berylliumoxyd gefilterten Neutronen eines thermischen Reaktors

Zur Mittelung von (12.2.4) über alle Richtungen $\vec{\tau}$ legen wir die Polarkoordinatenachse in die Richtung von $\mathfrak{k} - \mathfrak{k}'$. Die Polarkoordinaten des Vektors $\vec{\tau}$ seien τ, ϑ, φ. Zunächst berechnen wir das Integral

$$D \equiv \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \sin\varphi\, \delta(\mathfrak{k} - \mathfrak{k}' - 2\pi\vec{\tau}).$$

Wir gehen von den Variablen ϑ, φ zu $2\pi\tau_x$, $2\pi\tau_y$ über. Wegen

$$d\vartheta\, d\varphi = \frac{d(2\pi\tau_x)\, d(2\pi\tau_y)}{4\pi^2\tau^2\cos\vartheta}$$

und wegen der Tatsache, daß die Komponenten des Vektors $\mathfrak{k} - \mathfrak{k}'$ in Richtung der x- und y-Achse verschwinden (Wahl der Polarkoordinatenachse), kann man schreiben

$$D = (4\pi^2 \tau^2)^{-1} \iint \delta(|\mathfrak{k} - \mathfrak{k}'| - 2\pi \tau_z)\, \delta(2\pi \tau_x)\, \delta(2\pi \tau_y) \frac{d(2\pi \tau_x)\, d(2\pi \tau_y)}{\cos\vartheta}.$$

Führt man die Integration aus, so erhält man den Integranden bei $\tau_z = \tau$ und $\cos\vartheta = 1$:

$$D = (2\pi^2 \tau^2)^{-1}\, \delta(|\mathfrak{k} - \mathfrak{k}'| - 2\pi \tau). \qquad (12.2.8)$$

Bei elastischer Streuung gilt $k = k'$ und $|\mathfrak{k} - \mathfrak{k}'| = 2k \sin\Theta/2$ mit Θ als Streuwinkel. Bezeichnet man den Mittelwert des Streuquerschnitts (12.2.4) mit $d\sigma(\Theta)/d\Omega$, so folgt unter Berücksichtigung von (12.2.8)

$$\frac{d\sigma(\Theta)}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{d\sigma(k')}{d\Omega}\, d\varphi\, d\vartheta = \frac{|a|^2}{2B\tau^2}\, \delta\left(2k \sin\frac{\Theta}{2} - 2\pi\tau\right). \qquad (12.2.9)$$

Zur Bestimmung des totalen Streuquerschnitts der Neutronen integrieren wir (12.2.9) über den Streuwinkel ($d\Omega = 2\pi \sin\Theta\, d\Theta$):

$$\sigma_\tau = \int \frac{d\sigma(\Theta)}{d\Omega}\, d\Omega = \frac{2\pi^2}{B k^2 \tau} |a|^2$$

und summieren über alle zulässigen Vektoren des reziproken Gitters:

$$\sigma = \frac{2\pi^2}{B k^2} |a|^2 \sum_{\tau \leqq k/\pi} \frac{1}{\tau}. \qquad (12.2.10)$$

Für das einfache kubische Gitter ($B = d^3$) wird die Grenzwellenlänge für Neutronen, mit der die elastische kohärente Streuung beginnt, durch Spiegelung an 6 Ebenen (100), (010), . . ., für deren jede $1/\tau = 2d$ ist, bestimmt. Die Grenzwellenlänge beträgt somit $\lambda_{\text{gr}} = 2d$, und der entsprechende Streuquerschnitt wird aus (12.2.10) erhalten:

$$\sigma_{\text{gr}} = 6 \frac{2\pi^2 |a|^2}{k_{\text{gr}}^2 d^2} = \frac{3}{\pi} \sigma_0, \qquad \sigma_0 = 4\pi |a|^2.$$

Mit abnehmender Wellenlänge nehmen immer mehr Ebenen an der Spiegelung teil, und der beobachtete Wirkungsquerschnitt wird bei beliebiger Wellenlänge durch die Summe aller Beiträge der einzelnen spiegelnden Ebenen bestimmt. Dabei ändert sich nach (12.2.10) der Anteil jeder Ebenengruppe umgekehrt proportional zu k^2 (d. h. zur Neutronenenergie). Bei Energien der Größenordnung 0,1 eV spiegeln bereits so viele Ebenengruppen, daß der Wirkungsquerschnitt zu einer sich stetig mit der Energie ändernden Funktion wird. In Abb. 69 ist die Änderung des totalen Wirkungsquer-

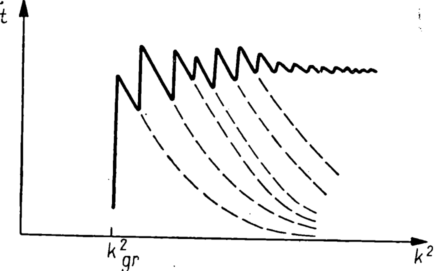


Abb. 69. Totaler Wirkungsquerschnitt für die Streuung von Neutronen an polykristallinem Silber in Abhängigkeit von der Energie

schnitts für Neutronenstreuung an polykristallinem Silber dargestellt. Die Beiträge der einzelnen Gruppen von Kristallebenen sind deutlich zu erkennen.

12.3. Isotopische Inkohärenz der gestreuten Neutronenwellen

Nach der Quantenmechanik ist jede Streuung, die durch eine Änderung des inneren Zustandes (Spin, Energie usw.) des streuenden Kerns begleitet wird, inkohärent, da die Änderung des Quantenzustandes der Grund dafür ist, daß keine Interferenzen auftreten. Dieser Kohärenzbegriff ist bereits für ein Streuzentrum anwendbar. Hierzu gehört die durch unelastische Streuung bedingte Inkohärenz sowie die oben betrachtete Spininkohärenz (Abschn. 12.2.).

Bei der Untersuchung der an einem System von Streuzentren gestreuten Wellen treten weitere Inkohärenzen nur dann nicht auf, wenn die Lage der Streuzentren streng fixiert ist (ideales Gitter) und wenn die Streuzentren identisch sind. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so tritt eine weitere Inkohärenz auf Grund von veränderlichen Phasenbeziehungen zwischen den von verschiedenen Zentren gestreuten Wellen auf. Dies führt zu einer diffusen Streuung. Derartige Inkohärenzen können durch die Wärmebewegung der Kerne auf den Gitterplätzen des Kristallgitters, durch die unregelmäßige Verteilung isotoper Kerne, wenn diese verschiedene Streulängen besitzen, durch die regellose Verteilung von verschiedenen Legierungskomponenten usw. hervorgerufen werden.

In diesem Abschnitt untersuchen wir die sogenannte *isotopische Inkohärenz*, die durch die unregelmäßige räumliche Verteilung isotoper Kerne hervorgerufen wird. Wir nehmen an, daß der Kristall aus Kernen eines Elements mit mehreren Isotopen besteht. Die isotopen Atome seien auf die Gitterplätze mit den Wahrscheinlichkeiten $c_1, c_2, \ldots$ verteilt, so daß $\sum_j c_j = 1$ gilt. Weiterhin nehmen wir an, daß die Kernmassen unendlich groß sind. Die Spins seien gleich Null, und die Streueigenschaften der Neutronen durch die einzelnen Isotope seien durch die entsprechenden Streulängen $a_1, a_2, \ldots$ gegeben.

Bei regelloser räumlicher Verteilung würde jeder Kern unabhängig streuen. Der Mittelwert des Streuquerschnitts je Kern wäre

$$\sigma = 4\pi \sum_{j=1} c_j \, |a_j|^2. \qquad (12.3.1)$$

Bei regelmäßiger räumlicher Verteilung der Kerne müssen die Interferenzen berücksichtigt werden. Der Streuquerschnitt (je Kern) je Raumwinkeleinheit in der Richtung $\mathfrak{k}'$ läßt sich bei bestimmter Verteilung der Isotope in Analogie zu (12.2.1) in der Form

$$\frac{d\sigma(\mathfrak{k}')}{d\Omega} = \frac{1}{N} \left| \sum_{\mathfrak{n}} a_{\mathfrak{n}} \exp\{i\, \mathfrak{n}(\mathfrak{k} - \mathfrak{k}')\} \right|^2 \qquad (12.3.2)$$

schreiben. Dabei bedeuten $a_{\mathfrak{n}}$ die Streulänge des Isotops am Ort $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{k}$ den Wellenvektor der einfallenden Neutronen und N die Anzahl der Streuzentren (Kerne).

Wir führen den Mittelwert der Streulänge ein:

$$a = \frac{1}{N} \sum_{\mathfrak{n}} a_{\mathfrak{n}} = \sum_{j} c_j a_j . \tag{12.3.3}$$

Dann gilt

$$a_{\mathfrak{n}} = a + \Delta a_{\mathfrak{n}} \tag{12.3.4}$$

mit

$$\sum_{\mathfrak{n}} \Delta a_{\mathfrak{n}} = \sum_{j} c_j \Delta a_j = 0 .$$

Setzt man (12.3.4) in (12.3.2) ein, so erhält man

$$\frac{d\sigma(\mathfrak{k}')}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma(\mathfrak{k}')}{d\Omega}\right)_{\text{koh}} + \left(\frac{d\sigma(\mathfrak{k}')}{d\Omega}\right)_{\text{diff}}, \tag{12.3.5}$$

wobei

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{koh}} = \frac{|a|^2}{N} \left| \sum_{\mathfrak{n}} \exp\{i\,\mathfrak{n}(\mathfrak{k} - \mathfrak{k}')\}\right|^2$$

der Wirkungsquerschnitt für kohärente Streuung ist, der mit dem Wirkungsquerschnitt (12.3.1) zusammenfällt, sehr stark vom Streuwinkel abhängt und scharfe Maxima für die Richtungen besitzt, die der Braggschen Bedingung $\mathfrak{k} - \mathfrak{k}' = 2\pi \vec{\tau}$ genügen (s. Abschn. 12.2.).

Die mittlere Streulänge (12.3.3) ist somit identisch mit der kohärenten Streulänge:

$$a_{\text{koh}} \equiv a = \sum_{j=1} c_j a_j .$$

Der zweite Summand in (12.3.5) ist

$$\left(\frac{d\sigma(\mathfrak{k}')}{d\Omega}\right)_{\text{diff}} = \frac{1}{N} \sum_{\mathfrak{n}} \sum_{\mathfrak{n}'} \Delta a_{\mathfrak{n}} \Delta a_{\mathfrak{n}}^{*} \exp\{i(\mathfrak{k} - \mathfrak{k}')(\mathfrak{n} - \mathfrak{n}')\} =$$
$$= \frac{1}{N} \sum_{\mathfrak{m}} \exp\{i(\mathfrak{k} - \mathfrak{k}')\,\mathfrak{m}\} \sum_{\mathfrak{n}} \Delta a_{\mathfrak{n}+\mathfrak{m}} \Delta a_{\mathfrak{n}}^{*} .$$

Bei regelloser Verteilung der Isotope auf den Gitterplätzen sind für jeden Wert $\mathfrak{m} \neq 0$ die $\Delta a_{\mathfrak{n}}^{*}$ und $\Delta a_{\mathfrak{n}+\mathfrak{m}}$ unabhängig, so daß gilt

$$\sum_{\mathfrak{n}} \Delta a_{\mathfrak{n}+\mathfrak{m}} \Delta a_{\mathfrak{n}}^{*} = 0 .$$

Der Streuquerschnitt

$$\left(\frac{d\sigma(\mathfrak{k}')}{d\Omega}\right)_{\text{diff}} = \frac{\sigma_{\text{diff}}}{4\pi} = \frac{1}{N} \sum_{\mathfrak{n}} |\Delta a_{\mathfrak{n}}|^2 = \sum_{j} c_j \, |\Delta a_j|^2 \tag{12.3.6}$$

hängt somit nicht vom Streuwinkel ab und kann als Wirkungsquerschnitt der diffusen isotopischen Streuung bezeichnet werden. Diese Streuung ist durch die isotopische Inkohärenz bedingt. Besitzen alle in den Kristall eingehenden Isotope die gleiche Streulänge, so ist keine isotopische Inkohärenz vorhanden, da $\Delta a_j = 0$ gilt.

Im Spezialfall zweier Isotope im Gitter gilt $a = c_1 a_1 + c_2 a_2$, $\Delta a_1 = a_1 - a = c_2(a_1 - a_2)$, $\Delta a_2 = c_1(a_2 - a_1)$. Es ergibt sich

$$\sigma_{\text{diff}} = 4\pi \{c_1 |\Delta a_1|^2 + c_2 |\Delta a_2|^2\} = 4\pi c_1 c_2 |a_1 - a_2|^2 .$$

Setzt man $\Delta a_j = a_j - a$ in die Gl. (12.3.6) ein, so findet man leicht für den Wirkungsquerschnitt der diffusen Streuung

$$\sigma_{\text{diff}} = 4\pi \{ \sum_j c_j |a_j|^2 - |a|^2 \}.$$

Die isotopische Inkohärenz führt zur diffusen Neutronenstreuung und ruft folglich ein exponentielles Abklingen der kohärenten Welle hervor.

Wäre die räumliche Verteilung der Isotope auf irgendeine Weise korreliert (was meist nicht der Fall ist), so gälte für $\mathfrak{m} \neq 0$ $\sum_{\mathfrak{n}} \Delta a_{\mathfrak{n}+\mathfrak{m}} \Delta a_{\mathfrak{n}} = f_{\mathfrak{m}}$ und damit

$$\left(\frac{d\sigma(\mathfrak{k}')}{d\Omega}\right)_{\text{diff}} = \frac{1}{N} \sum_{\mathfrak{n}} |\Delta a_{\mathfrak{n}}|^2 + \frac{1}{N} \sum_{\mathfrak{m}} f_{\mathfrak{m}} e^{i(\mathfrak{k}-\mathfrak{k}')\mathfrak{m}}. \tag{12.3.7}$$

Das zweite Glied in (12.3.7) hängt vom Streuwinkel ab und bestimmt die anisotrope diffuse Streuung. Im Falle isotopischer Inkohärenz wird dieser Teil der Streuung meist gleich Null.

12.4. Elastische Streuung langsamer Neutronen an Kristallen unter Berücksichtigung der Atomschwingungen

Läßt man die vereinfachende Annahme über die fixierte Lage der Streuzentren fallen, so kann man die unelastische Streuung langsamer Neutronen in Kristallen berücksichtigen, die mit dem Energieaustausch zwischen den Neutronen und den Gitterschwingungen verknüpft ist. Mit dieser Frage beschäftigen sich die theoretischen Arbeiten von Pomerantschuk [12,4], Weinstock [12,5], Achijeser und Pomerantschuk [12,6] und anderen [12,7].

Bei der Untersuchung der unelastischen Streuung von Neutronen an Kristallen kann man den analytischen Ausdruck für die Wechselwirkung langsamer Neutronen mit Kernen verwenden. Diese Art der Wechselwirkung wurde von Fermi eingeführt [12,8] und wird als *Kernpseudopotential* bezeichnet. Nach Fermi wird die Wechselwirkung langsamer Neutronen mit Kernen in Form einer Diracschen Deltafunktion ausgedrückt:

$$V(\mathfrak{r}) = A\,\delta(\mathfrak{r}). \tag{12.4.1}$$

Die Konstante A wird so gewählt, daß sich schon in der Bornschen Näherung der richtige Wert für die Streulänge ergibt.

Es sei R der Kernradius. Dann besitzt die mit r multiplizierte Radialwellenfunktion bei $kR \ll 1$ außerhalb des Kerns nach (12.1.1) folgende Form:

$$\varphi = r\,\psi = \alpha(r - a) \tag{12.4.2}$$

mit a als Streulänge. Innerhalb des Kerns muß die Funktion φ folgender Gleichung genügen:

$$\varphi'' - u(r)\,\varphi = 0 \tag{12.4.3}$$

mit der Randbedingung $\varphi(0) = 0$. Dabei ist $u = \frac{2\mu}{\hbar^2} V(r)$.

Wir schreiben die Gl. (12.4.3) in etwas anderer Form:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{\varphi}{\varphi'}\right) = 1 - \frac{\varphi\varphi''}{(\varphi')^2} = 1 - u(r)\left(\frac{\varphi}{\varphi'}\right)^2.$$

Integriert man dies über r von 0 bis r, so erhält man

$$\left(\frac{\varphi}{\varphi'}\right)_r = r - \int_0^r u(r) \left(\frac{\varphi}{\varphi'}\right)^2 dr. \tag{12.4.4}$$

Ist die Ungleichung $R \gg \left| \int_0^R u(r)\, r^2\, dr \right|$ erfüllt, so wird $(\varphi/\varphi')^2 \sim r^2$, und (12.4.4) nimmt folgende Form an:

$$\left(\frac{\varphi}{\varphi'}\right)_r = r - \int_0^r u(r)\, r^2\, dr. \tag{12.4.4a}$$

Setzt man (12.4.4a) für $r = R$ gleich dem entsprechenden Ausdruck für die Funktion (12.4.2) außerhalb des Kerns, so folgt

$$a = \int_0^R u(r)\, r^2\, dr = \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int V(r)\, d\tau. \tag{12.4.5}$$

Diese Gleichung verknüpft die Streulänge mit dem Mittelwert der Wechselwirkungsenergie im Kernvolumen. Setzt man $V(r) = A\,\delta(r)$, so läßt sich aus (12.4.5) der Wert der Konstanten ermitteln:

$$A = \frac{2\pi\hbar^2}{\mu} a. \tag{12.4.5a}$$

Sind also die Ungleichungen

$$|a| \ll R \ll \lambda \tag{12.4.6}$$

mit a als Streulänge, R als Kernradius, λ als Neutronenwellenlänge erfüllt, so läßt sich die Wechselwirkung zwischen Neutron und Kern durch die FERMIsche Funktion ausdrücken:

$$V(\mathfrak{r}) = \frac{2\pi\hbar^2}{\mu} a\, \delta(\mathfrak{r}). \tag{12.4.7}$$

Für die Untersuchung der unelastischen Streuung von Neutronen und Kristallen drücken wir den Wechselwirkungsoperator durch das FERMIsche Pseudopotential jedes einzelnen Kerns aus:

$$V(\mathfrak{r}) = \sum_n A\, \delta(\mathfrak{r} - \mathfrak{R}_\mathfrak{n}), \qquad A = \frac{2\pi\hbar^2}{\mu} a, \tag{12.4.8}$$

wobei $\mathfrak{R}_\mathfrak{n}$ der Radiusvektor ist, der die Lage des $\mathfrak{n}$-ten Kerns im Kristall bestimmt. Sind die Basisvektoren einer Elementarzelle im Kristall $\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3$, so gilt $\mathfrak{R}_\mathfrak{n} = \mathfrak{n} + \mathfrak{u}_\mathfrak{n}$; hierbei bestimmt der Vektor $\mathfrak{n} = \sum_j n_j \mathfrak{d}_j$ den Gitterplatz (n_j sind ganze Zahlen) und $\mathfrak{u}_\mathfrak{n}$ die Abweichung des Kerns von der Gleichgewichtslage am Gitterplatz.

Wir nehmen nun an, daß der Einkristall aus Kernen eines Elements mit nur einem Isotop besteht, daß die Kerne den Spin Null besitzen und daß der Kristall die Form eines schiefwinkligen Parallelepipeds mit den Achsen $N_1 \mathfrak{d}_1, N_2 \mathfrak{d}_2, N_3 \mathfrak{d}_3$ hat. Die Gesamtzahl der Kerne im Kristall sei somit $N = N_1 N_2 N_3$.

Wie bekannt, stellt bei nicht sehr hohen Temperaturen die potentielle Energie Π der Atomschwingungen im Kristall eine quadratische Form der Kernauslenkung aus der Gleichgewichtslage dar. Sie kann somit als Summe von Quadraten geschrieben werden:

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{j,q} \omega_{qj}^2 \gamma_{qj}, \tag{12.4.9}$$

wobei γ_{qj} Normalkoordinaten sind, die mit den Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage über die Beziehungen

$$\mathfrak{u}_{\mathfrak{n}} = \sqrt{\frac{2}{MN}} \sum_{j,q} \mathfrak{e}_{qj} \gamma_{qj} F(\mathfrak{q}\,\mathfrak{n}) \tag{12.4.10}$$

verknüpft sind. Dabei sind M die Kernmasse,

$$F(\mathfrak{q}\,\mathfrak{n}) = \begin{cases} \sin \mathfrak{q}\,\mathfrak{n} & \text{für} \quad q_3 > 0, \\ \cos \mathfrak{q}\,\mathfrak{n} & \text{für} \quad q_3 \leqq 0 \end{cases} \tag{12.4.11}$$

und $\mathfrak{e}_{qj} F(\mathfrak{q}\,\mathfrak{n})$ ebene stehende Wellen mit dem Wellenvektor $\mathfrak{q}$ und der Polarisation j, die durch die drei senkrecht aufeinanderstehenden Einheitsvektoren $\mathfrak{e}_{qj}$ für jeden Vektor $\mathfrak{q}$ bestimmt werden. Der Vektor $\mathfrak{q}$ wird durch die Beziehung

$$\mathfrak{q} = \sum_{j=1}^{3} \frac{2\pi}{N_j} \eta_j \mathfrak{b}_j$$

gegeben. Dabei bedeuten die $\mathfrak{b}_j$ die im Abschn. 12.2. eingeführten Vektoren des reziproken Gitters, und die η_j sind ganze Zahlen, die der Ungleichung $-N_j/2 < \eta_j \leqq N_j/2$, $j = 1, 2, 3$ genügen. Man überzeugt sich leicht, daß die Funktionen $F(\mathfrak{q}\,\mathfrak{n})$ der Beziehung

$$\sum_q F(\mathfrak{q}\,\mathfrak{n}) F(\mathfrak{q}\,\mathfrak{n}') = \frac{N}{2} \delta_{n n'}$$

genügen. Im weiteren fassen wir die beiden Größen $\mathfrak{q}$ und j durch die Bezeichnung $s \equiv (\mathfrak{q}, j)$ zusammen. Damit lautet (12.4.10) folgendermaßen:

$$\mathfrak{u}_{\mathfrak{n}} = \sqrt{\frac{2}{MN}} \sum_s \mathfrak{e}_s \gamma_s F(\mathfrak{q}_s \mathfrak{n}). \tag{12.4.12}$$

Die Wellenfunktion für die Schwingungszustände mit der Energie $\sum_s \hbar \omega_s \nu_s$ bei bestimmter Wahl der Quantenzahlen $\{\nu_s\}$ für die Oszillatoren besitzt folgende Form:

$$\Phi_{\{\nu_s\}} = \prod_s \varphi_{\nu_s}\left(\frac{\gamma_s}{\alpha_s}\right), \qquad \alpha_s = \sqrt{\frac{\hbar}{\omega_s}};$$

$\varphi_{\nu_s}\left(\frac{\gamma_s}{\alpha_s}\right)$ ist die normierte Oszillatorwellenfunktion[1]) vom Typ s.

---

[1]) Es gilt $\varphi_\nu\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right) = [\sqrt{\pi}\,\alpha\,\nu!\,2^\nu]^{-1/2} e^{-\frac{\gamma^2}{2\alpha^2}} H_\nu\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)$ mit $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}$ als hermiteschen Polynomen.

Der Anfangszustand des Systems Kristall–Neutron der Energie $\hbar\, k^2/2\mu$ läßt sich in nullter Näherung durch die Wellenfunktion

$$\Psi_a = \Phi_{\{\nu_s\}} \exp(i\, \mathfrak{k}\, \mathfrak{r}),$$

der Endzustand durch die Wellenfunktion

$$\Psi_b = \Phi_{\{\nu_s'\}} \exp\{i\, \mathfrak{k}'\, \mathfrak{r}\}$$

darstellen.

In der BORNschen Näherung lautet die Übergangswahrscheinlichkeit je Zeiteinheit für den Übergang vom Anfangszustand Ψ_a in den Endzustand Ψ_b unter der Wirkung der Störung (12.4.8)

$$w_{ba} = \frac{2\pi}{\hbar} \left|(b\,|\,V\,|\,a)\right|^2 \delta(E_a - E_b) \tag{12.4.13}$$

mit

$$(b\,|\,V\,|\,a) \equiv A \sum_{\mathfrak{n}} \exp\{i\, \mathfrak{n}\, (\mathfrak{k} - \mathfrak{k}')\} \prod_s M_{\nu_s' \nu_s}(\mathfrak{n}) \tag{12.4.14}$$

und

$$M_{\nu_s'\nu_s}(\mathfrak{n}) \equiv \int \exp\left\{i(\mathfrak{k} - \mathfrak{k}')\, \mathfrak{e}_s\, \gamma_s\, F(\mathfrak{q}\, \mathfrak{n}) \sqrt{\frac{2}{MN}}\right\} \varphi_{\nu_s'}\, \varphi_{\nu_s}\, d\gamma_s. \tag{12.4.15}$$

Unter Benutzung der Eigenschaften der normierten Wellenfunktionen des harmonischen Oszillators kann man nach [12,5] zeigen, daß die Beziehung

$$M_{n+\lambda, n}(t) \equiv \int \exp\left(\frac{t\gamma}{\alpha}\right) \varphi_{n+\lambda}\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right) \varphi_n\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right) d\gamma =$$

$$= \frac{\exp\left(\frac{t^2}{4}\right)}{\sqrt{n!\,(n+\lambda)!}} \sum_\nu \binom{n+\lambda}{\nu+\lambda} \frac{n!}{\nu!} \left(\frac{t^2}{2}\right)^{\nu + \frac{\lambda}{2}} \tag{12.4.16}$$

gilt. Die Matrixelemente (12.4.15) erhält man aus (12.4.16), wenn man

$$t = i(\mathfrak{k} - \mathfrak{k}')\, \mathfrak{e}_s\, F(\mathfrak{q}\, \mathfrak{n}) \sqrt{\frac{2\hbar}{MN\omega_s}}$$

setzt.

Wegen $t \sim N^{-1/2}$ braucht man in der Reihe (12.4.16) nur die Glieder mit den kleinsten Potenzen von t zu berücksichtigen. Bei großen Werten von N liefern nur die Glieder

$$\left.\begin{aligned} M_{\nu_s\nu_s}(\mathfrak{n}) &= 1 - Q_s^2 \left(\frac{\nu_s + \frac{1}{2}}{2}\right) F^2(\mathfrak{q}_s\, \mathfrak{n}), \\ M_{\nu_s+1,\, \nu_s}(\mathfrak{n}) &= i\, Q_s \sqrt{\frac{\nu_s + 1}{2}}\, F(\mathfrak{q}_s\, \mathfrak{n}), \\ M_{\nu_s-1,\, \nu_s}(\mathfrak{n}) &= -i\, Q_s \sqrt{\frac{\nu_s}{2}}\, F(\mathfrak{q}_s\, \mathfrak{n}) \end{aligned}\right\} \tag{12.4.17}$$

einen Beitrag zur Wahrscheinlichkeit. Dabei ist

$$Q_s \equiv (\mathfrak{k} - \mathfrak{k}')\, \mathfrak{e}_s \sqrt{\frac{2\hbar}{MN\omega_s}}. \tag{12.4.18}$$

Die Richtigkeit dieser Behauptung werden wir später zeigen.

Die Übergangswahrscheinlichkeit je Zeiteinheit für einen Übergang aus dem Zustand a in den Zustand b mit der Richtung des Wellenvektors $\mathfrak{k}'$ im Raumwinkelelement $d\Omega$ beträgt

$$dP_{ba} = d\Omega \int w_{ba}\, \varrho_{E_b}\, dE_b = \frac{2\pi}{\hbar} \left|(b\,|\,V\,|\,a)\right|^2 \varrho_{E_b}\, d\Omega .$$

Dabei bedeutet $\varrho_{E_b} = \mu\, k'/(2\pi)^3\, \hbar^2$ die Dichte der Endzustände je Raumwinkeleinheit und Einheitsenergieintervall. Dividiert man dP_{ba} durch die Geschwindigkeit der einfallenden Neutronen $\hbar\, k/\mu$ und die Anzahl der Kerne N im Kristall, so erhält man den Wirkungsquerschnitt für die Streuung je Raumwinkeleinheit und je Kern:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\mu^2}{N\,(2\pi)^2\,\hbar^4}\,\frac{k'}{k}\left|(b\,|\,V\,|\,a)\right|^2 . \tag{12.4.19}$$

Wir haben nun den Wirkungsquerschnitt für elastische Streuung ($\nu_s' = \nu_s$, $|\mathfrak{k}'| = |\mathfrak{k}|$) des Neutrons am Kristall zu berechnen. Dazu bestimmen wir zunächst $M^2 \equiv \prod\limits_s M_{\nu_s\nu_s}(\mathfrak{n})\, M_{\nu_s\nu_s}(\mathfrak{n}')$. Setzt man (12.4.17) ein und berücksichtigt, daß für kleine x $1 - x \approx \mathrm{e}^{-x}$ gilt, so wird

$$M^2 = \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_s Q_s^2\left(\nu_s + \frac{1}{2}\right)\left[F^2(\mathfrak{q}_s\,\mathfrak{n}) + F^2(\mathfrak{q}_s\,\mathfrak{n}')\right]\right\}.$$

Benutzt man die Definition der Funktionen $F(\mathfrak{q}\,\mathfrak{n})$ (12.4.11), so lassen sich in der Summe über s jeweils 2 Glieder, die sich nur durch das Vorzeichen von q_3 unterscheiden, zusammenfassen. Berücksichtigt man weiter

$$\underset{q_3>0}{F^2(\mathfrak{q}_s\,\mathfrak{n})} + \underset{q_3<0}{F^2(\mathfrak{q}_s\,\mathfrak{n})} = 1 ,$$

so folgt

$$M^2 = \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_s\left(\nu_s + \frac{1}{2}\right)Q_s^2\right\}. \tag{12.4.20}$$

Für den Vergleich mit experimentellen Werten ist (12.4.20) noch über alle Anfangszustände des Gitters zu mitteln. Dies ist gleichbedeutend damit, statt ν_s in (12.4.20) $\bar{\nu}_s = (\mathrm{e}^{\hbar\omega_s/T} - 1)^{-1}$ mit T als Temperatur des Kristalls in Energieeinheiten zu schreiben.

Mit (12.4.20), (12.4.14) und (12.4.5a) erhält man aus (12.4.19) den Wirkungsquerschnitt für elastische Streuung von Neutronen an Kristallen je Kern:

$$\overline{\frac{d\sigma}{d\Omega}} = \frac{|a|^2}{N}\left|\sum_{\mathfrak{n}} \exp\{i\,\mathfrak{n}(\mathfrak{k} - \mathfrak{k}')\}\right|^2 \exp(-2W), \tag{12.4.21}$$

wobei

$$W \equiv \frac{1}{4}\sum_s\left(\bar{\nu}_s + \frac{1}{2}\right)Q_s^2 \tag{12.4.22}$$

gesetzt ist.

Der Wirkungsquerschnitt (12.4.21) unterscheidet sich von dem im Abschnitt 12.2. erhaltenen Ausdruck für den Fall fixierter Kerne auf den Gitterplätzen. Der Wirkungsquerschnitt (12.4.21) hängt noch von dem Faktor

$\exp(-2W)$ ab, der durch die Temperatur und die Eigenschaften des Kristalls bestimmt wird und die Verkleinerung der BRAGGschen Streuung auf Grund der thermischen Bewegung der Streuzentren angibt.

W läßt sich unter Benutzung eines vereinfachten Modells für die Gitterschwingungen — des DEBYEschen Modells — leicht berechnen. In diesem Modell wird angenommen, daß die Geschwindigkeit der Schallwellen unabhängig von der Wellenlänge, der Ausbreitungsrichtung und der Polarisation ist. Man setzt also $\omega_s \equiv \omega_{qj} = c\,q$, wobei c die konstante Schallgeschwindigkeit bedeutet. Dann läßt sich in (12.4.22) die Summierung über die Phononenpolarisation leicht ausführen. Beachtet man

$$\sum_j [(\mathfrak{k} - \mathfrak{k}')\,\mathfrak{e}_{qj}]^2 = (\mathfrak{k} - \mathfrak{k}')^2,$$

so wird

$$W = \frac{\hbar(\mathfrak{k} - \mathfrak{k}')^2}{4MN} \sum_q \frac{1 + 2\bar{\nu}_q}{\omega_q};$$

dabei ist über alle möglichen Frequenzen der Normalschwingungen zu summieren. Berücksichtigt man, daß im Intervall $(\omega, \omega + d\omega)$ $\frac{V\,\omega^2\,d\omega}{2\pi^2 c^3}$ Normalschwingungen bestimmter Polarisation vorhanden sind, so kann man von der Summe zum Integral übergehen und schreiben

$$W = \frac{V\,\hbar\,(\mathfrak{k} - \mathfrak{k}')^2}{2\,(2\pi)^2 M N c^3} \int_0^{\omega_{\max}} (1 + 2\bar{\nu})\,\omega\,d\omega,$$

wobei sich $\omega_{\max}$ aus der Bedingung $\frac{V}{2\pi^2 c^3} \int_0^{\omega_{\max}} \omega^2\,d\omega = N$ bestimmt. Aus dieser Bedingung folgt $\omega_{\max}^3 = 6\pi^2 c^3 N/V$. Setzt man $\bar{\nu} = [\exp(\hbar\,\omega/T) - 1]^{-1}$ ein, so wird

$$W = \frac{3\,\hbar\,(\mathfrak{k} - \mathfrak{k}')^2}{2M\,\omega_{\max}^3} \left[\frac{\omega_{\max}^2}{4} + \int_0^{\omega_{\max}} \frac{\omega\,d\omega}{\exp\left(\frac{\hbar\,\omega}{T}\right) - 1}\right]$$

bzw., wenn man noch $\hbar\,\omega_{\max} = \Theta$ (DEBYE-Temperatur in Energieeinheiten) setzt,

$$W = \frac{3\,\hbar^2\,(\mathfrak{k} - \mathfrak{k}')^2}{2M\Theta} \left[\frac{1}{4} + \left(\frac{T}{\Theta}\right)^2 D\left(\frac{\Theta}{T}\right)\right], \qquad (12.4.23)$$

wobei

$$D\left(\frac{\Theta}{T}\right) = \int_0^{\Theta/T} \frac{x\,dx}{e^x - 1}$$

gesetzt ist.

Bei niedrigen Temperaturen ist $T \ll \Theta$, und das zweite Glied in der eckigen Klammer von (12.4.23) kann durch den Ausdruck

$$\left(\frac{T}{\Theta}\right)^2 D\left(\frac{\Theta}{T}\right) \approx \frac{\pi^2}{6}\left(\frac{T}{\Theta}\right)^2$$

ersetzt werden. Bei hohen Temperaturen ($T \gg \Theta$) wird entsprechend

$$\left(\frac{T}{\Theta}\right)^2 D\left(\frac{\Theta}{T}\right) \approx \frac{T}{\Theta}.$$

Für elastische Streuung gilt außerdem $|\mathfrak{k} - \mathfrak{k}'|^2 = 4k^2 \sin^2\vartheta/2$ mit ϑ als Streuwinkel. Daher nimmt (12.4.23) folgende Form an:

$$W = \frac{6\hbar^2 k^2}{M\Theta} \sin^2\frac{\vartheta}{2} \cdot \left[\frac{1}{4} + \left(\frac{T}{\Theta}\right)^2 D\left(\frac{\Theta}{T}\right)\right]. \tag{12.4.24}$$

Der Faktor W nimmt mit wachsendem Streuwinkel sowie mit wachsender Neutronenenergie und wachsender Kristalltemperatur zu. Nach Gl. (12.4.21) führt dies zu einer Schwächung der elastischen kohärenten Streuung für alle Streuwinkel $\vartheta \neq 0$. Bei $T = \Theta$ ist W von der Größenordnung μ/M mit μ = Neutronenmasse und M = Masse des Streuzentrums. Für schwere Streuzentren gilt somit $e^{-2W} \approx 1$, und dieser Faktor wirkt nicht wesentlich auf die Intensität der Streuung ein.

Führt man die Summierung über $\mathfrak{n}$ in (12.4.21) genauso wie im Abschn. 12.2. aus, so sieht man leicht, daß nur die Werte, die mit dem Streuwinkel durch die Beziehung $2k \sin\vartheta/2 = 2\pi\tau$ verknüpft sind, einen Beitrag zur Streuung liefern. Dabei gilt

$$\bar{\sigma}_\tau = \frac{2\pi^2}{B k^2 \tau} |a|^2 e^{-2W_\tau}$$

mit

$$W_\tau = \frac{6\hbar\pi^2\tau^2}{M\omega_{\max}} \left\{\frac{1}{4} + \left(\frac{T}{\Theta}\right)^2 D\left(\frac{\Theta}{T}\right)\right\},$$

und für den totalen Wirkungsquerschnitt für elastische Streuung (ohne Vorwärtsstreuung) ergibt sich

$$\bar{\sigma} = \frac{2\pi^2}{B k^2} |a|^2 \sum_{\tau \leq k/\pi} \frac{1}{\tau} e^{-2W_\tau}. \tag{12.4.25}$$

12.5. Unelastische Streuung von Neutronen an Kristallen bei gleichzeitiger Emission oder Absorption eines Phonons

Wir gehen nun zur Berechnung der unelastischen Streuung von Neutronen über, d. h., wir betrachten eine Streuung, bei der das Neutron mit den Gitterschwingungen Energie austauscht. Wie wir später zeigen werden, sind Prozesse mit Emission oder Absorption eines Phonons bei niedrigen Energien am wahrscheinlichsten. Daher berechnen wir zunächst den differentiellen Streuquerschnitt für die Streuung eines Neutrons bei gleichzeitiger Emission (+) oder Absorption (—) eines Phonons mit der Wellenzahl q_σ und der Frequenz ω_σ. Zu diesem Zweck muß das Quadrat des Matrixelements (12.4.14) berechnet werden:

$$|(b|V|a)|^2_\pm = |A \sum_{\mathfrak{n}} \exp\{i\,\mathfrak{n}(\mathfrak{k} - \mathfrak{k}')\} M_{\nu_\sigma \pm 1, \nu_\sigma}(\mathfrak{n}) \prod_s{}' M_{\nu_s \nu_s}|^2. \tag{12.5.1}$$

Der Strich am Produktzeichen bedeutet, daß das Produkt über alle s mit $s \neq \sigma$ zu bilden ist. Außerdem muß (12.5.1) über alle Anfangszustände des

Kristalls gemittelt werden. Diese Operation werden wir durch einen Querstrich über der entsprechenden Größe bezeichnen.

Da sich jeder Faktor des Produkts in (12.5.1) wegen (12.4.17) nur wenig von Eins unterscheidet, kann man

$$\overline{|\prod_s{}' M_{\nu_s \nu_s}|^2} \approx \overline{|\prod_s M_{\nu_s \nu_s}|^2} = \exp\{-2W\} \tag{12.5.2}$$

setzen. Dabei ist W in (12.4.22) definiert.

Aus (12.4.17) folgt, daß $|M_{\nu_s-1,\,\nu_s}|^2$ aus $|M_{\nu_s+1,\,\nu_s}|^2$ hervorgeht, indem man $\nu_s + 1$ durch ν_s ersetzt. Deshalb berechnen wir im folgenden nur den Wirkungsquerschnitt für die Streuung bei Emission eines Phonons (bei Absorption eines Phonons braucht man nur $\nu_\sigma + 1$ durch ν_σ zu ersetzen). Unter Berücksichtigung von (12.4.11) und (12.4.17) schreiben wir das Matrixelement $M_{\nu_\sigma+1,\,\nu_\sigma}$ in der Form

$$M_{\nu_\sigma+1,\,\nu_\sigma} = i\,Q_\sigma \sqrt{\frac{\nu_\sigma+1}{8}} \begin{cases} e^{i\mathfrak{q}_\sigma \mathfrak{n}} + e^{-i\mathfrak{q}_\sigma \mathfrak{n}} & \text{für} \quad q_{\sigma 3} \leqq 0, \\ \frac{1}{i}\left(e^{i\mathfrak{q}_\sigma \mathfrak{n}} - e^{-i\mathfrak{q}_\sigma \mathfrak{n}}\right) & \text{für} \quad q_{\sigma 3} > 0. \end{cases}$$

Dann wird

$$\overline{|(b\,|\,V|\,a)|^2_+} = |A|^2 Q_\sigma^2 \frac{\nu_\sigma+1}{8} e^{-2W} \times$$
$$\times \left|\sum_{\mathfrak{n}} \{\exp[i\,\mathfrak{n}(\mathfrak{k}-\mathfrak{k}'+\mathfrak{q}_\sigma)] \pm \exp[i\,\mathfrak{n}(\mathfrak{k}-\mathfrak{k}'-\mathfrak{q}_\sigma)]\}\right|^2. \tag{12.5.3}$$

Das Pluszeichen in den geschweiften Klammern bezieht sich auf den Fall $q_{\sigma 3} \leqq 0$, das Minuszeichen auf den Fall $q_{\sigma 3} > 0$.

Führt man analoge Betrachtungen wie im Abschn. 12.2. durch, so läßt sich zeigen, daß

$$\sum_{\mathfrak{n}} \exp\{i\,\mathfrak{n}(\mathfrak{k}-\mathfrak{k}' \pm i\,\mathfrak{q}_\sigma)\} = \frac{(2\pi)^3 N}{B}\,\delta(\mathfrak{k}-\mathfrak{k}' \pm \mathfrak{q}_\sigma - 2\pi\vec{\tau})$$

gilt. Dabei bedeutet $\vec{\tau} = \sum_j \tau_j \mathfrak{b}_j$ den Vektor des reziproken Gitters. Bei vorgegebener Differenz $\mathfrak{k}-\mathfrak{k}'$ und $\mathfrak{q}_\sigma \neq 0$ ist nur eine der beiden Deltafunktionen von Null verschieden. Aus diesem Grund kann man

$$\overline{|(b\,|\,V|\,a)|^2_+} = |A|^2 \frac{\hbar(\bar{\nu}_\sigma+1)(2\pi)^3}{2\omega_\sigma M B} |(\mathfrak{k}-\mathfrak{k}')\,\mathfrak{e}_\sigma|^2 e^{-2W}\,\delta(\mathfrak{k}-\mathfrak{k}'+\mathfrak{q}_\sigma-2\pi\vec{\tau}) \tag{12.5.4}$$

schreiben. Wegen der Deltafunktion in (12.5.4) läßt sich $\mathfrak{k}-\mathfrak{k}'$ durch $2\pi\vec{\tau}-\mathfrak{q}_\sigma$ ersetzen, und es folgt

$$\overline{|(b\,|\,V|\,a)|^2_+} = \frac{|A|^2\,\hbar(\bar{\nu}_\sigma+1)\,4\pi^3}{M B \omega_\sigma} |(2\pi\vec{\tau}-\mathfrak{q}_\sigma)\,\mathfrak{e}_\sigma|^2 e^{-2W_q}\,\delta(\mathfrak{k}-\mathfrak{k}'+\mathfrak{q}_\sigma-2\pi\vec{\tau}) \tag{12.5.5}$$

mit

$$W_q = \frac{3\hbar^2(2\pi\vec{\tau}-\mathfrak{q}_\sigma)^2}{2M\Theta}\left\{\frac{1}{4}+\left(\frac{T}{\Theta}\right)^2 D\left(\frac{\Theta}{T}\right)\right\}$$

in der Debyeschen Näherung.

Setzt man (12.5.5) und den Ausdruck für A in (12.4.19) ein, so erhält man den Wirkungsquerschnitt für unelastische Streuung eines Neutrons in die Raumwinkeleinheit für die Richtung $\mathfrak{k}'$ bei gleichzeitiger Emission eines Phonons mit dem Wellenvektor $\mathfrak{q}_\sigma$ und der Polarisation $\mathfrak{e}_\sigma$:

$$\overline{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_+} = \frac{4\pi^3 |a|^2 \hbar (\bar{\nu}_\sigma + 1)}{M N B \omega_\sigma} \frac{k'}{k} |(2\pi \vec{\tau} - \mathfrak{q}_\sigma)\mathfrak{e}_\sigma|^2 e^{-2W} \delta(\mathfrak{k} - \mathfrak{k}' + \mathfrak{q}_\sigma - 2\pi\vec{\tau}). \tag{12.5.6}$$

Zur Berechnung des entsprechenden totalen Wirkungsquerschnitts ist die Gl. (12.5.6) über alle Streurichtungen der Neutronen (über alle Richtungen von $\mathfrak{k}'$) zu integrieren. In (12.5.6) hängt nur die Deltafunktion von der Richtung von $\mathfrak{k}'$ ab. Folglich ist das Integral

$$\langle\delta\rangle \equiv \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \delta(\mathfrak{k} - \mathfrak{k}' + \mathfrak{q}_\sigma - 2\pi\vec{\tau}) \sin\vartheta \, d\vartheta$$

zu berechnen. Wir wählen die Achse des Polarkoordinatensystems in Richtung des Vektors $2\pi\vec{\tau} - \mathfrak{q}_\sigma$. Dann verschwinden die Komponenten in bezug auf die x- und y-Achse. Weiterhin gehen wir zu den Veränderlichen $k_x' = k' \sin\vartheta \cos\varphi$, $k_y' = k' \sin\vartheta \sin\varphi$ über. Damit wird

$$\langle\delta\rangle = \frac{1}{(k')^2} \iint \delta(k_x - k_x')\delta(k_y - k_y')\,\delta(k_z - k_z' - |2\pi\vec{\tau} - \mathfrak{q}_\sigma|) \frac{dk_x' \, dk_y'}{\cos\vartheta}. \tag{12.5.7}$$

Der Absolutbetrag von k' ist mit k durch den Energieerhaltungssatz verknüpft:

$$\frac{(\hbar k')^2}{2\mu} - \frac{(\hbar k)^2}{2\mu} = \hbar\omega_\sigma.$$

Weiterhin folgt aus (12.5.7), daß $\langle\delta\rangle$ von Null verschieden ist, wenn $k_y = k_y'$ und $k_x = k_x'$ gilt. Deshalb wird

$$k_z' = \pm\left(k_z^2 - 2\mu \frac{\omega_\sigma}{\hbar}\right)^{1/2} \equiv \pm l; \qquad |\cos\vartheta| = \frac{|k_z'|}{k'} = \frac{l}{k'},$$

und man erhält

$$\langle\delta\rangle = \frac{1}{l k'} \delta(k_z \mp l - |2\pi\vec{\tau} - \mathfrak{q}_\sigma|).$$

Für den totalen Streuquerschnitt je Kern für die Streuung an einem Einkristall ergibt sich somit

$$\bar{\sigma}_+ = \frac{4\pi^3 |a|^2 \hbar (\bar{\nu}_\sigma + 1)}{M N B \omega_\sigma l k} |(2\pi\vec{\tau} - \mathfrak{q}_\sigma)\,\mathfrak{e}_\sigma|^2 e^{-2W_q} \delta(k_z \mp l - |2\pi\vec{\tau} - \mathfrak{q}_\sigma|).$$

Um die Streuung an einem polykristallinen Objekt zu berechnen, ist σ_+ über alle Orientierungsrichtungen des Einkristalls oder, was dasselbe ist, über alle Richtungen von $\mathfrak{k}$ zu mitteln. Von $\mathfrak{k}$ hängt nur die Deltafunktion ab. Folglich ist das Integral

$$(\delta) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \delta(k_z \mp l - |2\pi\vec{\tau} - \mathfrak{q}_\sigma|) \sin\vartheta \, d\vartheta$$

zu berechnen.

Wir führen die neue Variable

$$\xi = k_z \mp l = k\cos\vartheta \mp \left(k^2\cos^2\vartheta - \frac{2\mu\,\omega_\sigma}{\hbar}\right)^{1/2}$$

ein. Dann ist $\frac{d\xi}{d\vartheta} = \frac{\xi\,k\sin\vartheta}{l}$, und es wird

$$(\delta) = \frac{l}{2k}\int \delta(\xi - |2\pi\vec{\tau} - \mathfrak{q}_\sigma|)\frac{d\xi}{\xi} = \frac{l}{2k\,|2\pi\vec{\tau} - \mathfrak{q}_\sigma|}\,.$$

Bezeichnet man den auf einen Kern bezogenen und über alle Orientierungsrichtungen des Einkristalls gemittelten Wirkungsquerschnitt für Streuung bei Emission eines Phonons mit $\bar{\sigma}_{\tau+}$, so erhält man

$$\bar{\sigma}_{\tau+} = \frac{2\pi^3\,\hbar\,|a|^2\,(\bar{\nu}_\sigma + 1)}{M\,N\,B\,\omega_\sigma\,k^2}\,\frac{|(2\pi\vec{\tau} - \mathfrak{q}_\sigma)\,\mathfrak{e}_\sigma|^2}{|2\pi\vec{\tau} - \mathfrak{q}_\sigma|}\,\mathrm{e}^{-2W_q}. \tag{12.5.8}$$

Analog zeigt man, daß der Streuquerschnitt bei Absorption eines Phonons durch folgenden Ausdruck gegeben wird:

$$\bar{\sigma}_{\tau-} = \frac{2\pi^3\,\hbar\,|a|^2\,\bar{\nu}_\sigma}{M\,N\,B\,\omega_\sigma\,k^2}\,\frac{|(2\pi\vec{\tau} - \mathfrak{q}_\sigma)\,\mathfrak{e}_\sigma|^2}{|2\pi\vec{\tau} - \mathfrak{q}_\sigma|}\,\mathrm{e}^{-2W_q}. \tag{12.5.9}$$

Zur Berechnung der im Experiment meßbaren Größen sind die Ausdrücke (12.5.8) und (12.5.9) über alle möglichen Beträge der Vektoren des reziproken Gitters zu summieren. Die möglichen Beträge von $\mathfrak{q}$ und $\vec{\tau}$ werden durch den Impulserhaltungssatz sowie durch den Energieerhaltungssatz gegeben:

$$\mathfrak{k} - \mathfrak{k}' = 2\pi\vec{\tau} - \mathfrak{q}, \tag{12.5.10}$$

$$(k')^2 = k^2 \mp \frac{2\mu\,\omega}{\hbar}. \tag{12.5.11}$$

In (12.5.11) bezieht sich das Minuszeichen auf die Phononenemission und das Pluszeichen auf die Phononenabsorption. Aus (12.5.10) folgt unmittelbar, daß $\vec{\tau}$ und $\mathfrak{q}$ folgender Ungleichung genügen müssen:

$$|k - k'| \leqq |2\pi\vec{\tau} - \mathfrak{q}| \leqq k + k', \tag{12.5.12}$$

aus der für $\tau = 0$ $q \leqq k + k'$ oder $q^2 + k^2 - 2q\,k \leqq (k')^2$ folgt. Mit (12.5.11) ergibt sich hieraus für den Fall der Phononenemission die Ungleichung

$$q^2 - 2q\,k \leqq -\frac{2\mu\,\omega}{\hbar}.$$

In der DEBYEschen Näherung gilt $\omega = c\,q$. Führt man $v = \hbar\,k/\mu$ als Geschwindigkeit des einfallenden Neutrons ein, so läßt sich dies auf folgende Form bringen:

$$\frac{\hbar\,q}{\mu} \leqq 2(v - c).$$

Hieraus folgt für $\tau = 0$, daß die Emission eines Phonons durch ein Neutron, dessen Geschwindigkeit kleiner ist als die Schallgeschwindigkeit, nicht mög-

lich ist. Die Absorption eines Phonons ist in diesem Fall nur möglich bei Erfüllung der Ungleichung

$$\frac{\hbar q}{\mu} \geqq 2(c - v).$$

Da im Gitter nur Werte $q \leqq q_{\max} = \Theta/c\,\hbar$ möglich sind, ist die Absorption eines Phonons durch das Neutron im Kristall mit der DEBYE-Temperatur Θ und der Schallgeschwindigkeit c bei $\tau = 0$ nur dann möglich, wenn die Neutronengeschwindigkeit v folgender Ungleichung genügt:

$$\frac{\Theta}{\hbar c} \geqq q \geqq \frac{2\mu}{\hbar}(c - v).$$

Summiert man über die 3 Polarisationsrichtungen, so erhält man aus (12.5.8) und (12.5.9)

$$\bar{\sigma}_{\tau+} = \frac{2\pi^3 \hbar |a|^2 (\bar{\nu}_\sigma + 1)}{M N B \omega_\sigma k^2} |2\pi \vec{\tau} - \mathfrak{q}_\sigma| \, e^{-2W_q},$$

$$\bar{\sigma}_{\tau-} = \frac{2\pi^3 \hbar |a|^2 \bar{\nu}_\sigma}{M N B \omega_\sigma k^2} |2\pi \vec{\tau} - \mathfrak{q}_\sigma| \, e^{-2W_q}.$$

Die erhaltenen Ausdrücke sind noch über alle Beträge des Vektors $\mathfrak{q}$ zu summieren. Multipliziert man sie mit

$$N(2\pi)^{-3}\, dq_1\, dq_2\, dq_3 = N(2\pi)^{-3} \sin\vartheta\, d\vartheta\, q^2\, dq\, d\varphi,$$

so läßt sich die Summe durch das entsprechende Integral ersetzen. Wir wählen als Richtung der Achse des Polarkoordinatensystems die Richtung des Vektors $\vec{\tau}$. An Stelle von ϑ führen wir die neue Variable λ $(-1 \leqq \lambda \leqq 1)$ über die Beziehung $|2\pi \vec{\tau} - \mathfrak{q}| = 2\pi\tau + \lambda q$ ein. Quadriert man diese Gleichung, so folgt

$$q^2 - 4\pi\tau q \cos\vartheta = 4\pi\tau\lambda q + \lambda^2 q^2,$$

und man erhält

$$\sin\vartheta\, d\vartheta = \frac{2\pi\tau + \lambda q}{2\pi\tau}\, d\lambda.$$

Es gilt also

$$\sigma_{\tau+} = \frac{\hbar |a|^2}{4k^2 M \tau} \int \frac{(2\pi\tau + \lambda q)^2}{\omega_\sigma} e^{-2W_q} q^2\, dq\, d\lambda.$$

Zieht man den Faktor $\exp(-2W_q)$ für $q = 0$ vor das Integral, so wird mit

$$W_0 = \frac{6\hbar^2 \pi^2 \tau}{M\Theta} \left\{\frac{1}{4} + \left(\frac{T}{\Theta}\right)^2 D\left(\frac{\Theta}{T}\right)\right\},$$

wenn man über λ integriert,

$$\sigma_{\tau+} = \frac{\hbar |a|^2 \exp\{-2W_0\}}{4k^2 M\tau} \int \left[4\pi^2\tau^2\lambda + 2\pi\tau q \lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda^3 q^2\right]_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\bar{\nu} + 1}{\omega} q^2\, dq,$$

wobei λ_1 und λ_2 die obere und untere Integrationsgrenze bei der Integration über λ bedeuten. Beide Größen sind Funktionen von τ und q und werden nach (12.5.12) durch die Ungleichungen

$$|k' - k| \leqq 2\pi\tau + \lambda q \leqq k + k', \qquad -1 \leqq \lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq 1$$

festgelegt.

In der DEBYEschen Näherung gilt $\omega = c\,q$, und der Streuquerschnitt mit Phononenemission nimmt die Form

$$\sigma_{\tau+} = \frac{\hbar\,|a|^2\,\mathrm{e}^{-2W_0}}{4k^2\,M\,c^3\,\tau}\int\limits_0^{\omega_1}\left[4\pi^2\tau^2(\lambda_2-\lambda_1)+2\pi\,\tau\,\omega\,(\lambda_2^2-\lambda_1^2)+\frac{\omega^2}{3}(\lambda_2^3-\lambda_1^3)\right]\times$$

$$\times\,\omega\left[1+\frac{1}{\exp(\hbar\,\omega/T)-1}\right]d\omega \qquad (12.5.13)$$

an. Bei kleinen Neutronenenergien ergibt sich die obere Integrationsgrenze ω_1 aus dem Energieerhaltungssatz: $\omega_1 = (\hbar\,k)^2/2\mu = \varepsilon_0/\hbar$; ε_0 ist die Neutronenenergie vor der Streuung ($\varepsilon_0 < \Theta$). Ist $\varepsilon_0 \geqq \Theta$, so gilt $\omega_1 = \Theta/\hbar$. In diesem Fall muß man jedoch neben Prozessen mit einem Phonon auch Prozesse mit mehreren Phononen in Betracht ziehen.

Der Streuquerschnitt bei Phononenabsorption wird also durch den Ausdruck

$$\sigma_{\tau-} =$$

$$= \frac{\hbar|a|^2\mathrm{e}^{-2W_0}}{4k^2Mc^3\tau}\int\limits_0^{\Theta/\hbar}\left[4\pi^2\tau^2(\lambda_2-\lambda_1)+2\pi\tau\omega(\lambda_2^2-\lambda_1^2)+\frac{\omega^2}{3}(\lambda_2^3-\lambda_1^3)\right]\frac{\omega\,d\omega}{\exp(\hbar\,\omega/T)-1} \qquad (12.5.14)$$

gegeben. Um den totalen Streuquerschnitt für die Streuung von Neutronen bei gleichzeitiger Emission oder Absorption eines Phonons zu erhalten, ist in (12.5.13) und (12.5.14) noch über alle möglichen Vektoren des reziproken Gitters zu summieren:

$$\sigma_+ = \sum_\tau \sigma_{\tau+}, \qquad \sigma_- = \sum_\tau \sigma_{\tau-}.$$

Die gefundenen Formeln beziehen sich auf die Streuung von Neutronen an Kristallen, deren Kerne aus nur einem Isotop bestehen und den Spin 0 besitzen. Gilt für den Wellenvektor des Neutrons $k < \mu\,\tau_{\min}$ mit $\tau_{\min}$ als kleinstem Wert für den Vektor des reziproken Gitters (im einfachen kubischen Gitter ist $\tau_{\min} = 1/d$), so sind die Wirkungsquerschnitte für elastische und unelastische Streuung bei gleichzeitiger Emission gleich Null. Die hier untersuchte Streuerscheinung beobachtet man also nur, wenn die Neutronenenergie

$$\varepsilon_0 \geqq \frac{(\pi\,\hbar\,\tau_{\min})^2}{2\mu}$$

ist.

Wir zeigen nun, daß bei niedrigen Temperaturen und kleinen Neutronenenergien Prozesse mit einem Phonon die Hauptrolle bei der unelastischen Streuung spielen. Dafür ist hinreichend, eine Abschätzung der Emissionswahrscheinlichkeit für 2 Phononen vorzunehmen. Die Emissionswahrscheinlichkeit für 2 Phononen ist dem Quadrat des entsprechenden Matrixelements proportional:

$$\left|(b\,|V|\,a)\right|_{2+}^2 = \left|A\sum_{\mathfrak{n}}\exp\{i\,\mathfrak{n}(\mathfrak{k}-\mathfrak{k}')\}\,M_{v_\sigma+1,\,v_\sigma}\,M_{v_\varrho+1,\,v_\varrho}\prod_s{}''\,M_{v_s v_s}\right|^2. \qquad (12.5.15)$$

Vergleicht man (12.5.15) mit (12.5.4) und berücksichtigt, daß bei großem N die Näherungsbeziehung $\prod_s' M_{\nu_s \nu_s} \approx \prod_s'' M_{\nu_s \nu_s}$ gilt, so sieht man leicht, daß das Quadrat des Matrixelements für die Emission von 2 Phononen (12.5.15) einen zusätzlichen Faktor

$$f = |M_{\nu_\sigma+1,\, \nu_\sigma}|^2 \approx (\nu_s + 1) \frac{\hbar\, |(\mathfrak{k} - \mathfrak{k}')\, \mathfrak{e}_\sigma|^2}{M N \omega}$$

enthält. Durch den gleichen Faktor unterscheidet sich die Wahrscheinlichkeit für die Emission eines Phonons von der elastischen Streuung. Multipliziert man f mit der Anzahl der Phononenzustände $\frac{4\pi\, V\, \omega^2\, d\omega}{(2\pi\, c)^3}$ und summiert über alle Polarisationszustände, so folgt

$$\bar{f} = \frac{\hbar\, k^2\, \mu\, V}{2\pi^2\, M N c^2} \int\limits_0^{\varepsilon/\hbar} \omega \left(1 + \frac{1}{\exp(\hbar\,\omega/T) - 1}\right) d\omega .$$

Für $T \ll \Theta$ wird

$$\bar{f} \approx \frac{\varepsilon_0\, \mu\, V}{2\pi^2 N\, M\, c^3\, \hbar} \left(\frac{\varepsilon_0}{\hbar}\right)^2 .$$

Berücksichtigt man noch $\omega_{\max}^3 = 6\pi^2\, c^3\, N/V$ und $\hbar\, \omega_{\max} = \Theta$, so wird schließlich

$$\bar{f} \approx \frac{\mu}{M} \left(\frac{\varepsilon_0}{\Theta}\right)^3 .$$

Bei

$$\frac{(\hbar\, \pi\, \tau_{\min})^2}{2\mu} \leqq \varepsilon_0 \leqq \Theta$$

und $T \ll \Theta$ ist also der Streuquerschnitt bei Streuung und gleichzeitiger Emission eines Phonons proportional $(\mu/M)\,(\varepsilon_0/\Theta)^3$. Der Streuquerschnitt bei Emission zweier Phononen dagegen ist proportional $(\mu/M)^2\,(\varepsilon_0/\Theta)^6$. Deshalb sind für $\varepsilon_0 \ll \Theta$ bei der unelastischen Streuung nur Prozesse mit gleichzeitiger Emission eines Phonons wesentlich. Bei weiterem Wachsen der Neutronenenergie werden die Prozesse der Mehrfacherzeugung von Phononen ebenfalls wesentlich. Diese Prozesse untersuchen wir im folgenden Abschnitt.

12.6. Unelastische Streuung von Neutronen an Kristallen bei gleichzeitiger Vielfacherzeugung und Vielfachvernichtung von Phononen

Wir nehmen an, daß der Endzustand des Kristalls mit den Quantenzahlen $\{\nu_s'\}$ sich vom Anfangszustand $\{\nu_s\}$ um mehr als eine Quantenzahl ν_s' unterscheidet. Der Wirkungsquerschnitt für die Streuung je Raumwinkeleinheit (bezogen auf einen Kern) wird durch Gl. (12.4.19) gegeben:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{b a} = \frac{\mu^2}{(2\pi)^2\, N\, \hbar^4}\, \frac{k'}{k} \left|(b\,|\,V\,|\,a)\right|^2 \tag{12.6.1}$$

mit

$$k' = \left\{k^2 + \frac{1}{\hbar} \sum_s \omega_s (\nu_s - \nu_s')\right\}^{1/2} \tag{12.6.2}$$

und dem Quadrat des Matrixelements

$$|(b\,|V|\,a)|^2 = |A|^2 \sum_{\{\nu_s'\}} |\sum_{\mathfrak{n}} \exp\{i\,\mathfrak{n}(\mathfrak{k}-\mathfrak{k}')\} \prod_s M_{\nu_s' \nu_s}|^2. \tag{12.6.3}$$

Wie im vorangehenden Abschnitt gezeigt wurde, treten bei kleinen Neutronenenergien nur Prozesse mit einem Phonon auf. Die Vielfachemission von Phononen wird erst bei $\varepsilon_0 > \Theta$ wesentlich.

Wir betrachten Neutronen mit der Energie $\varepsilon_0 = \hbar^2 k^2/2\mu$ bei $k\,d \gg 1$. In diesem Fall sind Interferenzerscheinungen unwesentlich, da die Strukturfaktoren

$$|\sum_{\mathfrak{n}} \exp\{i\,\mathfrak{n}(\mathfrak{k}-\mathfrak{k}')\}|^2 = N$$

sind und (12.6.3) in folgender Form geschrieben werden kann:

$$|(b\,|V|\,a)|^2 = N\,|A|^2 \sum_{\{\nu_s'\}} |\prod_s M_{\nu_s' \nu_s}|^2. \tag{12.6.4}$$

Die Matrixelemente $M_{\nu_s' \nu_s}$ werden bei einem festen Wert von $\mathfrak{n}$ berechnet, der gleich Null gewählt werden kann. Somit nimmt die Funktion $F(\mathfrak{q}\,\mathfrak{n})$ nach (12.4.11) nur 2 Werte an:

$$F(\mathfrak{q}\,\mathfrak{n}) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad q_3 > 0, \\ 1 & \text{für} \quad q_3 \leqq 0. \end{cases}$$

Da die Matrixelemente $M_{\nu_s+\varrho,\,\nu_s}$ wegen (12.4.16) proportional zu $\{(\mathfrak{k}-\mathfrak{k}')\,\mathfrak{e}_s \sqrt{2\hbar/M\,N\,\omega_s}\}^\varrho$ sind, sind in (12.6.4) nur die Matrixelemente $M_{\nu_s \nu_s}$, $M_{\nu_s+1,\,\nu_s}$ und $M_{\nu_s-1,\,\nu_s}$ wesentlich.

Um die Umformungen zu vereinfachen, werden wir den weiteren Rechnungen das Modell des EINSTEINschen Kristalls zugrunde legen. Wir nehmen also an, daß alle Gitterphononen die gleiche Frequenz $\omega(q) = \omega_0$ besitzen.

Wir betrachten den Wirkungsquerschnitt $(d\lambda/d\Omega)_{l+}$ für die Emission von l Phononen. Bei $l \ll N$ gilt nach (12.5.2)

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{l+} = \frac{\mu^2\,|A|^2\,k'}{(2\pi)^2\,\hbar^4\,k}\,e^{-2W}\,|M_{\nu_s+1,\,\nu_s}|^{2l}.$$

Setzt man $|A|^2$ aus (12.4.5a) und $M_{\nu_s+1,\,\nu_s}$ aus (12.4.17) ein, so erhält man

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{l+} = \frac{|a|^2\,k'\,e^{-2W}}{k}\left[\frac{(\nu_s+1)\,(\mathfrak{p}-\mathfrak{p}')\,\mathfrak{e}_s}{M\,N\,\hbar\,\omega_0}\right]^l$$

mit

$$k' = \sqrt{k^2 - \hbar^{-1}\cdot 2\mu\,l\,\omega_0}, \qquad \mathfrak{p} = \hbar\,\mathfrak{k}.$$

Wir mitteln nun den erhaltenen Ausdruck über alle Anfangszustände und summieren über alle Endzustände b mit gleicher Energie:

$$\overline{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{l+}} = \sum_b \frac{|a|^2\,k'\,e^{-2W}}{k}\left[\frac{(\bar{\nu}_s+1)\,(\mathfrak{p}-\mathfrak{p}')\,\mathfrak{e}_s}{M\,N\,\hbar\,\omega_0}\right]^l.$$

Dabei wird über alle Polarisationszustände der Phononen und über alle möglichen Typen der emittierten Phononen (bei $q_3 \leqq 0$) summiert. Die Summe über die Polarisationszustände liefert $\sum [(\mathfrak{p}-\mathfrak{p}')\,\mathfrak{e}_s]^2 = (\mathfrak{p}-\mathfrak{p}')^2$.

Die Summe über alle möglichen Phononentypen läßt sich auf die Multiplikation eines der sämtlich gleich großen Glieder mit $(l!)^{-1}(N/2)^l$ zurückführen, da man von den $N/2$ Phononentypen, die den $N/2$ möglichen Werten des Vektors $\mathfrak{q}$ (bei $q_3 \leqq 0$) entsprechen, l Phononen auf $(l!)^{-1}(N/2)^l$ verschiedene Arten auswählen kann. Es gilt somit

$$\overline{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{l+}} = |a|^2 \frac{\sqrt{k^2 - 2\mu\, l\, \omega_0\, \hbar^{-1}}}{k} \mathrm{e}^{-2W} (\overline{\nu} + 1)^l \frac{1}{l!} \left\{\frac{(\mathfrak{p} - \mathfrak{p}')^2}{2M\hbar\,\omega_0}\right\}^l \tag{12.6.5}$$

mit a als Streulänge für einen Kern. W wird durch die Gl. (12.4.22) gegeben. Weiterhin gilt

$$\overline{\nu} = \frac{1}{\exp(\hbar\,\omega_0/T) - 1}. \tag{11.6.6}$$

Für $R \equiv \frac{(\mathfrak{p} - \mathfrak{p}')^2}{2M\hbar\,\omega_0} < 1$ folgt aus (12.6.5), daß elastische Streuung am wahrscheinlichsten ist. Die Streuung bei gleichzeitiger Emission von l Phononen ist $R^l/l!$ mal weniger wahrscheinlich. Gilt dagegen $R > 1$, so wird die Wahrscheinlichkeit für elastische Streuung klein, und die Wahrscheinlichkeit für Streuung bei gleichzeitiger Emission von l Phononen wächst zunächst mit zunehmendem l bis $l_{\max} = [R] - 1$. Dabei bedeutet $[R]$ die größte in R enthaltene ganze Zahl. Danach fällt die Wahrscheinlichkeit bei weiterer Zunahme von l. Die Zunahme des Verhältnisses von Neutronenenergie ε_0 zur Phononenenergie $\hbar\,\omega_0$ und die kleine Masse der streuenden Kerne begünstigen die Emission von vielen Phononen, da $R \sim \mu\,\varepsilon_0/M\hbar\omega_0$ ist.

Die Vielfacherzeugung von Phononen wird wegen der damit verbundenen Zunahme von $\overline{\nu}$ auch durch ansteigende Kristalltemperatur begünstigt.

Den Wirkungsquerschnitt für Streuung bei gleichzeitiger Absorption von λ Phononen erhält man auf analoge Weise zu

$$\overline{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\lambda-}} = |a|^2 \frac{(k^2 + 2\mu\,\lambda\,\omega_0\,\hbar^{-1})^{1/2}}{k} \mathrm{e}^{-2W} \frac{(\overline{\nu})^\lambda}{\lambda!} \left\{\frac{(\mathfrak{p} - \mathfrak{p}')^2}{2M\hbar\,\omega_0}\right\}^\lambda. \tag{12.6.7}$$

Dieser Wirkungsquerschnitt geht bei sinkender Kristalltemperatur wegen der damit verbundenen Verkleinerung von $\overline{\nu}$ schnell gegen Null.

Der Wirkungsquerschnitt für Streuung, bei der l Phononen emittiert und λ Phononen absorbiert werden, läßt sich ebenfalls leicht berechnen:

$$\overline{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{l+,\,\lambda-}} = |a|^2 \frac{\left[k - \frac{2\mu}{\hbar}\,\omega_0(l - \lambda)\right]^{1/2} \mathrm{e}^{-2W}}{k} \frac{(\overline{\nu})^\lambda (\overline{\nu} + 1)^l}{l!\,\lambda!} (R)^{l+\lambda}. \tag{12.6.8}$$

Wir führen folgende Abkürzungen ein:

$$b \equiv \frac{(\overline{\nu} + 1)(\mathfrak{p} - \mathfrak{p}')^2}{2M\hbar\,\omega_0} = (\overline{\nu} + 1)\,R, \qquad c \equiv \frac{\overline{\nu}(\mathfrak{p} - \mathfrak{p}')^2}{2M\hbar\,\omega_0} = \overline{\nu}\,R. \tag{12.6.9}$$

Dann nimmt (12.6.8) folgende Form an:

$$\overline{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{l+,\,\lambda-}} = |a|^2 \frac{\left[k^2 - \frac{2\mu}{\hbar}\,\omega_0(l - \lambda)\right]^{1/2}}{k} \mathrm{e}^{-2W} \frac{b^l\,c^\lambda}{l!\,\lambda!}. \tag{12.6.10}$$

Im EINSTEINschen Kristallmodell besitzt W die Form

$$W \equiv \frac{1}{2} \sum_s \frac{\hbar\left(\bar{\nu}_s + \frac{1}{2}\right)}{M N \omega_s} \left|(\mathfrak{k} - \mathfrak{k}')\, \mathfrak{e}_s\right|^2 = \frac{(\mathfrak{p} - \mathfrak{p}')^2 \left(\bar{\nu} + \frac{1}{2}\right)}{2 M \hbar \omega_0} = \frac{b + c}{2}. \qquad (12.6.11)$$

Interessiert der Streuquerschnitt bei bestimmter Änderung der Wellenzahl des Neutrons, z. B. bei $l - \lambda = r$ und $k' = k_r = \sqrt{k^2 - 2\mu\,\omega_0\, r/\hbar}$, so ist (12.6.10) über alle l und λ, die der Bedingung $l - \lambda = r$ genügen, zu summieren. Es wird

$$\overline{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)}_{k \to k_r} = |a| \frac{\sqrt{k^2 - \frac{2\mu}{\hbar}\omega_0\, r}}{k} \mathrm{e}^{-2W} b^r \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(b\,c)^\lambda}{(r+\lambda)!\,\lambda!}. \qquad (12.6.12)$$

Bei niedrigen Temperaturen ist $\bar{\nu} \ll 1$ und damit auch $b\,c \ll 1$. Der Streuquerschnitt (12.6.12) geht dann über in

$$\overline{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)}_{k \to k_r} = |a| \frac{\sqrt{k^2 - \frac{2\mu}{\hbar}\omega_0\, r}}{k} \mathrm{e}^{-2W} \frac{b^r}{r!}. \qquad (12.6.13)$$

Beachtet man (12.6.9), so sieht man, daß die Gln. (12.6.13) und (12.6.5) zusammenfallen. Bei niedrigen Temperaturen kann das Neutron seine Energie also nur durch Phononenemission verkleinern.

Zur Untersuchung des anderen Grenzfalls hoher Temperaturen ($\bar{\nu} \gg 1$) drückt man (12.6.12) am besten durch Zylinderfunktionen erster Art aus. Unter Benutzung der Identität

$$J_r(2\sqrt{z}) = z^{r/2} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-z)^\lambda}{\lambda!\,(r+\lambda)!}$$

und der Beziehung $b \approx c$ für $\nu \gg 1$ kann man schreiben

$$b^r \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{b^{2\lambda}}{(r+\lambda)!\,\lambda!} = (i)^{-r} J_r(2\,i\,b).$$

Damit nimmt der Streuquerschnitt (12.6.12) bei einem Energieverlust des Neutrons von $r\,\hbar\,\omega_0$ durch Emission und Absorption von Phononen folgende Form an:

$$\overline{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)}_{k \to k_r} = |a|^2 \frac{\left[k^2 - \frac{2\mu}{\hbar}\omega_0\, r\right]^{1/2} \mathrm{e}^{-2W}}{k} (i)^{-r} J_r(2\,i\,b), \qquad \bar{\nu} \gg 1. \qquad (12.6.14)$$

Bei $r \leqq 2b$ und $b > 2$ läßt sich die Gl. (12.6.14) noch weiter vereinfachen, wenn man den Näherungsausdruck

$$(i)^{-r} J_r(2\,i\,b) \approx \frac{1}{\sqrt{4\pi b}} \exp\left\{2b - \frac{r^2}{4b}\right\}$$

sowie die Beziehung $W = b$ für $b = c$ nach (12.6.11) verwendet. Es ergibt sich

$$\overline{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{k\to k_r}} \approx |a|^2 \frac{\left[k^2 - \frac{2\mu}{\hbar}\,\omega_0\, r\right]^{1/2}}{k\sqrt{4\pi b}}\, e^{-\frac{r^2}{4b}}$$

für

$$\bar{\nu} \gg 1, \qquad r \leqq 2b, \qquad b > 2.$$

12.7. Der Brechungsindex von Neutronenwellen in Materie

Wir untersuchen zunächst die Wechselwirkung einer Neutronenwelle mit einem idealen Kristall. Ist die Wellenlänge der Neutronen wesentlich größer als der Abstand zwischen benachbarten Atomen im Kristall, so läßt sich die Wechselwirkung zwischen Neutron und Kristall dadurch beschreiben, daß man den Kristall durch ein homogenes Medium mit dem Brechungsindex n für die Brechung von Neutronenwellen ersetzt. In diesem Fall ist $k \ll \pi\, \tau_{\min}$, und nach den Resultaten des Abschn. 12.2. kann keine elastische Streuung der Neutronenwellen außer in Vorwärtsrichtung auftreten.

Die SCHRÖDINGER-Gleichung für Neutronen in einem Kristall läßt sich folgendermaßen schreiben:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\psi + V(r)\,\psi = E\,\psi. \qquad (12.7.1)$$

Dabei bedeutet $V(r)$ die potentielle Energie des Neutrons. Die Wechselwirkung zwischen Neutron und Kristall drücken wir durch das FERMIsche Pseudopotential (12.4.1) aus:

$$V(\mathfrak{r}) = \frac{2\pi\hbar^2}{\mu} \sum_j a_j\, \delta(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_j). \qquad (12.7.2)$$

Zu summieren ist dabei über alle Kerne des Kristalls. a_j bedeutet die Streulänge für kohärente Streuung langsamer Neutronen am j-ten Kern, $\mathfrak{r}_j$ den Radiusvektor für den Ort dieses Kerns im Kristall. Zur Vereinfachung nehmen wir im weiteren an, daß alle Kerne im Kristall untereinander identisch sind und keinen Spin besitzen. Setzt man (12.7.2) in (12.7.1) ein, so erhält man die Gleichung

$$\Delta\psi + k^2\psi = -4\pi \sum_j a\, \delta(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_j)\,\psi \qquad (12.7.3)$$

mit $k = \hbar^{-1}\sqrt{2\mu E}$ als Betrag des Wellenvektors des Neutrons im Vakuum.

Ist die Wellenlänge des Neutrons groß gegen den Abstand zwischen den Kernen, dann läßt sich die potentielle Energie (12.7.2) über das Volumen des Kristalls mitteln. Wir ersetzen die Summe über j in (12.7.2) durch das entsprechende Integral über das Volumen:

$$\sum_j \cdots \to \int \cdots N_0\, d\tau.$$

Dabei bedeutet N_0 die Zahl der Kerne in der Volumeneinheit des Kristalls. Man erhält

$$V = \frac{2\pi\hbar^2}{\mu} a N_0 .$$

Die SCHRÖDINGER-Gleichung mit der so gemittelten potentiellen Energie lautet nunmehr

$$\Delta\psi + k^2\psi = -4\pi N_0 a \psi .$$

Ihre Lösung läßt sich als ebene Welle $\psi = c\, e^{i\mathfrak{K}\mathfrak{r}}$ mit

$$\mathfrak{K}^2 = \mathfrak{k}^2 - 4\pi N_0 a \tag{12.7.4}$$

darstellen. Der Wellenvektor $\mathfrak{K}$ wird also durch die Streulänge bestimmt. Im allgemeinen Fall ist die Streulänge eine komplexe Größe $a = \alpha + i\beta$, so daß auch der Wellenvektor eine komplexe Größe wird.

Wir definieren nun den Brechungsindex n und den Absorptionskoeffizienten $\varkappa$ durch die Beziehungen

$$n = \frac{1}{k}\,\mathfrak{Re}\, k, \qquad \varkappa = 2\,\mathfrak{Im}\, k. \tag{12.7.5}$$

Setzt man (12.7.4) in (12.7.5) mit der Bedingung $\varkappa \ll k$ ein, so erhält man einfache Formeln für den Brechungsindex und den Absorptionskoeffizienten:

$$n = \sqrt{1 - 4\pi N_0 \alpha k^{-2}}, \quad \varkappa = -4\pi N_0 \beta (k^2 - 4\pi N_0 \alpha)^{-1/2}. \tag{12.7.5a}$$

Die Streulänge langsamer Neutronen ist für die meisten Kerne positiv, so daß $n < 1$ gilt. Der Imaginärteil β der Streulänge ist kleiner als Null.

Wir untersuchen nun die Wechselwirkung von Neutronen mit einem System aus Kernen beliebiger räumlicher Anordnung. Die exakte Untersuchung der Wechselwirkung eines Neutrons mit einem System aus vielen Kernen ist sehr kompliziert, da sie auf das Mehrkörperproblem führt. Angenähert läßt sich die Wechselwirkung jedoch auf die Vielfachstreuung an einzelnen Streuzentren zurückführen. In diesem Fall drückt sich die Lösung des komplizierten Vielteilchenproblems durch die Eigenschaften der einzelnen Streuzentren aus. Meist ist eine derartige angenäherte Untersuchung auf 2 Annahmen begründet:

1. Die Eigenschaften der einzelnen Streuzentren werden durch die Kopplung untereinander nicht verändert.

2. Alle Koordinaten, die den Ort der Streuzentren bestimmen, werden als adiabatische Parameter betrachtet, d. h., die Streuung wird bei fixierter Lage der Kerne berechnet und danach das Resultat über die Koordinatenverteilung der Streuzentren nach der Zeit oder im Konfigurationsraum gemittelt. Diese Annahme ist gerechtfertigt, wenn die Verschiebung der Streuzentren während einer Emissionsperiode klein im Vergleich zur Wellenlänge der gestreuten Welle ist.

Wir nehmen der Einfachheit halber an, daß das System aus identischen Kernen ohne Spin besteht. Die Wechselwirkung jedes Kerns mit einem langsamen Neutron wird im allgemeinen durch eine komplexe Streulänge

(s. Abschn. 12.1.) charakterisiert. Der Ort der Kerne sei durch die Radiusvektoren $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots, \mathfrak{r}_N$ festgelegt. Die Funktion $P(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots, \mathfrak{r}_N)\,(d\mathfrak{r})$ mit $(d\mathfrak{r}) = d\mathfrak{r}_1\, d\mathfrak{r}_2 \cdot \ldots \cdot d\mathfrak{r}_N$ bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich der Kern 1 im Volumenelement $d\mathfrak{r}_1$ im Punkt $\mathfrak{r}_1$, der Kern 2 im Volumenelement $d\mathfrak{r}_2$ im Punkt $\mathfrak{r}_2$ usw. befindet. Ist $f(\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_N)$ eine Funktion von $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots, \mathfrak{r}_N$, so wird ihr Mittelwert über die Verteilung P (Konfigurationsmittelung) durch das Integral

$$\langle f \rangle \equiv \int f(\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_N)\, P(\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_N)\,(d\mathfrak{r}) \tag{12.7.6}$$

gegeben.

Die einfallende Neutronenwelle sei durch die Funktion $\varphi(\mathfrak{r})$ gegeben, die der Gleichung

$$(\Delta + k^2)\,\varphi(\mathfrak{r}) = 0 \tag{12.7.7}$$

genügt.

Die an allen Kernen gestreute Welle wird im Beobachtungspunkt $\mathfrak{r}$ eine Funktion der Koordinaten aller Kerne sein: $\Phi = \Phi(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots, \mathfrak{r}_N, \mathfrak{r})$. Uns interessiert das Quadrat des Betrags der Gesamtwellenfunktion, gemittelt über die Kernverteilung. Dieser Ausdruck läßt sich in der Form

$$\langle |\varphi + \Phi|^2 \rangle = |\varphi + \langle \Phi \rangle|^2 + \langle |\Phi|^2 \rangle - |\langle \Phi \rangle|^2$$

darstellen. Hieraus folgt, daß die durch $\langle \Phi \rangle$ bestimmte Streuung kohärenten Charakter besitzt, da sie mit der einfallenden Welle φ interferiert. Dagegen ist die durch den Ausdruck $\langle |\Phi|^2 \rangle - |\langle \Phi \rangle|^2$ bestimmte Streuung absolut inkohärent. Nehmen die identischen Kerne streng fixierte Plätze ein, so gilt $\Phi = \langle \Phi \rangle$, und die gesamte Strahlung wird kohärent mit Ausnahme der durch das einzelne Streuzentrum bedingten Inkohärenz (Abschn. 12.2.).

Nach Abschn. 7.2. läßt sich die allgemeine Lösung der Gleichung für die Streuung einer Welle $\varphi(\mathfrak{r})$ am Potential $V(\mathfrak{r}) = \frac{\hbar^2}{2\mu}\,u(\mathfrak{r})$ in folgender Form darstellen:

$$\Phi(\mathfrak{r}) = \varphi(\mathfrak{r}) - \frac{1}{4\pi} \int \frac{e^{ik|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}'|}}{|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}'|}\, u(\mathfrak{r}')\, \Phi(\mathfrak{r}')\,(d\mathfrak{r}'). \tag{12.7.8}$$

Bei der Untersuchung der Streuung langsamer Neutronen kann man als potentielle Wechselwirkungsenergie das Fermische Pseudopotential verwenden. Man setzt also $u(\mathfrak{r}) = 4\pi a\, \delta(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_j)$ mit $\mathfrak{r}_j$ als Koordinate des Streuzentrums und löst die Integralgleichung (12.7.8) in der ersten Bornschen Näherung. Es wird

$$\Phi(\mathfrak{r}) = \varphi(\mathfrak{r}) + a\, F(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}_j)\, \varphi(\mathfrak{r}_j) \tag{12.7.9}$$

mit

$$F(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}_j) \equiv - \frac{e^{ik|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_j|}}{|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_j|}. \tag{12.7.10}$$

Das erste Glied in (12.7.9) stellt die einfallende Welle, das zweite die gestreute Welle dar. Man kann also schreiben

$$\Phi_{\text{gestr}} = a\, F(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}_j)\, \varphi(\mathfrak{r}_j). \tag{12.7.11}$$

Der Operator $a\,F(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}_j)$ „verwandelt" also die den Kern treffende Welle $\varphi(\mathfrak{r}_j)$ in eine gestreute Welle.

Wir wenden nun die Beziehung (12.7.11) auf unser System von Streuzentren an. Auf jeden Kern j wirkt eine Welle, die aus einfallender und an allen anderen Kernen gestreuter Welle besteht. Folglich gilt

$$\Phi_j(\mathfrak{r}_j) = \varphi(\mathfrak{r}_j) + \sum_{l \neq j} a\,F(\mathfrak{r}_j, \mathfrak{r}_l)\,\Phi_l(\mathfrak{r}_l). \tag{12.7.12}$$

Die an jedem einzelnen Kern gestreute Welle liefert zusammen mit der einfallenden Welle

$$\Phi(\mathfrak{r}) = \varphi(\mathfrak{r}) + \sum_{j=1}^{N} a\,F(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}_j)\,\Phi_j(\mathfrak{r}_j). \tag{12.7.13}$$

Das Gleichungssystem (12.7.12), (12.7.13) stellt das Grundgleichungssystem für die Vielfachstreuung langsamer Neutronen an Kernen dar.

Ebenso wie in der Optik wird auch in der Neutronenphysik der Brechungsindex eines Stoffes bezüglich der Brechung von Neutronenwellen als Änderung der Phasengeschwindigkeit (Wellenlänge) der gesamten Welle (einfallende plus alle gestreuten Wellen) bestimmt. Diese Änderung der Phasengeschwindigkeit ergibt sich auf Grund eines Phasenunterschieds zwischen der einfallenden und den gestreuten Wellen. Um den Brechungsindex eines Stoffes zu bestimmen, braucht also nur der kohärente Anteil untersucht zu werden.

Wir bestimmen nun das Ausbreitungsgesetz für kohärente Wellen $\langle\Phi\rangle$ in Materie. Dazu führen wir die Konfigurationsmittelung im Gleichungssystem (12.7.12), (12.7.13) aus. Es ergibt sich

$$\langle\Phi(\mathfrak{r})\rangle = \varphi(\mathfrak{r}) + \sum_{j=1}^{N} a \int F(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}_j)\,\frac{N_0(\mathfrak{r}_j)}{N}\,\langle\Phi_j(\mathfrak{r}_j)\rangle_j\,(d\mathfrak{r})_j \tag{12.7.14}$$

mit

$$\langle\Phi_j(\mathfrak{r}_j)\rangle_j \equiv \int \Phi_j(\mathfrak{r}_j)\,P(\mathfrak{r}_j;\, \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots, \mathfrak{r}_N)\,(d\mathfrak{r})_j,$$

$$(d\mathfrak{r})_j \equiv \frac{(d\mathfrak{r})}{d\mathfrak{r}_j}$$

und

$$P(\mathfrak{r}_j;\, \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots, \mathfrak{r}_N) = \frac{P(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots, \mathfrak{r}_N)}{P(\mathfrak{r}_j)}$$

als Wahrscheinlichkeit, die bei gegebenem $\mathfrak{r}_j$ die Verteilung aller übrigen Kerne bestimmt. Weiterhin ist $N_0(\mathfrak{r}_j) = N\,P(\mathfrak{r}_j)$ die mittlere Kerndichte im Punkt $\mathfrak{r}_j$. Berücksichtigt man die Identität der Kerne, so läßt sich die Gl. (12.7.14) in der Form

$$\langle\Phi(\mathfrak{r})\rangle = \varphi(\mathfrak{r}) + a \int F(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}_j)\,N_0(\mathfrak{r}_j)\,\langle\Phi_j(\mathfrak{r}_j)\rangle_j\,(d\mathfrak{r})_j \tag{12.7.15}$$

schreiben. Die Funktion $\langle\Phi_j(\mathfrak{r}_j)\rangle_j$ ist ein auf den j-ten Kern wirkendes Feld, das über alle möglichen Konfigurationen der übrigen Kerne gemittelt wurde. Es unterscheidet sich vom mittleren Feld durch das von einem Streuzentrum emittierte Feld. Angenähert kann man $\langle\Phi_j(\mathfrak{r}_j)\rangle_j$ durch das mittlere Feld ersetzen:

$$\langle\Phi_j(\mathfrak{r}_j)\rangle_j \approx \gamma\,\langle\Phi(\mathfrak{r}_j)\rangle \approx \langle\Phi(\mathfrak{r}_j)\rangle,$$

wobei der Faktor γ, der den Unterschied zwischen dem wirklichen Feld und dem mittleren Feld angibt, bis auf Glieder der Größenordnung N^{-1} gleich 1 gesetzt wird. In dieser Näherung lautet die Gl. (12.7.15)

$$\langle \Phi(\mathfrak{r}) \rangle = \varphi(\mathfrak{r}) + a \int N_0(\mathfrak{r}_j)\, F(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}_j) \langle \Phi(\mathfrak{r}_j) \rangle\, (d\mathfrak{r})_j .$$

Läßt man auf die erhaltene Integralgleichung den Operator $\Delta + k^2$ wirken, so erhält man unter Berücksichtigung von (12.7.7) und $(\Delta + k^2)\, F(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}_j) = \pi\, \delta(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_j)$

$$[\Delta + K^2(\mathfrak{r})] \langle \Phi(\mathfrak{r}) \rangle = 0 \qquad (12.7.16)$$

mit

$$\mathfrak{K}^2(\mathfrak{r}) = \mathfrak{k}^2 - 4\pi N_0(\mathfrak{r})\, a . \qquad (12.7.17)$$

Der kohärente Teil der Welle $\langle \Phi \rangle$ genügt also der Wellengleichung (12.7.16) mit einem Wellenvektor $\mathfrak{K}$, der von der Streulänge für jeden Kern und der mittleren Kerndichte abhängt. Die mittlere Kerndichte ist im allgemeinen eine Funktion der Koordinaten. Gilt $N_0(\mathfrak{r}) = \text{const}$, so fällt die Gl. (12.7.17) mit (12.7.4) zusammen. In diesem Fall werden Brechungsindex und Absorptionskoeffizient für Neutronen durch Materie durch die Formeln (12.7.5a) gegeben.

KAPITEL 13*

OPTISCHES MODELL DER KERNWECHSELWIRKUNGEN BEI NIEDRIGEN ENERGIEN

13.1. Streuung von Nukleonen an Kernen als Vielfachstreuung

Die Theorie der Wechselwirkung eines Nukleons mit einem schweren Kern stellt ein Vielkörperproblem dar. Es ist bekannt, daß das Vielkörperproblem sowohl in der klassischen als auch in der Quantenmechanik nicht exakt lösbar ist. In der klassischen Mechanik, der Astronomie, der Atomtheorie und der Theorie der Festkörper wurden Näherungsmethoden für solche Aufgaben entwickelt, die auf der Störungsrechnung beruhen. In der Kerntheorie erwiesen sich diese Methoden wegen der Stärke der Kernwechselwirkungen als ungeeignet. Daher mußten verschiedene Modellvorstellungen über die Kernstruktur benutzt werden, um die Eigenschaften des Kerns zu beschreiben. Eines dieser Modelle ist das optische Modell der Kernwechselwirkungen, das in den Arbeiten [13,1] bis [13,4] zur Beschreibung von Kernreaktionen mit Neutronen einer Energie kleiner als 3 MeV vorgeschlagen wurde. Später wandte man das Modell vor allem auch zur Beschreibung der Wechselwirkung von Neutronen und Protonen hoher Energie (20 bis 30 MeV) mit Kernen an.

Nach dem optischen Modell der Kernwechselwirkungen wird das Vielkörperproblem durch die einfachere Aufgabe der Bewegung eines Körpers in einem effektiven Potentialfeld betrachtet, d. h., das Vielkörperproblem wird auf ein Einkörperproblem zurückgeführt. Eine theoretische Begründung dieser Möglichkeit wird in den Arbeiten [13,5] bis [13,7] gegeben.

Im Abschn. 12.7. hatten wir gezeigt, daß die Wechselwirkung eines Kristalls mit Neutronen angenähert beschrieben werden kann, wenn der Kristall durch ein homogenes Medium mit komplexem Brechungsindex ersetzt wird. Dabei muß natürlich die Wellenlänge der Neutronen den Abstand zwischen benachbarten Atomen im Kristall übersteigen. Eine solche Beschreibung gestattet die Untersuchung des Durchgangs des kohärenten Teils der Neutronenwelle durch den Kristall.

In diesem Kapitel werden wir zeigen, daß der Durchgang eines Nukleons durch Kernmaterie auch mit Hilfe eines komplexen Brechungsindex der Kernmaterie (komplexes Potential) untersucht werden kann. Bei dieser Beschreibung wird die Wechselwirkung zwischen Nukleon und Kern natürlicherweise in elastische Streuung ohne Bildung eines Compoundkerns (bedingt durch den Realteil des Potentials) und in alle anderen Prozesse, die über ein Compoundkernstadium verlaufen (bedingt durch den Imaginärteil des Potentials), aufgespalten.

Es sei H_A der HAMILTON-Operator des Kerns. E'_n und $\varphi_n(\xi)$ seien seine Eigenwerte und Eigenfunktionen, so daß

$$H_A \varphi_n(\xi) = E'_n \varphi_n(\xi) \tag{13.1.1}$$

gilt. Dabei ist durch den Index n die Gesamtheit aller Quantenzahlen, die den inneren Kernzustand bestimmen, bezeichnet. Es sei weiterhin

$$\hat{K} \equiv -\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta_r \tag{13.1.1a}$$

der Operator für die kinetische Energie der Relativbewegung von Kern und äußerem Nukleon. $\mu = M A/(A + 1)$ bedeutet die reduzierte Masse, A die Massenzahl des Kerns und M die Nukleonenmasse.

Eigenfunktionen und Eigenwerte des Operators $\hat{K}$ ergeben sich aus der Gleichung

$$\hat{K} \chi_{k\nu}(r) = \varepsilon_k \chi_{k\nu}(r) \tag{13.1.2}$$

mit $\varepsilon_k = \hbar^2 k^2/2\mu$ als Energie der Relativbewegung; $\mathfrak{k}$ bedeutet den Wellenvektor und ν die Gesamtheit aller Quantenzahlen, die den Spin des Nukleons, den Gesamtspin des Kerns usw. charakterisieren.

Die SCHRÖDINGER-Gleichung für einen stationären Zustand des Systems aus Kern und äußeren Nukleonen mit der Gesamtenergie

$$E_a = E'_0 + \varepsilon_k \tag{13.1.3}$$

lautet

$$(H_0 + V) \Psi_a = E_a \Psi_a. \tag{13.1.4}$$

Dabei sind $H_0 = H_A + \hat{K}$, $a \equiv (0, \mathfrak{k}, \nu)$ und V die Wechselwirkungsenergie von äußerem Nukleon und Kern.

Wir setzen

$$V = \sum_{\alpha=1}^{A} V_\alpha. \tag{13.1.5}$$

Dabei sei V_α die Wechselwirkungsenergie des äußeren Nukleons mit dem α-ten Kernnukleon. Ist das einfallende Nukleon ein Neutron, so hängt seine Wechselwirkung mit den Kernnukleonen nicht von der elektrischen Ladung der Nukleonen ab (Hypothese über die Ladungsunabhängigkeit der Kernkräfte). Ist es ein Proton, so muß neben den ladungsunabhängigen Kernkräften auch noch die COULOMB-Wechselwirkung mit dem Kern berücksichtigt werden. Die COULOMB-Wechselwirkung fällt mit dem Abstand nur schwach ab, so daß einfallende und auslaufende Wellen durch das COULOMB-Feld des Kerns sogar in unendlicher Entfernung verzerrt werden (wenn man nicht die Abschirmung des COULOMB-Feldes durch die Hüllenelektronen berücksichtigt). Die Streuung im COULOMB-Feld und der Einfluß des COULOMB-Feldes auf die Streuung durch Kernkräfte können exakt berücksichtigt werden (s. Abschn. 9.3.). Um die Rechnungen in diesem Kapitel nicht zu sehr zu erschweren, berücksichtigen wir nur die spezifischen Kernwechselwirkungen zwischen dem einfallenden Nukleon und dem Kern. Die gewonnenen Resultate beziehen sich also unmittelbar auf die Streuung von Neutronen an Kernen.

Wir bezeichnen mit $\Phi_a = \varphi_0 \chi_{k\nu}$ die Wellenfunktion des Anfangszustandes mit der Energie E_a, der ein unendlich großer Abstand zwischen Nukleon und Kern entspricht. Die Übergangswahrscheinlichkeit (für die Streuung) je Zeiteinheit aus dem Zustand Φ_a in den Endzustand $\Phi_b = \varphi_0 \chi_{k'\nu'}$ wird nach der allgemeinen Streutheorie (s. Kap. 9) durch die Beziehung

$$P_{ba} = \frac{2\pi}{\hbar} \delta(E_a - E_b) |T_{ba}|^2 \tag{13.1.6}$$

gegeben. Dabei liefert das Matrixelement mit der Wechselwirkung V die Wahrscheinlichkeitsamplitude des Übergangs:

$$T_{ba} = (\Phi_b, V \Psi_a). \tag{13.1.7}$$

Die in (13.1.7) eingehende Wellenfunktion Ψ_a ist Lösung der Gl. (13.1.4). Die asymptotische Form dieser Wellenfunktion für große r stellt eine Superposition aus einfallender Welle Φ_a und auslaufenden (gestreuten) Wellen dar. Die Lösung kann in Form einer Integralgleichung (s. Abschn. 9.1.) geschrieben werden:

$$\Psi_a = \Phi_a + D^{-1} V \Psi_a. \tag{13.1.8}$$

Dabei ist D^{-1} ein Integraloperator, dessen Kern aus der GREENschen Funktion des Operators $E_a - H_0$ besteht:

$$D = (E_a + i\eta - H_0). \tag{13.1.9}$$

Die kleine positive Zahl η wird in (13.1.9) deshalb eingeführt, weil dann im zweiten Glied von (13.1.8) nur auslaufende Wellen auftreten. Nach Berechnung der entsprechenden Integrale muß man zum Grenzwert $\eta \to 0$ übergehen.

Führt man den Operator Ω durch die Beziehung

$$\Psi_a = \Omega \Phi_a \tag{13.1.10}$$

ein und setzt

$$T \equiv V \Omega, \tag{13.1.11}$$

so nimmt das Matrixelement (13.1.7) folgende Form an:

$$T_{ba} = (\Phi_b, T \Phi_a). \tag{13.1.12}$$

Die Gl. (13.1.8) lautet jetzt

$$\Psi_a = \Phi_a + D^{-1} T \Phi_a. \tag{13.1.13}$$

Sie zeigt, daß Ψ_a als Summe einer einfallenden Welle Φ_a und einer gestreuten Welle

$$(\Psi_a)_{\text{gestr}} = D^{-1} T \Phi_a$$

dargestellt werden kann. Der Operator $D^{-1} T$ „transformiert" also die einfallende Welle Φ_a in die gestreute Welle.

Setzt man (13.1.10) in (13.1.8) ein, so kann man zeigen, daß der Operator Ω folgender Operatorgleichung genügen muß:

$$\Omega = 1 + D^{-1} V \Omega. \tag{13.1.14}$$

Der Operator T genügt der Gleichung

$$T = V + V D^{-1} T. \tag{13.1.15}$$

Wir führen nun in Analogie zu (13.1.15) einen neuen Hilfsoperator t_α ein, der den effektiven Anteil der Streuung des einfallenden Neutrons an einem Kernnukleon über die Integralgleichung

$$t_\alpha = V_\alpha + V_\alpha D^{-1} t_\alpha \tag{13.1.16}$$

bestimmt. Aus (13.1.16) folgt

$$V_\alpha = t_\alpha (1 + D^{-1} t_\alpha)^{-1}. \tag{13.1.17}$$

Unter Benutzung von (13.1.5) und durch Einsetzen von (13.1.17) läßt sich die Operatorgleichung (13.1.14) zu einem äquivalenten System von Operatorgleichungen umformen:

$$\left.\begin{aligned} \Omega &= 1 + D^{-1} \sum_\alpha t_\alpha \Omega_\alpha, \\ \Omega_\alpha &= 1 + D^{-1} \sum_\beta{}' t_\beta \Omega_\beta. \end{aligned}\right\} \tag{13.1.18}$$

Dabei bedeutet der Strich am Summenzeichen, daß über β mit $\beta \neq \alpha$ zu summieren ist.

Multipliziert man die rechte und linke Seite von (13.1.18) von rechts mit Φ_a und führt die Bezeichnung $\Psi_{\alpha a} = \Omega_\alpha \Phi_a$ ein, so erhält man das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} \Psi_a &= \Phi_a + \sum_\alpha D^{-1} t_\alpha \Psi_{\alpha a}, \\ \Psi_{\alpha a} &= \Phi_a + \sum_\beta{}' D^{-1} t_\beta \Psi_{\beta a}. \end{aligned}\right\} \tag{13.1.19}$$

Die erste der Gln. (13.1.19) zeigt, daß die Welle Ψ_a eine Superposition einer einfallenden Welle und der Wellen $D^{-1} t_\alpha \Psi_{\alpha a}$ darstellt, die durch Streuung an den einzelnen Kernnukleonen entstehen. Dabei wird die am α-ten Nukleon gestreute Welle $\Psi_{\alpha a}$, wie aus der zweiten der Gln. (13.1.19) folgt, ihrerseits gleich einer Summe aus einfallender Welle und der durch alle anderen Nukleonen (außer α) gestreuten Welle. Diese Gleichung bestimmt also ein effektives Wellenfeld, daß auf jedes einzelne Nukleon im Kern wirkt. Die Gleichungen (13.1.19) gestatten, die totale Streuung durch die Eigenschaften der einzelnen Streuzentren und durch die Struktur des Gesamtsystems auszudrücken.

Bei der Ableitung von (13.1.19) wurde wesentlich die Annahme benutzt, daß die Wechselwirkung des einfallenden Neutrons mit dem Kern als Summe (13.1.5) der potentiellen Wechselwirkungsenergien mit jedem Kernnukleon dargestellt werden kann. Diese Vereinfachung ist nur in nichtrelativistischer Näherung zulässig und setzt voraus, daß die Vielteilchenkräfte vernachlässigbar sind.

13.2. Kohärente und inkohärente elastische Streuung von Neutronen an Kernen

Bei der elastischen Streuung von Nukleonen an Kernen ändert sich die innere Struktur des Kerns nicht. Daher wird die elastische Streuung nach (13.1.7) durch das Matrixelement

$$T_{ba} = (\Phi_b, T \Phi_a) = (\chi_{k' \nu'}, \langle T \rangle \chi_{k \nu}) \tag{13.2.1}$$

bestimmt. Hier und im weiteren schließen die spitzen Klammern $\langle\,\rangle$ das Diagonalmatrixelement im Kernanfangszustand φ_0 der Größe, die innerhalb der Klammer steht, ein: $\langle T\rangle \equiv (\varphi_0, T\,\varphi_0)$. Zur Berechnung von (13.2.1) muß man $\langle T\rangle$ kennen. Der Operator $\langle T\rangle$ bestimmt den totalen Streuquerschnitt für elastische Streuung, der gleich der Summe für die elastische Streuung über das Compoundkernstadium (elastische Streuung über den Compoundkern) und für die elastische Streuung ohne Compoundkernbildung (formelastische Streuung) ist.

Um die formelastische Streuung abzutrennen, berechnen wir zunächst das Matrixelement $\langle\Omega\rangle$. Dazu mitteln wir das Gleichungssystem (13.1.18) über die Anfangszustände des Kerns. Es gilt

$$\left.\begin{aligned}\langle\Omega\rangle &= 1 + B^{-1}\sum_\alpha \langle t_\alpha\,\Omega_\alpha\rangle,\\ \langle\Omega_\alpha\rangle &= 1 + B^{-1}\sum_\beta{}' \langle t_\beta\,\Omega_\beta\rangle\end{aligned}\right\} \tag{13.2.2}$$

mit

$$B \equiv \varepsilon_k + i\,\eta - \hat{K}_r. \tag{13.2.3}$$

Die Operatoren $\langle\Omega\rangle$ und $\langle\Omega_\alpha\rangle$ wirken nur auf die Veränderlichen r und ν und hängen nicht von den Variablen für die inneren Zustände des Kerns ab. Man muß natürlich beachten, daß die Operatoren t_α und Ω_α von den Nukleonenkoordinaten α im Kern abhängen. Bei der Mittelung über den Anfangszustand erhält man jedoch die Größen $\langle t_\alpha\rangle$, $\langle\Omega_\alpha\rangle$ und $\langle t_\alpha\,\Omega_\alpha\rangle$, die nicht vom Index α abhängig sind, da φ_0 antisymmetrisch bezüglich gleichzeitiger Vertauschung von räumlichen Koordinaten, Spin- und Ladungsspinkoordinaten ist.

Wir spalten $\langle t_\alpha\,\Omega_\alpha\rangle$ auf folgende Weise in 2 Anteile auf:

$$\langle t_\alpha\,\Omega_\alpha\rangle = \langle t_\alpha\rangle\,\langle\Omega_\alpha\rangle + \delta. \tag{13.2.4}$$

Dabei ist

$$\delta \equiv \sum_n{}' (0\,|t_\alpha|\,n)\,(n\,|\Omega_\alpha|\,0) \tag{13.2.4a}$$

gesetzt. Der Strich am Summenzeichen bedeutet, daß in der Summe das Glied mit $n = 0$ fortzulassen ist.

Die elastische Streuung, die durch die Glieder $\langle t_\alpha\rangle$, $\langle\Omega_\alpha\rangle$ bestimmt wird, bezeichnet man als *kohärente elastische Streuung*. Das Glied δ bestimmt den Anteil der elastischen Streuung, der durch eine Reihe aufeinanderfolgender unelastischer Streuungen bedingt ist. Im Resultat dieser unelastischen Streuung verläßt das Nukleon den Kern, wobei es dessen Anfangszustand nicht verändert. Da Wellen, die an 2 Streuzentren gestreut wurden, untereinander nicht interferieren, wenn eines seinen Zustand ändert, bezeichnet man die elastische Streuung, die im Resultat aufeinanderfolgender unelastischer Prozesse auftritt, als *inkohärente Streuung*.

Die großen Erfolge des Schalenmodells und Angaben über die Neutronenstreuung bei Energien kleiner als 3 MeV für mittelschwere und schwere Kerne deuten auf eine große Durchdringungswahrscheinlichkeit der Kernmaterie ohne Compoundkernbildung hin. Daher spielt auch die kohärente

Streuung bei der elastischen Streuung eine große Rolle. Nach der Hypothese über den Compoundkern wird die elastische Streuung über den Compoundkern zu einem wenig wahrscheinlichen Ereignis.

Zur Erklärung des großen Anteils der kohärenten Streuung bei der elastischen Streuung von Neutronen dienen meist folgende qualitative Überlegungen: Bei kleinen Neutronenenergien hindert das PAULI-Prinzip die unelastische Streuung, da bei Streuung mit kleiner Energieänderung das Nukleon auf ein schon besetztes Niveau trifft. Unelastische Streuung liefern nur solche Nukleonenstöße, bei denen beide Nukleonen in unbesetzte Zustände gelangen können. Beide Nukleonen müssen also Zustände besetzen, die oberhalb der FERMI-Grenze liegen. Bei der inkohärenten Streuung eines langsamen Neutrons können also nur solche Kernnukleonen Anteil haben, die Zustände in der Nähe der FERMI-Grenze innehaben. Aus diesem Grund wird natürlich die inkohärente elastische Streuung, die mehrere aufeinanderfolgende unelastische Stöße voraussetzt, weniger wahrscheinlich als die kohärente elastische Streuung, die schon bei einem Stoß vor sich gehen kann.

Die inkohärente Streuung eines schnellen Nukleons ist möglich bei starker Veränderung eines Nukleonenzustandes im Kern. Damit eine derartige Streuung elastisch sein kann, sind mehrere aufeinanderfolgende unelastische Stöße notwendig, die den Kern beim letzten Stoß wieder in seinen Anfangszustand überführen müssen. Dieser Prozeß, der zur inkohärenten elastischen Streuung führt, ist sehr wenig wahrscheinlich. Wesentlich wahrscheinlicher wird einer der vielen möglichen unelastischen Prozesse sein, die mit der elastischen Streuung konkurrieren. Die elastische Streuung wird im wesentlichen kohärent sein.

Die oben angeführten qualitativen Überlegungen lassen hoffen, daß die inkohärente elastische Streuung von Nukleonen an Kernen in einem bestimmten Energiegebiet als Störung anzusehen ist, so daß in erster Näherung nur kohärente Streuung berücksichtigt zu werden braucht. Durch Berechnung des Anteils der inkohärenten elastischen Streuung mit Hilfe der Störungsrechnung kann man den Fehler, der durch die Vernachlässigung dieses Effektes gemacht wird, abschätzen.

13.3. Kohärente elastische Streuung und das effektive komplexe Potential

In diesem Abschnitt wollen wir annehmen, daß die elastische Streuung nur kohärenten Charakter besitzt. Wir setzen also in erster Näherung

$$I_\alpha \equiv t_\alpha - \langle t_\alpha \rangle = 0 .$$

Dann geht (13.2.2) in folgendes Gleichungssystem über:

$$\langle \Omega \rangle = 1 + B^{-1} \sum_\alpha \langle t_\alpha \rangle \langle \Omega_\alpha \rangle, \tag{13.3.1}$$

$$\langle \Omega_\alpha \rangle = 1 + B^{-1} \sum_\beta{}' \langle t_\beta \rangle \langle \Omega_\beta \rangle . \tag{13.3.2}$$

Wir führen die vereinfachende Annahme ein, die in fast allen Betrachtungen der Vielfachstreuung verwendet wird, daß das mittlere effektive Potential proportional dem gesamten kohärenten Feld ist. Wir setzen also $\langle \Omega_\alpha \rangle = \gamma \langle \Omega \rangle$, wobei $\gamma \approx 1$ bis auf Glieder der Ordnung A^{-1} eine Konstante ist. Damit geht (13.3.1) in die Gleichung

$$\langle \Omega \rangle = 1 + B^{-1} U \langle \Omega \rangle \equiv 1 + B^{-1} T_{\text{el}} \tag{13.3.3}$$

über, wobei

$$U \equiv \gamma \sum_\alpha \langle t_\alpha \rangle \tag{13.3.4}$$

und

$$T_{\text{el}} \equiv U \langle \Omega \rangle \tag{13.3.5}$$

gesetzt ist.

Mit dem Operator $\langle \Omega \rangle$ kann man die Wellenfunktion der elastischen kohärenten Streuung $\Psi^{\text{el}}_{k\nu}(r)$ für jede „einfallende" Welle Φ_a berechnen:

$$\Psi^{\text{el}}_a \equiv \Psi^{\text{el}}_{k\nu}(r)\, \varphi_0(\xi) = \langle \Omega \rangle\, \Phi_a. \tag{13.3.6}$$

Das Matrixelement für den Wirkungsquerschnitt der kohärenten elastischen Streuung läßt sich mit einer der Gleichungen

$$T^{\text{el}}_{ba} = (\Phi_b, T_{\text{el}}\, \Phi_a) = (\Phi_b, U \langle \Omega \rangle\, \Phi_a) = (\chi_{k'\nu'}, U\, \Psi^{\text{el}}_{k\nu})$$

berechnen. Nach (13.3.3) muß die Funktion $\Psi^{\text{el}}_{k\nu}$ der Integralgleichung

$$\Psi^{\text{el}}_{k\nu} = \chi_{k\nu} + B^{-1} U\, \Psi^{\text{el}}_{k\nu} \tag{13.3.7}$$

genügen, der die Differentialgleichung

$$(\hat{K}_r + U - \varepsilon_k)\, \Psi^{\text{el}}_{k\nu} = 0 \tag{13.3.8}$$

mit folgender Randbedingung entspricht: Bei $r \to \infty$ muß $\Psi^{\text{el}}_{k\nu}$ in eine Summe aus einfallender und gestreuter Welle übergehen. Setzt man den Ausdruck für den Operator $\hat{K}$ und ε_k ein, so läßt sich (13.3.8) in der Form

$$\left(\Delta_r - \frac{2\mu}{\hbar^2} U + k^2\right) \Psi^{\text{el}}_{k\nu} = 0 \tag{13.3.8a}$$

schreiben.

Unter Benutzung von (13.1.16) und (13.3.4) läßt sich das in die Gl. (13.3.8a) eingehende Potential folgendermaßen darstellen:

$$U = \gamma \sum_\alpha \langle t_\alpha \rangle \approx \sum_\alpha \langle t_\alpha \rangle = \sum_\alpha (\varphi_0 | V_\alpha | \varphi_0) + \sum_\alpha \int \frac{(\varphi_0 | V_\alpha | \Phi_n)(\Phi_n | t_\alpha | \varphi_0)}{E_a - E_n + i\eta}\, \varrho(E_n)\, dE_n. \tag{13.3.9}$$

Dabei sind E_n und Φ_n die Eigenwerte und Eigenfunktionen des Operators H_0 und $\varrho(E_n)$ die Dichte der Zustände im Gebiet der Energien E_n.

Die durch (13.3.9) gegebene potentielle Energie U ist eine Funktion der Energie (oder von k^2) der Relativbewegung von Neutron und Kern und von ihrem Relativabstand:

$$U = U(k, r).$$

Nimmt man an, daß der Kern große Abmessungen besitzt, so lassen sich unter Vernachlässigung von Oberflächeneffekten und unter der Annahme einer konstanten Kerndichte die Eigenschaften der Kernmaterie bezüglich der Bewegung des äußeren Nukleons durch einen Brechungsindex beschreiben, der nur von der Wellenzahl k abhängt. Man kann also setzen $U = U(k)$. In diesem Fall wird der Operator der potentiellen Energie in der Impulsdarstellung durch eine Diagonalmatrix gegeben:

$$(\mathfrak{k}' \,|U|\, \mathfrak{k}) = U(k)\, \delta(\mathfrak{k} - \mathfrak{k}').$$

In der Koordinatendarstellung ist dieser Operator eine Funktion der Differenz der Koordinaten:

$$(\mathfrak{r}' \,|U|\, \mathfrak{r}) = f(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}').$$

Bei konstantem Wert der potentiellen Energie U innerhalb des Kerns kann man die Lösung von (13.3.8a) als ebene Welle mit der entsprechenden Randbedingung an der Kernoberfläche ansetzen:

$$\Psi_{k\nu}^{\mathrm{el}} = C \exp(i\, \mathfrak{q}\, \mathfrak{r}). \tag{13.3.10}$$

Die Konstante C wird so gewählt, daß die Normierungsbedingung

$$(\Psi_{k\nu}^{\mathrm{el}}, \Psi_{k\nu}^{\mathrm{el}}) = 1$$

erfüllt ist. Setzt man (13.3.10) in (13.3.8a) ein, so erhält man eine Gleichung, die die Wellenvektoren des Neutrons $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{k}$ außerhalb und innerhalb des Kerns miteinander verknüpft:

$$\mathfrak{q}^2 = \mathfrak{k}^2 - u \tag{13.3.11}$$

mit

$$u = \frac{2\mu}{\hbar^2}\, U. \tag{13.3.11a}$$

Wir führen nun den Brechungsindex n und den Absorptionskoeffizienten $\varkappa$ ein:

$$n = \frac{1}{k}\, \mathfrak{Re}\, q, \qquad \varkappa = 2\, \mathfrak{Im}\, q. \tag{13.3.12}$$

Die Bewegung des Nukleons in der Kernmaterie, die der kohärenten Streuung entspricht, wird also durch ebene Wellen beschrieben, die sich in einem „homogenen" Medium ausbreiten. Das Medium ist durch einen Brechungsindex und einen Absorptionskoeffizienten, die von der Wellenlänge (der Energie) des Neutrons abhängen, charakterisiert. Diese Größen beschreiben die kollektive Wechselwirkung aller Kernnukleonen mit dem betreffenden Nukleon, da die die Nukleonenbewegung darstellende ebene Welle (13.3.10) eine Superposition aller kohärent an jedem Kernnukleon gestreuten Wellen darstellt.

Aus (13.3.12) und (13.3.11) folgt

$$\varkappa = -\frac{1}{n\,k}\, \mathfrak{Im}\, u. \tag{13.3.13}$$

Ist $\varkappa \ll k$, so ergibt sich der Brechungsindex der Kernmaterie (13.3.12) aus der einfachen Beziehung

$$n = \left(1 - \frac{1}{k^2}\, \mathfrak{Re}\, u\right)^{1/2}. \tag{13.3.14}$$

Der Absorptionskoeffizient (13.3.13) gibt unmittelbar den makroskopischen Wirkungsquerschnitt Σ_{in} aller Prozesse an, die zur Schwächung des ursprünglichen Teilchenbündels führen:

$$\Sigma_{in} \equiv N_1 \sigma_{in} = \varkappa = -\frac{1}{n\,k} \Im\mathrm{m}\, u .$$

Dabei bedeutet N_1 die Nukleonenzahl in der Volumeneinheit. Die entsprechenden Übergangswahrscheinlichkeiten je Zeit- und Volumeneinheit des Stoffes erhält man durch Multiplikation von Σ_{in} mit der Flußdichte der Teilchen in der Kernmaterie:

$$W_{in} = \frac{\hbar\, n\, k}{\mu} \Sigma_{in} = -\frac{2}{\hbar} \Im\mathrm{m}(\Psi^{\mathrm{el}}_{k\nu},\, U\, \Psi^{\mathrm{el}}_{k\nu}). \tag{13.3.15}$$

Die Gl. (13.3.15) ist als Sonderfall einer allgemeineren Beziehung anzusehen, die die Wahrscheinlichkeit aller Streuprozesse mit der elastischen Streuung in der ursprünglichen Richtung verknüpft. Wie schon früher bemerkt wurde, muß jede Streuung (elastische und unelastische einschließlich Kernreaktionen) durch eine Schwächung der in der ursprünglichen Richtung laufenden Welle begleitet werden, die durch entsprechende Interferenz der einfallenden Welle mit der elastisch gestreuten Welle, die sich in derselben Richtung weiterbewegt, hervorgerufen wird. Durch diese Tatsache wird der Zusammenhang zwischen der elastischen Vorwärtsstreuung und der totalen Wahrscheinlichkeit aller anderen Streuprozesse erklärt. Wir wollen diesen wichtigen Satz beweisen.

Das Matrixelement des Operators (13.3.5) für kohärente elastische Vorwärtsstreuung kann unter Berücksichtigung von (13.3.6) in folgender Form geschrieben werden:

$$T^{\mathrm{el}}_{aa} \equiv (\Phi_a,\, T_{\mathrm{el}} \Phi_a) = (\Phi_a,\, U\, \Psi^{\mathrm{el}}_a); \tag{13.3.16}$$

dabei ist

$$\Psi^{\mathrm{el}}_a = \Phi_a + B^{-1}\, U\, \Psi^{\mathrm{el}}_a. \tag{13.3.17}$$

Setzt man Φ_a aus (13.3.17) in (13.3.16) ein, so erhält man

$$T^{\mathrm{el}}_{aa} = (\Psi^{\mathrm{el}}_a,\, U\, \Psi^{\mathrm{el}}_a) - (\Psi^{\mathrm{el}}_a,\, U^+ B^{-1}\, U\, \Psi^{\mathrm{el}}_a)^* \tag{13.3.18}$$

mit $B = \varepsilon_a - K_r + i\,\eta$. Dabei benutzten wir die Relation

$$(B^{-1}\, U\, \Psi^{\mathrm{el}}_a,\, U\, \Psi^{\mathrm{el}}_a) = (U\, \Psi^{\mathrm{el}}_a,\, B^{-1}\, U\, \Psi^{\mathrm{el}}_a)^* = (\Psi^{\mathrm{el}}_a,\, U^+ B^{-1}\, U\, \Psi^{\mathrm{el}}_a)^*.$$

Betrachtet man den Imaginärteil von beiden Seiten der Gl. (13.3.18) und benutzt die Beziehung

$$\lim_{\eta \to 0} \frac{\eta}{(\varepsilon_a - K_r)^2 + \eta^2} = \pi\, \delta(\varepsilon_a - K_r),$$

so erhält man

$$\Im\mathrm{m}\, T^{\mathrm{el}}_{aa} = \Im\mathrm{m}(\Psi^{\mathrm{el}}_a,\, U\, \Psi^{\mathrm{el}}_a) - \pi(\Psi^{\mathrm{el}}_a,\, U^+\, \delta(\varepsilon_a - K_r)\, U\, \Psi^{\mathrm{el}}_a)^*. \tag{13.3.19}$$

Setzt man noch $\Psi^{\mathrm{el}}_a = \varphi_0\, \Psi^{\mathrm{el}}_{k\nu}$ und beachtet, daß der Operator U nicht auf die inneren Koordinaten des Kerns wirkt, so folgt

$$(\Psi^{\mathrm{el}}_a,\, U\, \Psi^{\mathrm{el}}_a) = (\Psi^{\mathrm{el}}_{k\nu},\, U\, \Psi^{\mathrm{el}}_{k\nu}).$$

Da außerdem $\Psi_a^{el} = \langle\Omega\rangle\,\Phi_a$ und $T_{el} = U\,\langle\Omega\rangle$ sind, kann man schreiben

$$(\Psi_a^{el},\, U^+\,\delta(\varepsilon_a - K_r)\,U\,\Psi_a^{el})^* = (\langle\Omega\rangle\,\Phi_a,\, U^+\,\delta(\varepsilon_a - K_r)\,U\,\langle\Omega\rangle\,\Phi_a)^* =$$
$$= (\Phi_a, (T_{el})^+\,\delta(\varepsilon_a - K_r)\,T_{el}\,\Phi_a)^* = \sum_b |T_{ba}^{el}|^2\,\delta(\varepsilon_a - \varepsilon_b).$$

Damit folgt aus (13.3.19)

$$-\frac{2}{\hbar}\,\mathfrak{Im}\,T_{aa}^{el} = W_{in} + \sum_b W_{ba};$$

dabei bedeuten $W_{ba} = \frac{2\pi}{\hbar}\,|T_{ba}^{el}|^2\,\delta(\varepsilon_a - \varepsilon_b)$ die Wahrscheinlichkeit für elastische Streuung aus dem Zustand a in den Zustand b, $\sum\limits_b W_{ba}$ die Wahrscheinlichkeit aller elastischen Prozesse und

$$W_{in} = -\frac{2}{\hbar}\,\mathfrak{Im}(\Psi_{k\nu},\, U\,\Psi_{k\nu}) = \varkappa\,\frac{\hbar\,n\,k}{\mu} \tag{13.3.20}$$

die Wahrscheinlichkeit aller unelastischen Prozesse.

Die Einführung der komplexen potentiellen Energie $U = \gamma\,\sum\limits_\alpha \langle t_\alpha\rangle$ gestattet somit, die Streuung von Neutronen durch Kerne als Durchgang von Neutronen durch ein homogenes Medium zu betrachten und den Prozeß der formelastischen Streuung von Streuungen und von Reaktionen, die über einen Compoundkern verlaufen, zu unterscheiden. Die potentielle Energie U erweist sich im allgemeinen als Funktion der Koordinaten, die den Ort des Nukleons im Kern und die entsprechenden Spinzustände beschreiben. Der Charakter dieser Abhängigkeit wird durch den Operator für die effektive Streuung eines Nukleonenpaars t_α und die Kernstruktur im Grundzustand (über die Mittelung $\langle\;\rangle$) festgelegt. U hängt weiter auch von der Energie der Relativbewegung des Systems Nukleon–Kern ab. Dementsprechend werden Absorptionskoeffizient und Brechungsindex Funktionen der Relativenergie (Wellenlänge) des Systems Neutron–Kern sein. Die Kernmaterie besitzt also Dispersionscharakter.

Die Abhängigkeit des Realteils des Potentials U von der Energie (< 30 MeV) der Relativbewegung im Gebiet isolierter Resonanzen wurde von AGRANOWITSCH und DAWYDOW [13,8] untersucht. Dabei ergab sich, daß der Realteil des Wechselwirkungspotentials U, gemittelt über die Zustände $\chi_{k\nu}$, in folgender Form dargestellt werden kann:

$$\mathfrak{Re}(\chi_{k\nu},\, U\,\chi_{k\nu}) = \mathfrak{Re}\sum_\alpha \Bigg\{(\Phi_{0\varepsilon},\, V_\alpha\,\Phi_{0\varepsilon}) + \sum_\lambda \frac{|R_\lambda^\alpha(\varepsilon)|^2}{E - E_\lambda + Q_{\lambda\lambda}^\alpha + i\,\eta} + \tag{13.3.21}$$
$$+ \sum_{\lambda,\,\mu} \frac{R_\lambda^\alpha(\varepsilon)}{E - E_\lambda + Q_{\lambda\lambda}^\alpha + i\,\eta}\,Q_{\lambda\mu}^\alpha\,\frac{R_\mu^\alpha(\varepsilon)}{E - E_\mu + Q_{\mu\mu}^\alpha + i\,\eta} + \cdots\Bigg\}$$

mit $\Phi_{0\varepsilon} = \varphi_0\,\chi_{k\nu}$, E_λ als Energieniveaus des Compoundkerns und

$$R_\lambda^\alpha(\varepsilon) \equiv (X_\lambda,\, V_\alpha\,\Phi_{0\varepsilon});$$

die X_λ sind die Wellenfunktionen des Compoundkerns für die Energie E_λ:

$$Q^{\alpha}_{\lambda\mu} = (X_\lambda, \sum_{\beta \neq \alpha} V_\beta X_\mu).$$

$Q_{\lambda\lambda}$ bedeutet also die mittlere Wechselwirkungsenergie eines Nukleons mit $A - 1$ Nukleonen des Compoundkerns, wenn dieser sich im Zustand befindet, der durch die Funktion X_λ beschrieben wird. Folglich gilt $Q_{\lambda\lambda} < 0$, und der Absolutwert beträgt einige 10 MeV.

Aus (13.3.11) folgt, daß sich der Realteil der potentiellen Energie bei Relativenergien $\varepsilon < 30$ MeV stetig mit der Energie ändert. Für Energien $\varepsilon > 30$ MeV wird der Anteil des Imaginärteils im optischen Potential, wie wir später sehen werden, so wesentlich, daß das optische Modell seinen Sinn verliert. Bei weiterer Vergrößerung der Energie (100 MeV und mehr) kann man wieder die Vorstellung des optischen Potentials einführen (s. Abschn. 15.2.).

Die oben betrachtete Zurückführung des Vielkörperproblems auf ein einfaches Zweikörperproblem ist in starkem Maße formal, da die Berechnung des effektiven Potentials U eine Lösung des Gleichungssystems (13.2.2) bzw. des angenäherten Systems (13.3.1) und (13.3.2) erfordert, die nur bei wesentlicher Vereinfachung der Aufgabe durchgeführt werden kann. Deshalb ist das komplexe Potential U als Parameter anzusehen, der aus den experimentellen Angaben über die Streuung von Nukleonen an Kernen bestimmt werden muß. Wir erinnern daran, daß auch in der Optik der Absorptionskoeffizient und Brechungsindex des Lichtes an komplizierten Körpern, z. B. an Glas, nicht berechnet werden kann, sondern aus dem Experiment bestimmt werden muß.

Feshbach, Porter und Weisskopf [13,3] zeigten, daß die hauptsächlichen Eigenschaften der Wirkungsquerschnitte für Neutronen in Gebieten bis zu 3 MeV, gemittelt über alle Resonanzen, aus dem optischen Modell der Kernwechselwirkungen erhalten werden können. Dazu ist das komplexe Potential in Form eines rechteckigen Potentialtopfes

$$U = \begin{cases} -U_0(1 + i\zeta) & \text{für} \quad r \leqq R, \\ 0 & \text{für} \quad r > R \end{cases} \tag{13.3.22}$$

mit den Parametern

$$U_0 = 42 \text{ MeV}, \qquad \zeta = 0{,}03, \qquad R = 1{,}45\, A^{1/3}\, [10^{-13} \text{ cm}]$$

zu wählen. Dieses Potential gibt die im Experiment beobachtete Verkleinerung der Wirkungsquerschnitte im Gebiet $A \approx 40$, $100 < A < 40$ sowie die großen Wirkungsquerschnitte im Gebiet der s-Resonanz für $A \approx 60$ und $A \approx 150$ und im Gebiet der p-Resonanz für $A \approx 90$ recht gut wieder. Die Theorie beschreibt auch einige andere detaillierte Abhängigkeiten der Wirkungsquerschnitte von Energie und Massenzahl. Die Autoren stellten gute Übereinstimmung mit dem Experiment sogar für $A < 20$ fest.

Eine mit der potentiellen Energie (13.3.22) durchgeführte Berechnung der Winkelverteilung der elastisch gestreuten Neutronen gibt die experimentellen Werte von Walt und Barschall [13,9] über die Streuung von 1-MeV-

Neutronen sowie die Werte von CHASE und ROHRLICH [13,10] über die Winkelverteilung von elastisch gestreuten Protonen der Energie $\approx$ 20 MeV grob wieder. Ersetzt man den rechteckigen Potentialtopf durch ein an der Kernoberfläche langsamer abfallendes Potential (Abfall auf einer Strecke von $0{,}5 \cdot 10^{-13}$ cm), so erhält man bessere Übereinstimmung mit dem Experiment.

Der Einfluß eines diffusen Kernrandes auf die Berechnung der Wirkungsquerschnitte für elastische und unelastische Streuung von Nukleonen an Kernen mit dem optischen Modell wurde von NEMIROWSKI und einer Reihe anderer Autoren [13,11] untersucht. In der Arbeit [13,12] wird bemerkt, daß eine gute Übereinstimmung mit den experimentellen Werten über die Streuung von Protonen an Kernen zwischen Fe und Pb bei Wahl der potentiellen Energie für die reine Kernwechselwirkung in der von SAXON und WOOD [13,13] vorgeschlagenen Form erreicht werden kann:

$$U(r) = -\frac{U_0(1+i\zeta)}{1+\exp\left(\frac{r-R_0}{a}\right)}\,. \tag{13.3.23}$$

Die Reichweite dieses Potentials beträgt $R_0 = 1{,}33\,A^{1/3}\,[10^{-13}\,\mathrm{cm}]$, der Parameter für den diffusen Rand beträgt $a = 0{,}5 \cdot 10^{-13}$ cm. Beide Größen ändern sich für alle Kerne mit Ausnahme der leichten nur wenig mit der Energie. Die Parameter U_0 und $\zeta\, U_0$ hängen stark von der Energie ab. Ihre Werte für 3 Protonenenergien sind in der Tab. 32 angegeben, die wir der Arbeit [13,12] entnommen haben.

Alle Größen in der Tab. 32 sind in MeV ausgedrückt.

Tabelle 32

Imaginärteil und Realteil des „optischen Potentials“

Protonenenergie	U_0	$\zeta\, U_0$
5,25	52,5	0,9
17	47 ± 1	$8{,}5 \pm 0{,}5$
31,5	36 ± 1	$15{,}5 \pm 0{,}5$

Man muß natürlich berücksichtigen, daß ein Vergleich der Theorie mit dem Experiment wegen des Einflusses von inkohärenter elastischer Streuung und der nichtsphärischen Form des Kerns recht kompliziert wird.

Bei Untersuchungen der Polarisation von Nukleonen muß man außer dem Imaginärteil für die Nukleonenabsorption auch noch die potentielle Energie der Spin-Bahn-Wechselwirkung einführen. In diesem Fall kann die potentielle Wechselwirkungsenergie in der Form

$$U = U_1(r)\,(1 + i\,\zeta) + U_2(r)\,\mathfrak{l}\,\mathfrak{s}$$

geschrieben werden.

Im (13.3.23) wurde angenommen, daß Realteil und Imaginärteil des komplexen Potentials auf die gleiche Weise vom Radius abhängen. Ausgehend von der Annahme, daß infolge des PAULI-Prinzips Nukleonen kleiner Energien

im wesentlichen nur mit der Kernoberfläche in Wechselwirkung treten, setzte man in einigen Arbeiten voraus, daß der Imaginärteil des Potentials nur an der Kernoberfläche von Null verschieden ist. So wählten z. B. BJORKLUND, FERNBACH und SHERMAN [13,14] die Radialabhängigkeit des optischen Potentials in der Form

$$\Re\mathrm{e}\, U = \frac{U_0}{1 + \exp\left(\frac{r - R_0}{a}\right)}, \qquad \Im\mathrm{m}\, U = W_0 \exp\left\{-\left(\frac{r - R_0}{b}\right)^2\right\}$$

mit folgenden Werten für die Parameter:

$U_0 = -40{,}3\,\mathrm{MeV}$, $R_0 = (1{,}2\, A^{1/3} + 0{,}64)\,[10^{-13}\,\mathrm{cm}]$, $a = 0{,}6 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{cm}$,
$W_0 = -8\,\mathrm{MeV}$, $b = 0{,}978 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{cm}$.

Wie wir bereits oben erwähnten, kann man mit dem optischen Modell der Kernwechselwirkungen die Wirkungsquerschnitte für elastische und totale Streuung von Nukleonen an Kernen, die Größe und Winkelabhängigkeit der elastischen Streuung von Nukleonen an Kernen, die Polarisation der an Kernen gestreuten Nukleonen und vieles andere erklären. Auf der Grundlage des optischen Modells der Kernwechselwirkungen konnte man z. B. vorhersagen, daß der Mittelwert der Neutronenbreite, dividiert durch den mittleren Abstand zwischen den Niveaus (die sogenannte „Stärkefunktion", vgl. Abschn. 8.11.), als Funktion des Kernradius bei kleinen Energien sein Maximum für den Wert $R = (n + 1/2)\,\lambda$ annimmt, wobei n eine ganze Zahl ist und λ die Wellenlänge in der Kernmaterie bedeutet.

Man kann jedoch mit Hilfe des optischen Modells der Kernwechselwirkungen nur Aussagen darüber erhalten, was bei einer Kernreaktion im Eingangskanal vor sich geht. Man kann also nur die formelastische Streuung beschreiben und die Gesamtrolle aller Prozesse aufzeigen, die zur unelastischen Streuung und zu Kernumwandlungen führen. Man kann nicht die Rolle und den detaillierten Verlauf von Prozessen in Kanälen beschreiben, die sich vom Eingangskanal unterscheiden.

13.4. Berechnung des Realteils des komplexen Potentials durch Lösung eines „self-consistent field"-Problems

In den vorangehenden Abschnitten dieses Kapitels haben wir die Identität des gestreuten Nukleons mit den anderen Kernnukleonen nicht berücksichtigt, d. h. das PAULI-Prinzip außer acht gelassen. Um bei der Berechnung der komplexen Potentialenergie, die die Wechselwirkung zwischen Nukleon und Kernmaterie bestimmt, die Schwierigkeit der Berücksichtigung des PAULI-Prinzips zu umgehen, kann man das auf das Nukleon wirkende Potential bestimmen, wenn sich das Nukleon mit derselben Energie im stationären Zustand in der Kernmaterie befindet. Dazu muß man künstliche Randbedingungen an der Kernoberfläche einführen. Man kann z. B. fordern, daß die Wellenfunktion, die die Relativbewegung dieses Nukleons und des Kerns beschreibt, an der Kernoberfläche verschwindet. Diese Vereinfachung

der Aufgabe gestattet, alle Nukleonen des Systems als gleich anzusehen, so daß man ihre Identität leicht berücksichtigen kann. Außerdem kann man auf diese Weise ein auf alle Nukleonen des Kerns wirkendes Potential bestimmen, wenn sich der Kern in einem stationären Zustand befindet. Natürlich kann man bei der Betrachtung eines stationären Zustandes nur den Realteil des mittleren Wechselwirkungspotentials für die Wechselwirkung des gegebenen Nukleons mit allen übrigen Kernnukleonen bestimmen.

Beim Übergang zu den neuen Randbedingungen muß die Lösung der Gl. (13.1.16) in Form stehender Wellen gesucht werden (vgl. Abschn. 9.2.). Man setzt also an

$$t_{ij} = V_{ij} + V_{ij}\, \mathsf{P}(E_a - H_0)^{-1}\, t_{ij}. \tag{13.4.1}$$

Das Zeichen P vor dem Operator $(E_a - H_0)^{-1}$ bedeutet, daß der Hauptwert des entsprechenden Integrals zu nehmen ist. Durch die Indizes i und j sind die miteinander wechselwirkenden Nukleonen bezeichnet.

Das auf das i-te Nukleon wirkende Potential ergibt sich nach (13.3.4) aus der Gleichung (bei $\gamma \approx 1$)

$$U_i = \sum_j{}' \langle t_{ij} \rangle, \tag{13.4.2}$$

wobei der Strich am Summenzeichen bedeutet, daß über j mit $j \neq i$ zu summieren ist. Die Mittelung $\langle t_{ij} \rangle$ in (13.4.2) wird über die Zustände aller Nukleonen $j \neq i$ durchgeführt, die sich auf den Grundzustand des Gesamtkerns beziehen. Würden wir unendlich ausgedehnte Kernmaterie betrachten, so würde aus der Bedingung der Translationssymmetrie folgen, daß die Einzelteilchenzustände im Kern durch ebene Wellen dargestellt werden können. Wir nehmen an, daß für mittelschwere und schwere Kerne zur Beschreibung der Einzelteilchenzustände Wellenfunktionen der Form

$$\alpha_{q_i}(x_i) = s_i \frac{\exp(i\, \mathfrak{q}_i \mathfrak{r}_i)}{(2\pi)^{3/2}} \tag{13.4.3}$$

verwendet werden können. Hierbei bedeutet s_i die Wellenfunktion, die die Spin- und Ladungsspinzustände des Nukleons festlegt; $\mathfrak{q}_i$ ist der Wellenvektor des Nukleons in der Kernmaterie.

Berücksichtigt man, daß der in (13.4.2) eingehende Operator t_{ij} nur von der Differenz der Koordinaten $\mathfrak{r}_i - \mathfrak{r}_j$ abhängt (der Einfachheit halber nehmen wir an, daß nur gewöhnliche Wechselwirkungskräfte zwischen den Nukleonen vorhanden sind), so läßt sich unter Benutzung von (13.4.3) zur Beschreibung der Einzelteilchenzustände im Kern in (13.4.2) über den Grundzustand des Gesamtkerns (einschließlich des Zustandes des i-ten Nukleons) mitteln.

Wir stellen die Wellenfunktion für den Grundzustand des Kerns in Form antisymmetrisierter Produkte der Einzelteilchenwellenfunktionen im Kern dar:

$$\Phi_0 = (A!)^{-1/2} \sum_\nu (-1)^\nu P_\nu \prod_{i=1}^{A} \alpha_{q_i}(x_i), \tag{13.4.4}$$

wobei P_ν eine der $A!$ möglichen Nukleonenpermutationen bedeutet. Die Permutationen sind willkürlich numeriert, jedoch so, daß jede nachfolgende aus der

vorhergehenden durch Vertauschung eines Nukleonenpaares erhalten werden kann. Summiert wird über alle möglichen Nukleonenpermutationen.

Als nächsten vereinfachenden Schritt ersetzen wir den Operator $\hat{E}_a - H_0$, der in die Operatorgleichung (13.4.1) eingeht, durch den Operator

$$E_0' - H_M \tag{13.4.5}$$

mit

$$H_M = \sum_{i=1}^{A} (\hat{K}_i + U_i) \tag{13.4.5a}$$

als HAMILTON-Operator in der Einzelteilchennäherung. Hierbei wird die potentielle Wechselwirkungsenergie U_i eines Nukleons mit den übrigen Nukleonen in der Näherung des optischen Modells für Kernwechselwirkungen, d. h. nach Gl. (13.4.2), dargestellt. E_0' ist die Energie des Grundzustandes in der gleichen Näherung. Damit geht die Operatorgleichung (13.4.1) in folgende Gleichung über:

$$t_{ji} = V_{ij} + V_{ij}\,\mathsf{P}(E_0' - H_M)^{-1}\, t_{ij}. \tag{13.4.6}$$

Für das Matrixelement eines Operators d_{ij}, der von den Koordinaten zweier Nukleonen abhängt, schreiben wir

$$(\mathfrak{q}_i'\,\mathfrak{q}_j'\,|d_{ij}|\,\mathfrak{q}_i\,\mathfrak{q}_j)_D, \tag{13.4.7}$$

wenn es mit Wellenfunktionen vom Typ (13.4.4) gebildet wird, die den Anfangs- und Endzustand der Nukleonen i und j mit den Impulsen[1]) $\mathfrak{q}_i$, $\mathfrak{q}_j$ und $\mathfrak{q}_i'$, $\mathfrak{q}_j'$ beschreiben.

Das Matrixelement (13.4.7) verschwindet, wenn wenigstens einer der 4 Zustände $\mathfrak{q}_i$, $\mathfrak{q}_j$, $\mathfrak{q}_i'$, $\mathfrak{q}_j'$ mit einem Zustand $\mathfrak{q}_l$ zusammenfällt, der durch andere Nukleonen im Kernzustand Φ_0 besetzt ist, oder wenn die Zustände $\mathfrak{q}_i$ und $\mathfrak{q}_j$ oder $\mathfrak{q}_i'$ und $\mathfrak{q}_j'$ zusammenfallen. In allen übrigen Fällen gilt

$$(\mathfrak{q}_i'\,\mathfrak{q}_j'\,|d_{ij}|\,\mathfrak{q}_i\,\mathfrak{q}_j)_D = (\mathfrak{q}_i'\,\mathfrak{q}_j'\,|d_{ij}|\,\mathfrak{q}_i\,\mathfrak{q}_j) - (\mathfrak{q}_j'\,\mathfrak{q}_i'\,|d_{ij}|\,\mathfrak{q}_i\,\mathfrak{q}_j). \tag{13.4.8}$$

Dabei sind die Matrixelemente ohne Index D zwischen den Wellenfunktionen der Nukleonen i und j zu nehmen:

$$(\mathfrak{q}_j'\,\mathfrak{q}_i'\,|d_{ij}|\,\mathfrak{q}_i\,\mathfrak{q}_j) \equiv \int \alpha^*_{\mathfrak{q}_i'}(x_i)\,\alpha_{\mathfrak{q}_j'}(x_j)\,d_{ij}\,\alpha_{\mathfrak{q}_i}(x_i)\,\alpha_{\mathfrak{q}_j}(x_j)\,dx_i\,dx_j.$$

In der letzten Gleichung ist außer der Integration über die räumlichen Variablen noch über alle Spin- und Ladungsspinvariablen zu summieren. Das zweite Matrixelement in (13.4.8) entspricht dem Austauschglied

$$(\mathfrak{q}_i'\,\mathfrak{q}_j'\,|d_{ij}|\,\mathfrak{q}_i\,\mathfrak{q}_j) \equiv \int \alpha^*_{\mathfrak{q}_j'}(x_i)\,\alpha^*_{\mathfrak{q}_i'}(x_j)\,d_{ij}\,\alpha_{\mathfrak{q}_i}(x_i)\,\alpha_{\mathfrak{q}_j}(x_j)\,dx_i\,dx_j.$$

Damit kann man aus der Operatorengleichung (13.4.6) leicht Gleichungen für die Matrizen der Operatoren t_{ij} und V_{ij} erhalten:

$$(\mathfrak{q}_i'\mathfrak{q}_j'\,|t_{ij}|\,\mathfrak{q}_i\mathfrak{q}_j)_D = (\mathfrak{q}_i'\mathfrak{q}_j'\,|\,V_{ij}|\,\mathfrak{q}_i\mathfrak{q}_j)_D - \\ - \mathsf{P}\int \frac{(\mathfrak{q}_i'\mathfrak{q}_j'\,|\,V_{ij}|\,\mathfrak{q}_i''\,\mathfrak{q}_j'')_D\,(\mathfrak{q}_i''\,\mathfrak{q}_j''\,|t_{ij}|\,\mathfrak{q}_i\,\mathfrak{q}_j)_D}{E'(\mathfrak{q}_i'') + E'(\mathfrak{q}_j'') - E'(\mathfrak{q}_i) - E'(\mathfrak{q}_j)}\,d\mathfrak{q}_i''\,d\mathfrak{q}_j''. \tag{13.4.9}$$

[1]) In diesem Abschnitt benutzen wir das Maßsystem mit $\hbar = 1$.

Das Integralzeichen bedeutet hier ebenfalls Integration über die räumlichen Variablen und Summierung über die Spin- und Ladungsspinveränderlichen. $E'(\mathfrak{q})$ ist die Nukleonenenergie in der Näherung des optischen Modells, wenn der Nukleonenzustand dem Wellenvektor $\mathfrak{q}$ entspricht.

Man zeigt leicht, daß die Matrixelemente vom Typ (13.4.8) für die Operatoren V_{ij} und t_{ij} die Funktionen $\delta(\mathfrak{q}_i + \mathfrak{q}_j - \mathfrak{q}'_i - \mathfrak{q}'_j)$ enthalten. Diese Funktionen drücken den Impulserhaltungssatz beim Stoß zweier Nukleonen aus. Man kann daher schreiben

$$\left.\begin{aligned} (\mathfrak{q}'_i\,\mathfrak{q}'_j\,|\,t_{ij}\,|\,\mathfrak{q}_i\,\mathfrak{q}_j)_D &= (\mathfrak{q}'_i\,\mathfrak{q}'_j\,|\,\tilde{t}_{ij}\,|\,\mathfrak{q}_i\,\mathfrak{q}_j)_D\,\delta(\mathfrak{q}_i + \mathfrak{q}_j - \mathfrak{q}'_i - \mathfrak{q}'_j),\\ (\mathfrak{q}'_i\,\mathfrak{q}'_j\,|V_{ij}|\,\mathfrak{q}_i\,\mathfrak{q}_j)_D &= (\mathfrak{q}'_i\,\mathfrak{q}'_j\,|\tilde{V}_{ij}|\,\mathfrak{q}_i\,\mathfrak{q}_j)_D\,\delta(\mathfrak{q}_i + \mathfrak{q}_j - \mathfrak{q}'_i - \mathfrak{q}'_j).\end{aligned}\right\} \qquad (13.4.10)$$

Unter Benutzung von (13.4.10) läßt sich die Gl. (13.4.9) auf die Form

$$(\mathfrak{q}'_i\,\mathfrak{q}'_j\,|\hat{t}_{ij}|\,\mathfrak{q}_i\mathfrak{q}_j)_D = (\mathfrak{q}'_i\,\mathfrak{q}'_j\,|\tilde{V}_{ij}|\,\mathfrak{q}_i\,\mathfrak{q}_j)_D - \\ - \mathsf{P}\int \frac{(\mathfrak{q}'_i\,\mathfrak{q}'_j\,|\tilde{V}_{ij}|\,\mathfrak{q}''_i\,\mathfrak{q}''_j)_D\,(\mathfrak{q}''_i\,\mathfrak{q}''_j\,|t_{ij}|\,\mathfrak{q}_i\,\mathfrak{q}_j)_D}{E'(\mathfrak{q}''_i) + E'(\mathfrak{q}_i + \mathfrak{q}_j - \mathfrak{q}''_i) - E'(\mathfrak{q}_i) - E'(\mathfrak{q}_j)}\,d\mathfrak{q}''_i \qquad (13.4.11)$$

bringen. Hierbei bestimmen sich die Werte $\mathfrak{q}'_j$ und $\mathfrak{q}''_j$ aus den Werten $\mathfrak{q}_i$, $\mathfrak{q}_j$, $\mathfrak{q}'_i$, $\mathfrak{q}''_i$ durch die Impulserhaltungssätze:

$$\mathfrak{q}'_j = \mathfrak{q}_i + \mathfrak{q}_j - \mathfrak{q}'_i,$$
$$\mathfrak{q}''_j = \mathfrak{q}_i + \mathfrak{q}_j - \mathfrak{q}''_i.$$

Aus den Eigenschaften der Matrixelemente vom Typ (13.4.7) folgt, daß sich die Wellenvektoren $\mathfrak{q}''_i$ und $\mathfrak{q}''_j$ in (13.4.11) von den Wellenvektoren $\mathfrak{q}_l$ unterscheiden müssen, wenn diese Zustände anderer Nukleonen charakterisieren. Berücksichtigt man weiterhin, daß das Integral (13.4.11) im Sinne seines Hauptwertes zu nehmen ist, d. h., daß bei seiner Berechnung der Fall ausgeschlossen wird, daß $\mathfrak{q}''_i$ und $\mathfrak{q}''_j$ gleich den Anfangswerten $\mathfrak{q}_i$ und $\mathfrak{q}_j$ sind, so muß dieses Integral über alle Zustände erstreckt werden, für die $\mathfrak{q}''_i$ und $\mathfrak{q}''_j = \mathfrak{q}_i + \mathfrak{q}_j - \mathfrak{q}''_i$ dem Betrage nach größer als q_F sind, wobei q_F der Radius der FERMI-Kugel ist, der sich aus der Bedingung

$$4\int_0^{q_F} d\mathfrak{q} = 4\,\frac{4\pi}{3}\,q_F^3 = \frac{A}{\Omega} \qquad (13.4.12)$$

ergibt (Ω = Kernvolumen). Der Faktor 4 vor dem Integral berücksichtigt, daß einem bestimmten $\mathfrak{q}$ vier Zustände mit unterschiedlicher Ladung und Spinprojektion zugeordnet sind. Setzt man in (13.4.12)

$$\Omega = \frac{4\pi}{3}\,r_0^3 A, \qquad r_0 = 1,2 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{cm}$$

ein, so erhält man

$$q_F \doteq \frac{1}{4}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} \frac{1}{r_0} \approx 2{,}2 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{cm}^{-1}. \qquad (13.4.13)$$

Der Ausdruck für die Nukleonenenergie, der in (13.4.11) eingeht, lautet

$$E'(\mathfrak{q}) = \frac{\mathfrak{q}^2}{2M} + U(\mathfrak{q}), \qquad (13.4.14)$$

wobei nach (13.4.2) und nach der Definition der Matrixelemente (13.4.10)

$$U(\mathfrak{q}) = \sum_j (\mathfrak{q}_i\,\mathfrak{q}_j\,|\tilde{t}_{ij}|\,\mathfrak{q}_i\,\mathfrak{q}_j) = 3\int\limits_0^{q_F} (\mathfrak{q}_i\,\mathfrak{q}_j\,|\tilde{t}_{ij}|\,\mathfrak{q}_i\,\mathfrak{q}_j)\,d\mathfrak{q}_j \tag{13.4.15}$$

gilt. Die Gln. (13.4.11), (13.4.14) und (13.4.15) bilden ein System von verknüpften „self-consistent field"-Gleichungen. Könnte man dieses System lösen, so hätte man das Potential $U(\mathfrak{q})$, d. h. die Energie der Wechselwirkung zwischen dem Nukleon mit dem Impuls $\mathfrak{q}$ und den übrigen Kernnukleonen im Grundzustand des Kerns, bestimmt.

Das Potential des optischen Modells $U(\mathfrak{q})$ hängt vom maximalen Impuls der Nukleonen im Kern und demzufolge von der Dichte der Kernmaterie ab [s. Gl. (13.4.13)], da die obere Integrationsgrenze in (13.4.15) und die untere Integrationsgrenze in (13.4.11) gleich q_F sind und die Matrix $(\ldots|\tilde{t}_{ij}|\ldots)$ ebenfalls von q_F abhängt.

Mit Hilfe von (13.4.14) kann man leicht die Energie W je Nukleon im Kern bestimmen:

$$W = \left[\int\limits_0^{q_F} d\mathfrak{q}\right]^{-1} \int\limits_0^{q_F} \left\{\frac{1}{2}\,U(\mathfrak{q}) + \frac{\mathfrak{q}^2}{2M}\right\} d\mathfrak{q}. \tag{13.4.16}$$

Der Faktor $1/2$ vor dem Potential $U(\mathfrak{q})$ wurde eingeführt, damit die Nukleonenwechselwirkung nicht zweimal berücksichtigt wird. Wegen

$$\int\limits_0^{q_F} d\mathfrak{q} = \frac{4\pi}{3}\,q_F^3 = \frac{A_1}{4} \tag{13.4.17}$$

mit A_1 als Zahl der Nukleonen in der Volumeneinheit der Kernmaterie folgt

$$W = \frac{3}{4\pi}\,q_F^{-3} \int\limits_0^{q_F} \left\{\frac{1}{2}\,U(\mathfrak{q}) + \frac{\mathfrak{q}^2}{2M}\right\} d\mathfrak{q}. \tag{13.4.18}$$

Aus der Extremalbedingung für (13.4.18) bezüglich q_F $(\partial W/\partial q_F = 0)$ kann man q_F bestimmen. Damit läßt sich dann auch die Anzahl der Nukleonen in der Volumeneinheit des Kerns finden, die der minimalen Energie je Kernnukleon entspricht. Die Lösung wird unter einigen vereinfachenden Annahmen in den Arbeiten [13,7], [13,15] und [13,16] angegeben.

Wir nehmen an, daß das Potential des optischen Modells durch die Funktion

$$U(\mathfrak{q}) = U_0 + b\,\mathfrak{q}^2 \tag{13.4.19}$$

approximiert werden kann. Dann läßt sich die Energie eines Nukleons im Kern darstellen durch

$$E'(\mathfrak{q}) = U_0 + \frac{\mathfrak{q}^2}{2M^*} \tag{13.4.20}$$

mit

$$M^* = \frac{M}{1 + 2bM} \tag{13.4.21}$$

als *effektive* ***Masse*** des Nukleons in der Kernmaterie.

Die Einführung einer effektiven Nukleonenmasse ist dann zweckmäßig, wenn man die Vorstellung über eine freie Bewegung des Nukleons in der Kernmaterie aufrechterhalten will. Ähnlich wie die langsame Bewegung eines Elektrons im periodischen Feld eines Kristallgitters durch die Bewegung eines freien Elektrons mit einer gewissen effektiven Masse ersetzt werden kann, kann auch im Kern die Abhängigkeit des Potentials von der kinetischen Energie des Nukleons durch Einführung einer effektiven Masse berücksichtigt werden. Diese Masse wird selbstverständlich nur für kleine Energien konstant sein, wenn das Potential $U(\mathfrak{q})$ vom Quadrat der Wellenzahl abhängt. Bei großen Energien gilt $U(\mathfrak{q}) = U_0 + b(q)\,\mathfrak{q}^2$, und die effektive Masse

$$M^* = \frac{M}{1 + 2b(q)\,M}$$

wird eine Funktion der Energie.

Setzt man die Energie der Relativbewegung von Nukleon und Kern (ε) gleich der Energie des Nukleons im Kern:

$$\varepsilon = \frac{\mathfrak{q}^2}{2M^*} + U_0,$$

so läßt sich der Wellenvektor des Nukleons $\mathfrak{q}$ im Kern durch die Energie der Relativbewegung ausdrücken:

$$\mathfrak{q}^2 = 2M^*(\varepsilon - U_0).$$

Setzt man dies in (13.4.19) ein und benutzt (13.4.21), so kann man die Abhängigkeit des Realteils des optischen Potentials von der Energie der Relativbewegung bestimmen:

$$U(\varepsilon) = U_0 \frac{M^*}{M} + \left(1 - \frac{M^*}{M}\right)\varepsilon. \qquad (13.4.22)$$

Da $M^* < M$ und $U_0 < 0$ ist, wird der Absolutbetrag von $U(\varepsilon)$ mit wachsendem ε kleiner.

Kennt man diese Abhängigkeit, dann läßt sich die effektive Nukleonenmasse bestimmen. Benutzt man die experimentellen Angaben aus der Tab. 32 im Abschn. 13.2., so ergibt sich

$$M^* \approx (0{,}6 \cdots 0{,}8)\,M,$$

$$U_0 \approx (70 \cdots 100)\,\text{MeV}.$$

In diesem Abschnitt haben wir das effektive Potential berechnet, das auf ein Nukleon in der Kernmaterie wirkt, wenn der Kernrand nicht berücksichtigt wird. Für einen realen Kern mit endlichem Volumen wird diese Berechnung wesentlich komplizierter, da die Wellenfunktionen für die Einzelteilchenzustände keine ebenen Wellen sind, sondern selbst von dem gesuchten Potential abhängen. Infolgedessen wird die Aufgabe, ein „self-consistent field"-Potential für die Einzelteilchenzustände im Kern anzugeben, erheblich schwieriger (siehe z. B. die Arbeit von Bethe [13,15]).

13.5. Imaginärteil des effektiven Potentials

Um den Imaginärteil des effektiven Potentials im optischen Modell zu bestimmen, muß man von der im vorangehenden Abschnitt benutzten Idealisierung absehen, wonach die Einzelteilchenzustände mit positiver Energie als stationäre Zustände betrachtet wurden. Ein solcher Zustand besitzt jedoch in Wirklichkeit eine endliche Lebensdauer, da die Wahrscheinlichkeit für die Nukleonenemission aus dem System (elastische Streuung) verschieden von Null ist. Außerdem existiert eine bestimmte Wahrscheinlichkeit für die Energieübertragung auf andere Zustände des Compoundkerns (alle unelastischen Prozesse).

Um den Anteil des zweiten Effekts am Imaginärteil des Potentials $\zeta_1 U$ zu berechnen, muß die inkohärente Streuung berücksichtigt werden. Zur Berücksichtigung des Anteils $\zeta_2 U$ vom ersten Effekt genügt es, bei der Berechnung von t_α von der Integralgleichung mit der Randbedingung einer auslaufenden statt einer stehenden Welle auszugehen. Dann gilt

$$\zeta_2 U = \mathfrak{Im} \sum_{\alpha=1}^{A} \langle t_\alpha \rangle . \tag{13.5.1}$$

Das vollständige imaginäre Potential, das auf das äußere Nukleon wirkt, lautet damit

$$\zeta U = (\zeta_1 + \zeta_2) U . \tag{13.5.2}$$

Der Imaginärteil des Potentials $\zeta_1 U$ beschreibt im optischen Modell alle Prozesse, die über ein Compoundkernstadium verlaufen. Zur Berechnung von $\zeta_1 U$ genügt es, die Wahrscheinlichkeit je Zeiteinheit für den Übergang einer Einteilchenanregung $\Phi_{0\varepsilon}$ in eine Anregung des Compoundkerns zu bestimmen [13,8]. Bezeichnet man diese Wahrscheinlichkeit mit Γ, so drückt sich der Imaginärteil des Potentials ($\zeta_1 U$) durch Γ über die Beziehung

$$\hbar \Gamma = -2 \overline{\zeta_1 U} \tag{13.5.3}$$

aus. Dabei gilt

$$\overline{\zeta_1 U} = (\chi_\varepsilon, \zeta_1 U \chi_\varepsilon) \tag{13.5.4}$$

und

$$U = \mathfrak{Re} \sum_{\alpha} \langle t_\alpha \rangle . \tag{13.5.5}$$

Das System aus einem Kern A und einem Neutron wird nach dem optischen Modell durch den HAMILTON-Operator

$$H_0 = H_{\mathrm{A}} + \hat{K} + U \tag{13.5.6}$$

beschrieben. Dabei bedeuten H_{A} den HAMILTON-Operator für den Targetkern und $\hat{K}$ den Operator für die kinetische Energie der Relativbewegung von Kern und Neutron. U ist durch die Gl. (13.5.5) definiert.

Wir bezeichnen mit $E_{n\varepsilon}$ und $\Phi_{n\varepsilon}$ die Eigenwerte und Eigenfunktionen dieses Operators. Dabei gilt

$$E_{n\varepsilon} = E_n + \varepsilon , \quad \Phi_{n\varepsilon} = \varphi_n \chi_\varepsilon ,$$

$$H_{\mathrm{A}} \varphi_n = E_n \varphi_n , \quad [\hat{K} + U] \chi_\varepsilon = \varepsilon \chi_\varepsilon .$$

Mit Hilfe von (13.5.6) kann man den vollständigen HAMILTON-Operator des Systems in der Form

$$H = H_0 + H' \tag{13.5.7}$$

mit

$$H' = \sum_\alpha \{V_\alpha - \Re\mathrm{e}\,\langle t_\alpha\rangle\} \tag{13.5.8}$$

schreiben.

Der Operator (13.5.8) beschreibt den Unterschied des vollständigen HAMILTON-Operators gegenüber dem HAMILTON-Operator des optischen Modells und ist als Ursache für die Bildung eines Compoundkerns mit Verteilung der Anregungsenergie auf eine große Anzahl von Freiheitsgraden anzusehen.

Zur Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeit Γ setzen wir die Lösung der zeitabhängigen SCHRÖDINGER-Gleichung

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = (H_0 + H')\,\Psi \tag{13.5.9}$$

in der Form

$$\Psi = a(t)\,\Phi_{0\varepsilon}\,\mathrm{e}^{-iE'_{0\varepsilon}\frac{t}{\hbar}} + \sum_{n,\xi} b_{n\xi}(t)\,\Phi_{n\xi}\,\mathrm{e}^{-iE'_{n\xi}\frac{t}{\hbar}} \tag{13.5.10}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$a(0) = 1, \qquad b_{n\xi}(0) = 0 \tag{13.5.11}$$

an. Dabei ist

$$E'_{n\xi} = E_{n\xi} + (\Phi_{n\xi}, H'\,\Phi_{n\xi}). \tag{13.5.12}$$

Setzt man (13.5.10) in (13.5.9) ein, so erhält man (bei $t < \Gamma^{-1}$) das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} i\hbar\frac{da}{dt} &= \sum_{n,\xi}{}' b_{n\xi}(\Phi_{0\varepsilon}, H'\,\Phi_{n\xi})\exp\left\{\frac{i}{\hbar}(E'_{0\varepsilon} - E'_{n\xi})\,t\right\},\\ i\hbar\frac{db_{n\xi}}{dt} &= a(\Phi_{n\xi}, H'\,\Phi_{0\varepsilon})\exp\left\{\frac{i}{\hbar}(E'_{n\xi} - E'_{0\varepsilon})\,t\right\} + \dots, \end{aligned}\right\} \tag{13.5.13}$$

das man mit den Anfangsbedingungen (13.5.11) durch die Substitution

$$a(t) = \exp\left\{-\frac{\Gamma t}{2}\right\}$$

löst. Man erhält nach dem üblichen Verfahren

$$\left.\begin{aligned} b_{n\xi} &= (\Phi_{n\xi}, H'\,\Phi_{0\varepsilon})\frac{\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\left(E'_{0\varepsilon} - E'_{n\xi} - i\frac{\Gamma\hbar}{2}\right)t\right\} - 1}{E'_{0\varepsilon} - E'_{n\xi} - \frac{i\Gamma\hbar}{2}},\\ \Gamma &= \frac{2i}{\hbar}\sum_{n,\xi}{}' |(\Phi_{0\varepsilon}, H'\,\Phi_{n\xi})|^2\frac{1 - \exp\left\{i\left(E'_{0\varepsilon} - E'_{n\xi} - \frac{i\Gamma\hbar}{2}\right)t\right\}}{E'_{0\varepsilon} - E'_{n\xi} - \frac{i\Gamma\hbar}{2}}. \end{aligned}\right\} \tag{13.5.14}$$

Führt man die Anzahl der Zustände $\omega(E)\,dE$ im Energieintervall $(E, E + dE)$ ein, so kann man in (13.5.14) von der Summe zum Integral übergehen:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{2\pi}{\hbar}|(\Phi_{0\varepsilon}, H'\,\Phi_{n\xi})|^2\,\omega(E_{n_0\xi_0}),\\ E_{n_0\xi_0} &\approx E_{0\varepsilon}. \end{aligned} \tag{13.5.15}$$

Um die Energieabhängigkeit von Γ im Gebiet der Resonanzen des Compoundkerns zu bestimmen, entwickeln wir die Funktion $\Phi_{0\varepsilon}$ nach dem vollständigen Funktionensystem X_λ des Operators (13.5.7):

$$\Phi_{0\varepsilon} = \sum_\lambda A_{\lambda, 0\varepsilon} X_\lambda. \qquad (13.5.16)$$

Man zeigt leicht, daß die Entwicklungskoeffizienten durch die Relation

$$A_{\lambda, 0\varepsilon} = \frac{(\Phi_{0\varepsilon}, H' X_\lambda)}{E_\lambda - E_{0\varepsilon}} \qquad (13.5.17)$$

gegeben werden. Infolge der Normierung der Funktionen X_λ und $\Phi_{n\xi}$ gilt folgende Gleichung:

$$\sum_{n,\xi} A_{\lambda, n\xi} A^*_{\lambda', n\xi} = \delta_{\lambda\lambda'}, \qquad \sum_\lambda A_{\lambda, n\xi} A_{\lambda, n'\xi'} = \delta_{nn'} \delta_{\xi\xi'}. \qquad (13.5.18)$$

Setzt man (13.5.16) in (13.5.15) ein und berücksichtigt (13.5.17), so erhält man

$$\hbar\Gamma = 2\pi \left| \sum_\lambda \frac{(\Phi_{0\varepsilon}, H' X_\lambda)(X_\lambda, H' \Phi_{n_0\xi_0})}{E_\lambda - E_{0\varepsilon}} \right|^2 \omega(E_{n_0\xi_0}). \qquad (13.5.19)$$

Im Gebiet sich überdeckender Resonanzen kann man die Summe über λ durch das Integral

$$\hbar\Gamma = 2\pi \left| \int \frac{(\Phi_{0\varepsilon}, H' X_\lambda)(X_\lambda, H' \Phi_{n_0\xi_0})}{E_\lambda - E_{0\varepsilon}} \omega(E_\lambda)\, dE_\lambda \right|^2 \omega(E_{n_0\xi_0}) \qquad (13.5.20)$$

ersetzen. Fällt jedoch die Energie $E_{0\varepsilon}$ in das Gebiet isolierter Resonanzen des Compoundkerns (gilt z. B. $E_{0\varepsilon} \approx E_{\lambda 0}$), so ist in der Summe über λ nur ein Glied von Bedeutung, und es wird

$$\hbar\Gamma = 2\pi \left| \frac{(\Phi_{0\varepsilon}, H' X_\lambda)(X_\lambda, H' \Phi_{n_0\xi_0})}{E_\lambda - E_{0\varepsilon}} \right|^2 \omega(E_{n_0\xi_0}) + \Gamma_0, \qquad (13.5.21)$$

wobei Γ_0 der nur schwach von der Energie abhängende Teil von Γ ist.

Die Ausdrücke (13.5.20) und (13.5.21) ermöglichen qualitative Rückschlüsse über die Energieabhängigkeit von Γ bei $\varepsilon < 50$ MeV. Im Gebiet isolierter Resonanzen des Compoundkerns zeigt die Abhängigkeit der Größe Γ von der Energie Resonanzcharakter. Außerhalb der isolierten Resonanzen und im Gebiet der sich überdeckenden Niveaus wächst sie mit der Energie im wesentlichen auf Grund der Änderung der Zustandsdichte $\omega(E)$. Die experimentellen Werte $\hbar\Gamma$ für verschiedene Nukleonenenergien bestätigen die monotone Zunahme dieser Größe mit wachsender Energie. Während im Energieintervall von $0 \cdots 3$ MeV $\hbar\Gamma = 2\zeta U \approx 2{,}5$ MeV [13,3] ist, gilt für eine Energie von 20 MeV $\hbar\Gamma = 2\zeta U \approx 18$ MeV [13,13]. In der Arbeit [13,17] sind auf Grund privater Mitteilungen ζU-Werte für Energien im Zwischenbereich angegeben (s. auch Tab. 32 in Abschn. 13.3., S. 456).

Zur Berechnung von Γ nach den Gln. (13.5.19) und (13.5.21) muß man die Wellenfunktionen X_λ und $\Phi_{n\xi}$ sowie die Abhängigkeit der Zustandsdichte $\omega(E)$ von der Energie kennen. Mit einigen vereinfachenden Ausnahmen werden wir die Größe Γ im folgenden Abschnitt abschätzen.

13.6. Interpretation der breiten Resonanzen bei der Wechselwirkung von Neutronen mit Kernen

Die durch Gl. (13.5.19) bestimmte Größe charakterisiert die Breite der Einzelteilchenniveaus im Kern. Deshalb ist es interessant, dieses $\hbar\Gamma$ mit den experimentell beobachteten Breiten (≈ 2 MeV) der breiten Maxima für die über die Resonanzen gemittelten Streuquerschnitte von Neutronen kleiner Energie gegenüberzustellen [13,3].

Zur Abschätzung von $\hbar\Gamma$ im Gebiet eng benachbarter Resonanzen läßt sich (13.5.19) unter Benutzung von (13.5.17) in folgender Form darstellen:

$$\hbar\Gamma = 2\pi\,\omega(E_{n_0\xi_0})\,\Big|\sum_\lambda A_{\lambda,0\varepsilon}A_{\lambda,n_0\xi_0}(E_\lambda - E_{n_0\xi_0})\Big|^2.$$

Unter Vernachlässigung der alternierenden nichtdiagonalen Glieder erhält man

$$\hbar\Gamma \approx 2\pi\,\omega(E_{n_0\xi_0})\sum_\lambda |A_{\lambda,0\varepsilon}|^2\,|A_{\lambda,n_0\xi_0}|^2\,(E_\lambda - E_{n_0\xi_0})^2.$$

Führt man die Zustandsdichte $\omega(E_\lambda)$ des Compoundkerns im Energieintervall $(E_\lambda, E_\lambda + dE_\lambda)$ ein, so läßt sich die Summe über λ durch ein Integral über die Energie ersetzen:

$$\hbar\Gamma = 2\pi\,\omega(E_{n_0\xi_0})\int |A_{\lambda,0\varepsilon}|^2\,|A_{\lambda,n_0\xi_0}|^2\,(E_\lambda - E_{n_0\xi_0})^2\,\omega(E_\lambda)\,dE_\lambda. \tag{13.6.1}$$

In dieser Näherung lautet die Orthogonalitätsbedingung (13.5.18)

$$\int A_{\lambda,n\xi}A^*_{\lambda,n'\xi'}\,\omega(E_\lambda)\,dE_\lambda = \delta_{nn'}\,\delta_{\xi\xi'}. \tag{13.6.2}$$

Wir nehmen nun an, daß die Energieabhängigkeit des Ausdrucks $|A_{\lambda,0\varepsilon}|^2\omega(E_\lambda)$ in folgender Form dargestellt werden kann:

$$|A_{\lambda,0\varepsilon}|^2\,\omega(E_\lambda) = \frac{B}{\Omega_{0\varepsilon}}\exp\left\{-\frac{(E_\lambda - E_{0\varepsilon})^2}{\Omega_{0\varepsilon}^2}\right\}, \tag{13.6.3}$$

wobei sich B aus der Bedingung (13.6.2) ergibt. Dabei sei

$$B = 2\sqrt{\pi}\{1 + \Phi(x)\}^{-1} \tag{13.6.4}$$

mit

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt, \qquad x = \frac{E_{0\varepsilon}}{\Omega_{0\varepsilon}}. \tag{13.6.5}$$

$\Omega_{0\varepsilon}$ erhält man aus dem „zweiten Moment“ W^2, das von LANE, THOMAS und WIGNER [13,18] eingeführt wurde:

$$W^2 \equiv \sum_\lambda (E_\lambda - E_{0\varepsilon})^2\,|A_{\lambda,0\varepsilon}|^2. \tag{13.6.6}$$

Geht man in dieser Beziehung von der Summe zum Integral über und setzt (13.6.3) ein, so wird

$$W^2 = \frac{\Omega_{0\varepsilon}^2}{2[1+\Phi(x)]}\left\{1 + \Phi(x) - \frac{2x}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\right\}. \tag{13.6.7}$$

Aus (13.6.7) folgt, daß für $x < 1$ und $x > 1$

$$\Omega_{0\varepsilon}^2 \approx 2W^2 \tag{13.6.8}$$

gilt. Andererseits folgt mit (13.5.17) aus (13.6.6)

$$W^2 = \sum_\lambda |(\Phi_{0\varepsilon}, H' X_\lambda)|^2 = (\Phi_{0\varepsilon}, H'^2 \Phi_{0\varepsilon}) \tag{13.6.9}$$

mit

$$H' = \sum_\alpha \{V_\alpha - \mathfrak{Re} \langle t_\alpha \rangle\} \tag{13.6.10}$$

und

$$t_\alpha = V_\alpha + V_\alpha D^{-1} t_\alpha . \tag{13.6.11}$$

Diese Operatorgleichung besitzt die Lösung

$$t_\alpha = V_\alpha + V_\alpha (D - V_\alpha)^{-1} V_\alpha .$$

Dies zeigt man leicht durch unmittelbares Einsetzen unter Beachtung der Operatoridentität

$$D^{-1} + D^{-1} V_\alpha (D - V_\alpha)^{-1} \equiv (D - V_\alpha)^{-1}.$$

Man kann also schreiben

$$H' = \sum_\alpha \{V_\alpha - \langle V_\alpha \rangle\} - \mathfrak{Re} \sum_\alpha \langle V_\alpha (D - V_\alpha)^{-1} V_\alpha \rangle . \tag{13.6.12}$$

Setzt man (13.6.3) in (13.6.1) ein und benutzt die Näherungsgleichungen $E_{0\varepsilon} \approx E_{n_0 \xi_0}$, $\Omega_{0\varepsilon} \approx \Omega_{n_0 \xi_0}$, so gilt

$$\hbar \Gamma = \frac{8 \omega (E_{n_0 \xi_0})}{\Omega_{0\varepsilon}^2 [1 + \Phi(x)]^2} \int_0^\infty \omega^{-1}(E) (E - E_{0\varepsilon})^2 \, e^{-\frac{2(E - E_{0\varepsilon})^2}{\Omega_{0\varepsilon}^2}} \, dE . \tag{13.6.13}$$

Diese Formel bestimmt die Breite der „großen Resonanz" in den Neutronenstreuquerschnitten (im Gebiet sich überdeckender Niveaus des Compoundkerns) und ihrer Energieabhängigkeit.

Zur Abschätzung von $\hbar\Gamma$ und seiner Abhängigkeit von der Energie $E_{0\varepsilon}$ muß man die Energieabhängigkeit der Zustandsdichte $\omega(E)$ und von $\Omega_{0\varepsilon}^2$ kennen.

Nach der statistischen Theorie des Atomkerns (Abschn. 4.11.) ist

$$\omega(E) = a \exp \sqrt{bE}, \tag{13.6.14}$$

wobei die Parameter a und b Funktionen der Massenzahl sind. Wie schon im Abschn. 4.11. bemerkt, kann man nach [13,19] für Kerne mit Massenzahlen $15 < A < 70$

$$b = 0{,}14(A - 12) \quad [\mathrm{MeV}^{-1}]$$

setzen.

Die Gl. (13.6.14) ist für die analytische Berechnung des Integrals (13.6.13) unbequem. Wir setzen daher zur Vereinfachung

$$\omega(E) = c \exp\{\beta E\} \tag{13.6.15}$$

und wählen den Koeffizienten β so, daß im Energieintervall $7 < E < 30$ MeV, das für das Integral (13.6.13) am wesentlichsten ist, Gl. (13.5.15) einen etwa gleichen Anstieg der Niveaudichte wie Gl. (13.6.14) liefert. Für Kerne mit Massenzahlen um 60 ist $\beta \approx 0{,}3$ zu wählen. Berücksichtigt man, daß bei Kernwechselwirkungen von Neutronen mit Energien kleiner als 3 MeV nur

Compoundkernzustände angeregt werden, die sich mit ihrem Spin vom Spin des Ausgangskerns um $\pm {}^1/_2$ unterscheiden, und daß sich (13.6.14) auf alle möglichen Energieniveaus des Compoundkerns bezieht, so hat man für β einen Wert kleiner als 0,3 zu wählen.

Mit Hilfe von (13.6.15) kann man $\hbar\Gamma$ bei gegebenem β durch $\Omega_{0\varepsilon}$ ausdrücken. So erhält man, wenn man (13.6.15) in (13.6.13) einsetzt, nach einigen einfachen Umformungen

$$\hbar\Gamma = \frac{2\sqrt{2}\,\Omega_{0\varepsilon}}{[1+\Phi(x)]^2}\int\limits_{-x\sqrt{2}}^{\infty} y^2 \exp\{-y(y+2z)\}\,dy \tag{13.6.16}$$

mit

$$z \equiv \frac{\beta\,\Omega_{0\varepsilon}}{2\sqrt{2}}. \tag{13.6.17}$$

Für $\beta = 0$ und $x < 1$ gilt

$$\hbar\Gamma = \frac{\sqrt{\pi}\,\Omega_{0\varepsilon}}{\sqrt{2}\,[1+\Phi(x)]^2}.$$

Mit (13.6.8) erhält man $\hbar\Gamma \approx W_{0\varepsilon}$. Dieses Resultat entspricht dem Vorschlag von LANE, THOMAS und WIGNER [13,18], nach dem

$$\hbar\Gamma = W \tag{13.6.18}$$

ist.

Die Größe W wurde in der Arbeit [13,18] für

$$H' = \sum_{\alpha}\{V_\alpha - \langle V_\alpha\rangle\}$$

bestimmt. Für den Grundzustand des Kerns ergab sich $W = 23$ MeV, so daß die Breite $\hbar\Gamma$ den experimentellen Wert um etwa eine Größenordnung übertrifft.

Nimmt man $W \approx 23$ MeV an, so gilt nach (13.6.8) $\Omega_{0\varepsilon} \approx 32$ MeV. Bei Erfüllung der Ungleichung $x \equiv E_{0\varepsilon}/32 < 1$ geht Gl. (13.6.16) in

$$\hbar\Gamma \approx 2\sqrt{2}\,\Omega_{0\varepsilon}\int\limits_{0}^{\infty} y^2 \exp\{-y(y+2z)\}\,dy \tag{13.6.19}$$

über. Der experimentelle Wert $\hbar\Gamma = 2{,}5$ MeV ergibt sich hieraus, wenn man $\beta = 0{,}13$ setzt. Ist dagegen $\Omega_{0\varepsilon} \approx 20$ MeV, so erhält man den experimentell gefundenen $\hbar\Gamma$-Wert für $\beta = 0{,}2$.

KAPITEL 14

THEORIE DER KERNREAKTIONEN, DIE NICHT ÜBER EINEN COMPOUNDKERN VERLAUFEN

14.1. Direkte oder „Oberflächen"-Wechselwirkungen von Nukleonen mit Kernen

Lange Zeit nahm man in der Theorie der Kernreaktionen an, daß bei jeder Kernreaktion notwendig ein Compoundkernstadium durchlaufen wird. Nach der Bildung des Compoundkerns zerfällt dann das System in die verschiedenen Reaktionsprodukte. In den letzten Jahren wurde gezeigt, daß in einigen Fällen Kernreaktionen nicht über ein Compoundkernstadium zu verlaufen brauchen, sondern mit einer unmittelbaren Wechselwirkung des einfallenden Nukleons mit einer kleinen Anzahl von Kernnukleonen verknüpft sein können. In diesem Abschnitt betrachten wir Reaktionen, die durch Protonen oder Neutronen ausgelöst werden und die vom Standpunkt der Compoundkernvorstellung nicht gedeutet werden können.

Bei der Streuung von Nukleonen an leichten Kernen beobachtet man elastisch gestreute Nukleonen und einige Nukleonengruppen mit kleinerer Energie, die einer unelastischen Streuung entsprechen. Im Schwerpunktsystem ist die Verkleinerung der Relativenergie von Nukleon und Kern gleich der vom Kern absorbierten Energie. Untersucht man das Energiespektrum der gestreuten Nukleonen, so kann man Rückschlüsse über die Energieniveaus des Targetkerns ziehen. Die Dichte der Energieniveaus nimmt mit der Anregungsenergie zu. Deshalb wird das Energiespektrum der unelastisch gestreuten Nukleonen kleiner Energien bei genügend großen Beschußenergien kontinuierlich. Die Niveaudichte wächst auch mit zunehmender Massenzahl. Demzufolge wird das Spektrum der an schweren Kernen unelastisch gestreuten Nukleonen fast vollständig kontinuierlich sein. Läßt also die unelastische Streuung von Nukleonen an leichten Kernen Schlußfolgerungen über die Lage der Energieniveaus zu, so liefert die unelastische Streuung von Nukleonen an schweren Kernen Angaben über die Dichte der Energieniveaus im Kern.

Bis 1950 wurde die unelastische Streuung von Protonen im wesentlichen an leichten Kernen untersucht, da die bis zu dieser Zeit erreichbaren Protonenenergien (4 · · · 8 MeV) für die Überwindung des Coulomb-Walls von schweren Kernen nicht ausreichten. Der Bau von Linearbeschleunigern für Energien der Größenordnung 10 MeV, die leistungsstarke Protonenbündel liefern, gestattete, nunmehr auch die unelastische Streuung von Protonen an schweren Kernen zu untersuchen.

Nach der Compoundkerntheorie war zu erwarten, daß die an schweren Kernen unelastisch gestreuten Protonen eine Geschwindigkeitsverteilung vom MAXWELLschen Typ besitzen, die einer Anregungstemperatur von etwa 1 · · · 2 MeV entspricht. Die Winkelverteilung der emittierten Protonen sollte isotropen Charakter tragen, und der totale Wirkungsquerschnitt für unelastische Streuung müßte sehr klein sein, da nur Protonen aus dem hochenergetischen Teil der MAXWELL-Verteilung den COULOMB-Wall überwinden können.

Die ersten experimentellen Arbeiten über unelastische Streuung von Protonen an schweren Kernen wurden im Jahre 1952 [14,1] durchgeführt. Schon diese Experimente zeigten, daß sich das beobachtete Spektrum der gestreuten Protonen stark von der MAXWELL-Verteilung unterscheidet. Die Wirkungsquerschnitte übersteigen die vom Compoundkernmodell vorhergesagten Werte um eine Größenordnung.

Diese Resultate wurden durch spätere Arbeiten von EISENBERG und IGO [14,2] bestätigt, die die unelastische Streuung von 31-MeV-Protonen an Pb, Au, Ta und Sn untersuchten und zeigen konnten, daß die unelastisch gestreuten Protonen keine MAXWELLsche Geschwindigkeitsverteilung aufweisen, daß ihre Winkelverteilung ein Maximum in Vorwärtsrichtung annimmt und daß der totale Wirkungsquerschnitt etwa 15% des geometrischen Querschnitts beträgt, also um eine Größenordnung größer ist, als nach der Compoundkerntheorie zu erwarten war. Alle experimentellen Tatsachen deuten darauf hin, daß bei unelastischer Streuung von Protonen neben Prozessen, die über ein Compoundkernstadium verlaufen, auch Prozesse vorhanden sein müssen, die nicht über ein solches Stadium verlaufen.

In der Arbeit von ROSEN und STEAWART [14,3] wurde die unelastische Streuung von 14-MeV-Neutronen an einer Reihe von Kernen untersucht. Dabei ergab sich, daß die Winkelverteilung der unelastisch gestreuten Neutronen mit kleinen Energien zwischen 0,5 und 4,0 MeV bezüglich 90° symmetrisch und fast isotrop ist. Die Winkelverteilung der unelastisch gestreuten Neutronen größerer Energien (4 · · · 12 MeV) besitzt ein Maximum in Vorwärtsrichtung.

Die unelastische Streuung von Nukleonen an Kernen wurde ferner in einer Reihe weiterer Arbeiten untersucht [14,4; 14,5]. In allen diesen Arbeiten stellte man fest, daß die Anzahl von Nukleonen hoher Energie in den Reaktionen (n, n′), (p, p′), (p, n), (n, p) wesentlich größer als die nach der Compoundkernhypothese zu erwartende ist, wenn man außerdem noch annimmt, daß sich die Energie über alle Nukleonen des Kerns statistisch verteilt. So zeigte z. B. COHEN [14,5] bei der Untersuchung der (p, n)-Reaktion mit 32-MeV-Protonen an den Kernen von Mg, Al, Cu, Mo, Ag, Th und U, daß die Winkelverteilung der Neutronen bei diesen Reaktionen bezüglich 90° asymmetrisch ist und ein Maximum in Vorwärtsrichtung aufweist. Für hochenergetische Neutronen unterscheidet sich die Streuung in Vorwärtsrichtung um eine Größenordnung von der Rückwärtsstreuung. Die Winkelverteilung der Neutronen kleinerer Energie besitzt stärkere Isotropie. Dies deutet höchstwahrscheinlich auf die Beteiligung von Compoundkernprozessen

bei der Streuung hin. Allerdings muß auch bei der direkten Wechselwirkung die Emission von langsamen Neutronen eine stärkere Isotropie besitzen.

Zur Erklärung der experimentellen Werte für die unelastische Streuung von Nukleonen mittlerer Energie an Kernen und über die (n, p)- und (p, n)-Reaktionen an schweren Kernen muß man annehmen, daß die Nukleonen mit dem Kern z. T. so wechselwirken, daß ein Teil seiner Energie einem (oder mehreren) Nukleon übertragen wird. Dieses Nukleon wird emittiert, bevor sich die Energie über die anderen Freiheitsgrade verteilt. Solche Prozesse werden als *direkte* oder *Oberflächenwechselwirkung* bezeichnet. Sie gehen offensichtlich in erster Linie an den am schwächsten gebundenen Nukleonen vor sich, die sich ja an der „Oberfläche“ des Kerns befinden. Als Bestätigung für die Richtigkeit dieses Reaktionsmechanismus ist z. B. die Proportionalität zwischen den Wirkungsquerschnitten für unelastische Streuung mit Emission hochenergetischer Protonen und der Kubikwurzel aus der Massenzahl, d. h. dem Kernradius, anzusehen [14,2].

Die direkte (oder Oberflächen-) Wechselwirkung erhält besondere Bedeutung im Intervall von 10 · · · 40 MeV der Energie der Relativbewegung von Nukleon und Kern. Bei Energien über 50 MeV vergrößert sich die „Durchlässigkeit“ des Kerns, und Wechselwirkungen werden möglich, bei denen einem Nukleon so viel Energie mitgeteilt wird, daß seine Entfernung aus dem Kern nicht nur bei der Wechselwirkung mit schwach gebundenen „Oberflächen“-Nukleonen möglich ist, sondern auch bei der Wechselwirkung im Kerninneren. Bei Energien kleiner als 10 MeV übersteigt die Wellenlänge des Nukleons wesentlich die Kernabmessungen, und die Wechselwirkung geht gleichzeitig mit allen Nukleonen des Kerns vor sich. In diesem Fall ist die Wahrscheinlichkeit für die Energieübertragung an ein „Oberflächen“-Nukleon außerordentlich klein.

Um Reaktionen mit direkter Wechselwirkung praktisch zu verwirklichen, darf die Energie des einfallenden Nukleons nicht in der Nähe von Resonanzenergien des entsprechenden Compoundkerns liegen, da dann die Wahrscheinlichkeit für die Bildung eines Compoundkerns sehr groß wird.

Eine Theorie der direkten Wechselwirkung von Nukleonen mit Oberflächennukleonen des Kerns wurde zuerst von Austern, Butler und Manus [14,6] vorgeschlagen. Sie zeigten, daß die Winkelverteilung von Protonen der (n, p)-Reaktion scharfe Maxima im Gebiet kleiner Streuwinkel aufweist. Die Lage dieser Maxima wird durch die dem Kern vom Neutron übertragenen Bahndrehimpulse bestimmt.

Wir betrachten nun die elementare Ableitung für die Winkelverteilung von Protonen bei Oberflächenwechselwirkung für die (n, p)-Reaktion am Kern A. Zur Vereinfachung der Rechnungen werden wir den Nukleonenspin und die Coulomb-Wechselwirkung zwischen Proton und Kern nicht berücksichtigen. Der Anfangszustand des Systems n + A läßt sich dann durch die Wellenfunktion

$$\Phi_a = \psi_A(r_p, \xi)\, Y_{lm}(\vartheta_p, \varphi_p) \exp(i\, \mathfrak{k}\, \mathfrak{r}_n) \tag{14.1.1}$$

darstellen. Hierbei bedeuten r_p, ϑ_p, φ_p die Polarkoordinaten des Protons und ξ die Koordinaten aller übrigen Nukleonen im Kern A, $\mathfrak{r}_n$ und $\mathfrak{k}$ Koordinate bzw. Wellenvektor des Neutrons. Der Endzustand entspricht einem Kern B, den man erhält, wenn man im Kern A ein Proton durch ein Neutron ersetzt, plus einem Proton, das vom Kern emittiert wird. Die Wellenfunktion dieses Zustandes bei großem Abstand zwischen Proton und Kern lautet

$$\Phi_b = \psi_B(r_n, \xi)\, Y_{\lambda\mu}(\vartheta_n, \varphi_n) \exp(i\, \mathfrak{q}\, \mathfrak{r}_p) \tag{14.1.2}$$

mit $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}_p$ entsprechend als Wellenvektor und Koordinate des Protons und r_n, ϑ_n, φ_n als Polarkoordinaten des Neutrons im Kern B.

Die Operatoren $V_a(\xi, r_p; r_n)$ und $V_b(\xi, r_n; r_p)$ stellen die Wechselwirkung des Neutrons mit dem Kern A und des Protons mit dem Kern B bei Oberflächenwechselwirkung dar. Wir nehmen an, daß diese Operatoren nur an der „Oberfläche" des Kerns, d. h. für $r_n = r_p = R$, von Null verschieden sind.

Die Wahrscheinlichkeit für einen Übergang aus dem Zustand a in den Zustand b je Zeiteinheit für Prozesse des hier betrachteten Typs, d. h. für Quantenübergänge mit Nukleonenaustausch (vgl. Abschn. 9.4.), wird durch die Relation

$$P_{ba} = \frac{2\pi}{\hbar} |(\Phi_b, V_b\, \Omega_a\, \Phi_a)|^2\, \varrho_b(\varepsilon) \tag{14.1.3}$$

gegeben. Dabei genügt der Operator Ω_a der Gleichung

$$\Omega_a = 1 + (E_a - H_a + i\,\eta)^{-1}\, V_a\, \Omega_a. \tag{14.1.4}$$

In der Gl. (14.1.4) stellt H_a die Summe aus dem HAMILTON-Operator des Kerns A und dem Operator der kinetischen Energie für die Relativbewegung von A und Neutron dar. In der BORNschen Näherung setzt man $\Omega_a = 1$.

Zur Bestimmung der Winkelverteilung der emittierten Protonen braucht man bei unserer Wahl von V_b die Operatorgleichung (14.1.4) nicht zu lösen. Es genügt, die Beziehung

$$V_b\, \Omega_a = \delta(\mathfrak{r}_n - \mathfrak{r}_p)\, \delta(\mathfrak{r}_p - \mathfrak{R})\, W(\xi, R) \tag{14.1.5}$$

zu berücksichtigen. Dabei wird angenommen, daß die Wechselwirkung des emittierten Protons nur mit einem Neutron des Kerns erfolgt.

Unter Benutzung von (14.1.1), (14.1.2) und (14.1.5) kann man schreiben

$$(\Phi_b, V_b\, \Omega_a\, \Phi_a) = C \int Y^*_{\lambda\mu} \exp[i(\mathfrak{k} - \mathfrak{q})\, \mathfrak{R}]\, Y_{lm}\, d\Omega, \tag{14.1.6}$$

wobei

$$C \equiv \int \psi^*_B(R, \xi)\, W(\xi, R)\, \psi_a(R, \xi)\, d\xi \tag{14.1.7}$$

von den Eigenfunktionen des Anfangs- und Endkerns, aber nicht von der Emissionsrichtung des Protons abhängig ist.

Zur Berechnung des Integrals der Kugelfunktionen, die in (14.1.6) eingehen, benutzen wir die Entwicklung einer ebenen Welle nach Kugelfunktionen:

$$e^{i(\mathfrak{k}-\mathfrak{q})\mathfrak{R}} = \sum_{L=0}^{\infty} i^L \sqrt{4\pi(2L+1)}\, j_L(|\mathfrak{k} - \mathfrak{q}|\, R)\, Y_{L0}(\vartheta).$$

Dabei ist $j_L(x)$ die sphärische BESSEL-Funktion. Mit Hilfe von

$$\int Y^*_{\lambda\mu}\, Y_{L0}\, Y_{lm}\, d\Omega = \sqrt{\frac{(2L+1)(2l+1)}{4\pi(2\lambda+1)}}\,(l\,L\,0\,0\,|\,\lambda\,0)\,(l\,L\,m\,0\,|\,\lambda\,\mu)$$

kann man dann schreiben

$$(\Phi_b, V_b\,\Omega_a\,\Phi_a) = C\sum_{L=0} i^L(2L+1)\sqrt{\frac{2l+1}{2\lambda+1}}\,(lL00|\lambda 0)(lLm0|\lambda\mu)\,j_L(|\mathfrak{k}-\mathfrak{q}|R). \tag{14.1.8}$$

Das Matrixelement (14.1.8) ist nur für $m = \mu$ von Null verschieden. Setzt man (14.1.8) in (14.1.3) ein und mittelt über die Quantenzahlen m des Anfangszustandes, so erhält man für die Übergangswahrscheinlichkeit je Zeiteinheit den Ausdruck

$$\overline{P}_{ba} = \sum_{L=0} a_L\,\{j_L(x)\}^2 \tag{14.1.9}$$

mit

$$x \equiv |\mathfrak{k}-\mathfrak{q}|R = R\sqrt{k^2+q^2-2kq\cos\vartheta} = R\sqrt{(k-q)^2+4kq\sin^2\frac{\vartheta}{2}}; \tag{14.1.10}$$

dabei bedeutet ϑ den Winkel zwischen der Bewegungsrichtung des einfallenden Neutrons und der Emissionsrichtung des Protons sowie

$$a_L = \frac{2\pi}{\hbar}\,\varrho_b(\varepsilon)\,C^2(2L+1)\,(l\,L\,0\,0\,|\,\lambda\,0)^2. \tag{14.1.10a}$$

Zur Ableitung von (14.1.9) wurde die Gleichung

$$\sum_m (l\,L\,m\,0\,|\,\lambda\,m)\,(l\,L'\,m\,0\,|\,\lambda\,m) = \frac{2\lambda+1}{2L+1}\,\delta_{LL'}$$

verwendet. Aus den Eigenschaften der Vektoradditionskoeffizienten folgt, daß a_L nur dann von Null verschieden ist, wenn die Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} |\lambda - l| \leqq L \leqq \lambda + l,\\ l+\lambda+L = \text{gerade Zahl} \end{aligned}\right\} \tag{14.1.11}$$

erfüllt sind. Der kleinste Wert für L, den die Bedingungen (14.1.11) noch zulassen, bestimmt die Lage des ersten Maximums in der Winkelverteilung der emittierten Protonen, da die Funktion $j_L(x)$ eine abklingende oszillierende Funktion ihres Arguments darstellt. Das Hauptmaximum von $j_L(x)$ bestimmt sich grob mit Hilfe der klassischen Bedingung der Gleichheit von Bahndrehimpuls $\hbar L$ und dem Nukleonenimpuls $\hbar|\mathfrak{k}-\mathfrak{q}|$ beim Wert des Stoßparameters R aus

$$x \equiv R\sqrt{(k-q)^2+4kq\sin^2\frac{\vartheta}{2}} \approx L. \tag{14.1.12}$$

Für eine genauere Bestimmung des Maximums muß man die Tabellen für die sphärischen BESSEL-Funktionen heranziehen. Bei $L = 0$ geht die maximale Protonenemission unter einem Winkel von $\vartheta = 0$ vor sich. Bei $L \neq 0$ wird das Emissionsmaximum bei Winkeln $\vartheta \neq 0$ beobachtet, je größer L ist, d. h., je größer der dem Kern beim Nukleonenaustausch übertragene Bahndrehimpuls ist, desto größer ist der Winkel ϑ für das erste Maximum.

Die oben erhaltenen Resultate lassen sich leicht auf den Fall einer Berücksichtigung der Nukleonenspins verallgemeinern. Die Wellenfunktionen von Anfangs- und Endzustand lassen sich dann in der Form

$$\Phi_a = \psi_A(r_p, \xi)\, \varphi_{jm}\, \chi_{1/2\,\mu'} \exp(i\,\mathfrak{k}\,\mathfrak{r}_n), \tag{14.1.13}$$

$$\Phi_b = \psi_B(r_n, \xi)\, \varphi_{i\mu}\, \chi_{1/2\,m'} \exp(i\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{r}_p) \tag{14.1.14}$$

schreiben. Ist außerhalb abgeschlossener Schalen in den Kernen A und B nur ein Nukleon vorhanden, so gilt

$$\varphi_{jm} = \sum_{m''} (l\, {}^1\!/_2\, m'', m - m'' \,|\, j\, m)\, Y_{l m''}\, \chi_{1/2,\, m-m''}, \tag{14.1.15}$$

$$\varphi_{i\mu} = \sum_{\mu''} (l\, {}^1\!/_2\, \mu'', \mu - \mu'' \,|\, i\, \mu)\, Y_{\lambda \mu''}\, \chi_{1/2,\, \mu-\mu''} \tag{14.1.15a}$$

für die Spinwinkelfunktionen, die die Winkelabhängigkeit der Wellenfunktionen im Anfangs- und Endzustand des Kerns bestimmen. $\chi_{1/2\,m}$ und $\chi_{1/2\,\mu}$ sind die Spinwellenfunktionen, die die Spinzustände von Proton und Neutron außerhalb des Kerns bestimmen.

Das Matrixelement des Übergangs nimmt jetzt folgende Form an:

$$(\Phi_b, V_b \Omega_a \Phi_a) = C \sum_{\sigma} \int \varphi^*_{jm}\, \chi^*_{1/2\,\mu'} \exp\{i(\mathfrak{k} - \mathfrak{q})\,\mathfrak{R}\}\, \varphi_{i\mu}\, \chi_{1/2\,m'}\, d\Omega. \tag{14.1.16}$$

Dabei ist über die Spinveränderlichen von Neutron und Proton zu summieren. Die Größe C besitzt die gleiche Bedeutung wie in (14.1.7).

Rechnet man (14.1.16) aus, so erhält man eine Formel vom Typ (14.1.9) für die Wahrscheinlichkeit des Übergangs $a \to b$ je Zeiteinheit

$$\sum_{L=0} a'_L \{j_L(x)\}^2, \tag{14.1.17}$$

wobei die a'_L konstante Koeffizienten sind, deren explizite Form wir hier nicht angeben wollen. Die möglichen Werte von L kann man aus den Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} &\left|\,|j - i| - \frac{1}{2}\right| \leqq L \leqq j + i + \frac{1}{2}, \\ &l + \lambda + L = \text{gerade Zahl} \end{aligned}\right\} \tag{14.1.18}$$

entnehmen.

Wir untersuchten bisher die (n, p)-Reaktion. Man sieht jedoch sehr leicht, daß bei Vernachlässigung der Coulomb-Wechselwirkung die erhaltenen Resultate unmittelbar auch für die (p, n)-, (p, p′)- und (n, n′)-Reaktionen verwendbar sind. Da die direkte Wechselwirkung nur bei Nukleonenenergien größer als 10 MeV Bedeutung besitzt, ist der Einfluß der Coulomb-Wechselwirkung auf die Winkelverteilung unbedeutend.

Experimente über die Winkelverteilung der Reaktionsprodukte bei direkter Wechselwirkung lassen Angaben über die Eigenschaften von Energieniveaus leichter Kerne zu. Aus der Winkelverteilung der emittierten Nukleonen kann man L bestimmen. Sind weiterhin Spin und Parität für den Anfangszustand (oder den Endzustand) bekannt, so ermöglichen die Auswahlregeln

(14.1.18) die Bestimmung von Spin und Parität des entsprechenden Niveaus im Endkern mit einer Genauigkeit bis auf Werte, die durch die Vektoradditionsregel

$$\mathfrak{j} = \mathfrak{i} + \mathfrak{L} + \mathfrak{s} \quad \left(s = \frac{1}{2}\right)$$

gegeben werden.

Von SCHRANK, GUGELOT und DAYTON [14,7] wurde die Winkelverteilung von unelastisch gestreuten Protonen der Energie 17 MeV an Eisen untersucht. Bei der unelastischen Streuung ging der Kern ^{56}Fe in einen Zustand mit der Anregungsenergie 0,822 MeV über. Im Anfangszustand besitzt dieser Kern den Spin Null und gerade Parität. Die beobachtete Winkelverteilung steht in guter Übereinstimmung mit der durch die Funktion $\{j_2(x)\}^2$ vermittelten Verteilung, wenn man den Wert $R = 1{,}5 \cdot 10^{-13}\, A^{1/3}$ [cm] verwendet. Damit wird bestätigt, daß das angeregte Niveau (0,822 MeV) des ^{56}Fe den Spin und die Parität 2^+ besitzt.

14.2. Kernreaktionen, die durch Deuteronen ausgelöst werden

Kernreaktionen, die durch Deuteronen hervorgerufen werden, besitzen große Bedeutung in der experimentellen Kernphysik als Mittel zur Untersuchung der Energieniveaus von Kernen und der Kernkräfte sowie zur Herstellung von monochromatischen Bündeln schneller Neutronen und Protonen usw. Die große Rolle der Kernreaktionen mit Deuteronen ist einerseits durch die Einfachheit der Herstellung von Bündeln monochromatischer Deuteronen in Beschleunigern und andererseits durch die große Ausbeute der entsprechenden Reaktionen im Vergleich zur Ausbeute bei Reaktionen, die durch andere geladene Teilchen hervorgerufen werden, bedingt. Eine Reihe von Besonderheiten dieser Reaktionen ist durch die relativ „lockere" Struktur des Deuterons im Vergleich zu anderen Kernen bedingt. Die Bindungsenergie des Deuterons beträgt 2,26 MeV. Die Bindungsenergie je Nukleon (1,13 MeV) ist also im Deuteron fünf- bis sechsmal kleiner als die mittlere Bindungsenergie je Nukleon in anderen Kernen. Die Wellenfunktion des Deuterons ($r\,\psi$) fällt erst nach $R = 4{,}31 \cdot 10^{-13}$ cm um den Faktor e, während die effektive Reichweite der Kernkräfte im Spintriplettzustand $1{,}7 \cdot 10^{-13}$ cm beträgt. Im Deuteron fallen weiterhin Schwerpunkt und Ladungszentrum nicht zusammen, so daß das Deuteron im COULOMB-Feld des Kerns elektrisch aufgespalten werden kann [14,8].

Wir werden hier nur Reaktionen betrachten, die durch Kernkräfte verursacht sind. Es zeigte sich, daß beim Stoß von Deuteronen mit Kernen außer den gewöhnlichen, über ein Compoundkernstadium verlaufenden Kernreaktionen auch Kernreaktionen auftreten, bei denen vom Kern nur eines der beiden Nukleonen eingefangen wird, und diese teilweise sogar wahrscheinlicher sind. Diese Erscheinung wird häufig als *Strippingreaktion* bezeichnet. Wegen der großen Ausdehnung des Deuterons sind Strippingreaktionen schon bei relativ niedrigen Deuteronenenergien möglich, wenn sich der Schwerpunkt des Deuterons noch in einem Abstand vom Kern befindet, der größer ist als die Reichweite der Kernkräfte. Da die COULOMB-Wechselwirkung

bei Deuteronenenergien kleiner als die Höhe des COULOMB-Walls ein Eindringen des Protons in den Kern verhindert, wird bei diesen Energien häufiger das Neutron eingefangen. Die Theorie dieser Erscheinung wurde zuerst von OPPENHEIMER und PHILLIPS [14,9] untersucht. In der Arbeit [14,9] und einer Reihe darauffolgender Arbeiten [14,8; 14,10] wurde der totale Wirkungsquerschnitt dieser Reaktion, die nach ihren Entdeckern als OPPENHEIMER-PHILLIPS-Prozeß bezeichnet wird, in Abhängigkeit von der Deuteronenenergie abgeschätzt. Es konnte gezeigt werden, daß bei Verkleinerung der Deuteronenenergie der totale Reaktionsquerschnitt, beginnend bei einer Energie, die der Höhe des COULOMB-Walls entspricht, wesentlich schwächer abnimmt, als aus der Bedingung für die Eindringwahrscheinlichkeit des Deuterons in den COULOMB-Wall folgt. So beträgt z. B. für ^{63}Cu die Höhe des COULOMB-Walls ≈ 7 MeV, die Reaktion beginnt jedoch bereits bei 2 MeV.

In den obengenannten theoretischen Arbeiten wurde die Winkelverteilung der bei der Reaktion entstehenden Nukleonen nicht untersucht. Im Jahre 1951 erschien eine Arbeit von BUTLER [14,11], in der erstmals mit Hilfe von vereinfachenden Annahmen eine Theorie für die Winkelverteilung der Nukleonen bei Strippingreaktionen ausgearbeitet wurde.

Die Bewegung eines Deuterons im COULOMB-Feld läßt sich nur mit einem sehr komplizierten mathematischen Apparat beschreiben, da Schwerpunkt und Ladungszentrum im Deuteron nicht zusammenfallen. BUTLER berücksichtigte in seiner Theorie die COULOMB-Wechselwirkung nicht. Weiterhin wurde auch die Wechselwirkung zwischen den nichtabsorbierten Nukleonen und dem Kern nicht berücksichtigt und eine Reihe von anderen vereinfachenden Annahmen gemacht. BUTLER zeigte, daß die Winkelverteilung der Protonen in der Reaktion A (d, p) B stark vom Bahndrehimpuls abhängt, der dem Kern A vom eingefangenen Neutron mitgeteilt wird.

An Hand der Protonenenergie kann man bestimmen, auf welches Energieniveau das Neutron im Kern B eingefangen wurde. Die Winkelverteilung der Protonen bei Strippingreaktionen weist in starkem Maße Anisotropie auf. Wird das Neutron in einen S-Zustand eingefangen, so besitzt die Kurve für die Winkelverteilung der Protonen ein scharfes Hauptmaximum in der Vorwärtsrichtung. Beim Einfang in P-, D-, F-Zustände liegt das Hauptmaximum bei Winkeln ungleich Null. Je größer der dem Kern vom Neutron mitgeteilte Bahndrehimpuls ist, desto größer ist auch der Winkel, unter dem in Vorwärtsrichtung das Hauptmaximum in der Winkelverteilung der Protonen beobachtet wird.

Obwohl die eingeführten vereinfachenden Annahmen nur sehr grobe Annäherungen ergeben, liefert die BUTLERsche Theorie befriedigende Übereinstimmung mit dem Experiment und erwies sich als außerordentlich gutes Mittel für die experimentelle Untersuchung der Energieniveaus von Kernen. Untersucht man Energie und Winkelverteilung der bei der Strippingreaktion entstehenden Protonen, so läßt sich an einigen Kernen Schritt für Schritt die Struktur der Schalen sowohl im Grundzustand als auch in angeregten Zuständen verfolgen. Für das gleiche Ziel kann auch die zur Strippingreaktion

umgekehrte Reaktion, die sogenannte „*pick-up*"- oder *Abstreifreaktion*, verwendet werden. Dabei fängt ein am Kern B vorüberfliegendes Proton (Neutron) aus dem Kern B ein Neutron (Proton) unter gleichzeitiger Bildung eines Deuterons ein. Wir schreiben die Abstreifreaktionen in Kurzform folgendermaßen: B (p, d) A und B (n, d) A. Die Wirkungsquerschnitte dieser Reaktionen sind mit den Wirkungsquerschnitten der direkten Reaktionen durch das Prinzip vom detaillierten Gleichgewicht verknüpft. Die Reaktionen B (p, d) A und B (n, d) A können zur Untersuchung von Energieniveaus beim Übergang von schweren zu leichteren Kernen benutzt werden. Eine Vielzahl von experimentellen Arbeiten bekräftigte die Möglichkeit, Energieniveaus durch Untersuchung von Energie und Winkelverteilung der emittierten Nukleonen bei Stripping- und „pick-up"-Reaktionen zu untersuchen. Von großem Interesse sind ferner Untersuchungen an Reaktionen der Art A (d, t) B und B (t, d) A. An Hand dieser Reaktionen kann man die Energieniveaus der Kerne A und B sowie einige Eigenschaften der Wellenfunktionen für den Grundzustand des Tritons (t) bestimmen.

Bei Stößen von Deuteronen mit dem Kern A sind außer Strippingreaktionen auch Reaktionen möglich, die über ein Compoundkernstadium verlaufen. Das Endresultat solcher Reaktionen wird die Bildung eines neuen Kerns B bei gleichzeitiger Emission von Protonen (oder Neutronen) sein. Solche Reaktionen werden wie die Strippingreaktionen durch die Symbole A (d, p) B und A (d, n) B bezeichnet.

Der Hauptunterschied zwischen den Strippingreaktionen und den Reaktionen, die über ein Compoundkernstadium verlaufen, besteht darin, daß Reaktionen über den Compoundkern nach der statistischen Theorie (vgl. Abschn. 8.12.) eine in bezug auf den Winkel 90° symmetrische Winkelverteilung der emittierten Nukleonen aufweisen müssen. Die Trennung beider Erscheinungen braucht auf Grund von möglichen Interferenzen nicht vollständig zu sein.

Nach dem Erscheinen der Arbeit von Butler wurde eine Reihe theoretischer Untersuchungen durchgeführt, die die Butlersche Theorie verfeinerten und weiterentwickelten. Dennoch gibt es zur Zeit keine vollständig befriedigende Theorie der Strippingreaktionen.

Die theoretische Untersuchung der Strippingreaktionen bewegte sich in 2 Richtungen: Einmal unterwarf man die Wellenfunktionen der an der Reaktion beteiligten Teilchen bestimmten Randbedingungen auf der Kernoberfläche, und zum anderen wurde für die Lösung der Aufgabe die Bornsche Näherung benutzt. Die erste Richtung wurde ursprünglich in der Butlerschen Arbeit eingeschlagen und danach in den Arbeiten [14,12] bis [14,15] verwendet. Bei Vernachlässigung der Coulomb-Wechselwirkung und der Wechselwirkung zwischen Proton und Kern sowie zwischen Proton und Neutron (wenn das Neutron in den Kernverband eingeht) gestattet die Methode der Randbedingungen, einen analytischen Ausdruck für den differentiellen Wirkungsquerschnitt der Reaktion abzuleiten. Dieser Ausdruck gab befriedigende Übereinstimmung mit dem Experiment. Die Theorie liefert jedoch nicht den richtigen Absolutbetrag des Querschnitts und wird außerordentlich

kompliziert, wenn man sich von den eingeführten vereinfachenden Annahmen befreien will.

Bei der Benutzung der BORNschen Näherung ersetzt man die exakte Wellenfunktion, die die Wechselwirkung der Nukleonen untereinander und des Deuterons mit dem Kern beschreibt, durch eine nichtgestörte ebene Welle. Dies stellt eine sehr grobe Näherung dar, da sich die Wellenfunktion innerhalb des Kerns stark ändern muß. In den Arbeiten [14,14] bis [14,16] wurde gezeigt, daß die BORNsche Näherung bei der Untersuchung der Winkelverteilung mit den BUTLERschen Vereinfachungen zu denselben Resultaten wie die BUTLERsche Methode führt. Das zeigt, daß die Theorie der Winkelverteilung bei nicht sehr niedrigen Energien nur wenig von den benutzten vereinfachenden Annahmen abhängt.

Bei Strippingreaktionen müssen der Energieerhaltungssatz, der Drehimpulserhaltungsatz, der Erhaltungssatz für die Projektion des Drehimpulses und für die Parität Gültigkeit besitzen. Bezeichnet man die kinetische Energie für die Relativbewegung von Deuteron und Kern A mit ε_0, die Bindungsenergie des Deuterons mit ε_d, die Energie für den Anfangszustand des Kerns mit E_j und die Energie für den Endzustand des Kerns mit E_J sowie die kinetische Energie der emittierten Protonen mit ε_p, so muß nach dem Energieerhaltungssatz

$$\varepsilon_p = \varepsilon_0 - \varepsilon_d - (E_J - E_j) \tag{14.2.1}$$

sein. Für $E_J - E_j < 0$ erfolgt ein Übergang in einen gebundenen Zustand; gilt dagegen $E_J - E_j > 0$, so erhält man einen instabilen Kern bezüglich Neutronenemission. Jedem diskreten Wert $E_J - E_j$ entspricht eine Protonengruppe mit der Energie $\varepsilon_p(J, j)$. Experimentell bestimmt man meist die Größe $Q = \varepsilon_p - \varepsilon_0$.

Beträgt der Spin des Anfangskerns j (in Einheiten $\hbar$) und der Spin des Endkerns J, so muß beim Einfang eines Neutrons mit dem Bahndrehimpuls L auf Grund des Erhaltungssatzes für den Gesamtdrehimpuls folgende Beziehung gelten:

$$\mathfrak{L} + \mathfrak{j} + \mathfrak{s} = \mathfrak{J} \quad \left(s = \frac{1}{2}\right).$$

Die Bahndrehimpulsquantenzahl L für das eingefangene Neutron kann also bei vorgegebenem J und j Werte annehmen, die durch die Beziehungen

$$\left| |J - j| - \frac{1}{2} \right| \leqq L \leqq J + j + \frac{1}{2} \tag{14.2.2}$$

festgelegt sind. Außerdem folgt aus der Paritätserhaltung, daß L gerade sein muß, wenn J und j gleiche Parität besitzen, und daß es ungerade sein muß, wenn J und j verschiedene Parität besitzen. Bei vorgegebenem J und j durchläuft die Quantenzahl L somit gewisse vollständig bestimmte Werte, die die Winkelverteilung der Protonen bestimmen. Im folgenden Abschnitt betrachten wir die elementare Theorie der Winkelverteilung der Protonen bei Strippingreaktionen.

14.3. Elementare Theorie der Winkelverteilung der Nukleonen bei Strippingreaktionen

Wir betrachten die elementare Theorie der Strippingreaktion A (d, p) B unter der Annahme, daß die Kerne A und B sehr schwer sind. Dann braucht man die Bewegung der Kerne nicht zu berücksichtigen.[1]) Es seien $\mathfrak{r}_p$ und $\mathfrak{r}_n$ die Koordinaten von Proton und Neutron im Deuteron, $\mathfrak{k}_d$ der Wellenvektor für die Bewegung des freien Deuterons und $f(|\mathfrak{r}_p - \mathfrak{r}_n|)$ die Wellenfunktion für die innere Bewegung im Deuteron. Weiterhin möge sich der Kern A in einem Zustand befinden, der durch die Wellenfunktion

$$\psi_A(\xi)\,\varphi_{jm}(\vartheta_\xi, \sigma_\xi)$$

gegeben sei. Hierbei bedeutet $\varphi_{jm}(\vartheta_\xi, \sigma_\xi)$ eine von den Winkel- und Spinvariablen der Nukleonen im Kern A abhängige Funktion, die dem Gesamtspin j und seiner Projektion m auf die z-Achse entspricht.

Dann läßt sich die Wellenfunktion für den Anfangszustand in folgender Form schreiben:

$$\Phi_a = \exp\left\{i\,\mathfrak{k}_d \frac{(\mathfrak{r}_p + \mathfrak{r}_n)}{2}\right\} \chi_{1m_d}(\sigma_n\,\sigma_p)\,f(|\mathfrak{r}_p - \mathfrak{r}_n|)\,\psi_A(\xi)\,\varphi_{jm}(\vartheta_\xi, \sigma_\xi); \qquad (14.3.1)$$

dabei ist χ_{1m_d} die Spinfunktion des Deuterons.

Die Funktion (14.3.1) ist Eigenfunktion des HAMILTON-Operators H_a, der sich aus dem HAMILTON-Operator für den Kern A, dem Operator für die innere Bewegung im Deuteron und dem Operator der kinetischen Energie für die Deuteronenbewegung zusammensetzt. Den Operator für die Wechselwirkung zwischen Deuteron und Kern A bezeichnen wir mit V_a.

Die Funktion des Endzustandes beschreibt den Zustand des Kerns B, der aus dem Kern A und einem Neutron besteht, und die freie Bewegung des Protons. Sie läßt sich in der Form

$$\Phi_b = \exp(i\,\mathfrak{k}_p\,\mathfrak{r}_p)\,\chi_{1/2\,m_p}(\sigma_p)\,\psi_B(\xi, r_n)\,\varphi_{Jm}(\vartheta_\xi, \sigma_\xi, \vartheta_n, \sigma_n) \qquad (14.3.2)$$

schreiben.

Stellt man die Wechselwirkung zwischen Proton und Kern B durch den Operator V_b dar, so läßt sich nach Abschn. 9.4. die Wahrscheinlichkeit für den Übergang aus dem Zustand a in den Zustand b in folgender Form schreiben:

$$P_{ba} = \frac{2\pi}{\hbar}\,|(\Phi_b, V_b\,\Omega_a\,\Phi_a)|^2\,\varrho_b(\varepsilon). \qquad (14.3.3)$$

Dabei muß der Operator Ω_a der Gleichung

$$\Omega_a = 1 + (E_a - H_a + i\,\eta)^{-1}\,V_a\,\Omega_a \qquad (14.3.4)$$

genügen; E_a bedeutet die Gesamtenergie des Systems.

[1]) Eine einfache Ableitung der Formeln für die Winkelverteilung der Protonen bei Strippingreaktionen (d, p) unter Berücksichtigung der Streuung von Deuteronen- und Protonenwelle im Feld des Kerns ist von SITENKO [14,17] gegeben worden.

Interessiert man sich nur für die Winkelverteilung der Protonen bei der Reaktion A (d, p) B und nicht für den Absolutwert des Wirkungsquerschnitts, so braucht bei einigen vereinfachenden Annahmen über das Wechselwirkungspotential V_b die komplizierte Operatorgleichung (14.3.4) nicht gelöst zu werden.

Der Einfachheit halber wollen wir annehmen, daß der Operator V_b nur dann von Null verschieden ist, wenn sich das Proton an der Kernoberfläche befindet. Dann gilt

$$V_b \Omega_a = \delta(\mathfrak{r}_n - \mathfrak{r}_p)\, \delta(r_p - R)\, W(\xi). \tag{14.3.5}$$

Wir formen den Exponenten in (14.3.1) auf folgende Weise um:

$$^1/_2\, \mathfrak{k}_d(\mathfrak{r}_n + \mathfrak{r}_p) = \mathfrak{Q}\vec{\varrho} + \mathfrak{q}\, \mathfrak{r}_n + \mathfrak{k}_p\, \mathfrak{r}_p .$$

Dabei sind $\mathfrak{Q} = \mathfrak{k}_d/2 - \mathfrak{k}_p$ der Impuls, der die innere Bewegung des Protons im Deuteron charakterisiert, $\vec{\varrho} = \mathfrak{r}_p - \mathfrak{r}_n$ und $\mathfrak{q} = \mathfrak{k}_d - \mathfrak{k}_p$ der dem Kern übertragene Impuls. Setzt man (14.3.1), (14.3.2) und (14.3.5) in (14.3.3) ein, so erhält man

$$P_{ba} = \frac{2\pi}{\hbar}\, \varrho_b(\varepsilon)\, C \Big| g(Q) \sum_{\sigma} \int \varphi^*_{JM}(\vartheta_\xi, \sigma_\xi, \vartheta_n, \sigma_n) \times$$

$$\times\, \chi^*_{1/2\, m_p}(\sigma_p)\, e^{i\mathfrak{q}\mathfrak{R}}\, \varphi_{jm}(\vartheta_\xi, \sigma_\xi)\, \chi_{1 m_d}(\sigma_n \sigma_p)\, d\Omega_\xi\, d\Omega_n \Big|^2 \tag{14.3.6}$$

mit

$$C = \Big| \int \psi^*_B(\xi R)\, W(\xi)\, \psi_A(\xi)\, d\xi \Big|^2, \tag{14.3.7}$$

$$g(Q) = \int e^{i\mathfrak{Q}\vec{\varrho}} f(\varrho)\, d\vec{\varrho}. \tag{14.3.8}$$

Zur Berechnung von (14.3.6) entwickeln wir die ebene Welle $e^{i\mathfrak{q}\mathfrak{R}}$ nach Kugelfunktionen, integrieren über die Winkelvariablen und summieren über die Spinvariablen. Mittelt man das Resultat über die Quantenzahlen m und m_d des Anfangszustandes und summiert über die Quantenzahlen m_p und M des Endzustandes, so erhält man

$$\overline{P}_{ba} = |g(Q)|^2 \sum_L A_L \{j_L(q\, R)\}^2. \tag{14.3.9}$$

Dabei sind die A_L Koeffizienten, die nicht von den Winkeln abhängen. L durchläuft alle Werte, die den Ungleichungen

$$\Big| |J - j| - \frac{1}{2} \Big| \leqq L \leqq J + j + \frac{1}{2} \tag{14.3.10}$$

genügen. Außerdem muß L gerade sein, wenn J und j gleiche Parität besitzen, und ungerade, wenn J und j verschiedene Parität besitzen.

Zur Berechnung der expliziten Abhängigkeit der Funktion $g(Q)$ vom Winkel ϑ muß man die Radialwellenfunktion des Deuterons kennen. Nimmt man für diese Funktion den Ausdruck

$$f(\varrho) = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}}\, \frac{e^{-\gamma\varrho}}{\varrho}$$

an, so erhält man aus (14.3.8)

$$g(Q) = \frac{2\,(2\pi\gamma)^{1/2}}{\gamma^2 + Q^2} = \frac{2\,(2\pi\gamma)^{1/2}}{\gamma^2 + \left(k_p - \frac{k_d}{2}\right)^2 + 2k_d\,k_p \sin^2\frac{\vartheta}{2}}. \qquad (14.3.11)$$

Nimmt man eine Funktion vom HULTHENschen Typ an:

$$f(\varrho) = N(e^{-\alpha\varrho} - e^{-\beta\varrho})\frac{1}{\varrho}, \quad N \equiv \left[\frac{\alpha\beta(\alpha+\beta)}{2\pi(\alpha-\beta)}\right]^{1/2},$$

so erhält man

$$g(Q) = 4\pi N\{(\alpha^2 + Q^2)^{-1} + (\beta^2 + Q^2)^{-1}\}. \qquad (14.3.11\,a)$$

Die Größe $[g(Q)]^2$ ist proportional der Wahrscheinlichkeit dafür, das Proton im Schwerpunkt des Deuterons mit dem Impuls $\hbar Q$ zu finden.

Die Winkelverteilung für Protonen der Reaktion A (d, p) B wird nach (14.3.9) durch das Produkt der Quadrate der Funktion (14.3.11) und der sphärischen BESSEL-Funktion gegeben. Der erste Faktor hängt nicht von L ab und nimmt ein Maximum bei $\vartheta = 0$ an. Der zweite Faktor hängt von L ab und ist eine oszillierende Funktion von ϑ, da das Argument der BESSEL-Funktion vom Winkel abhängt:

$$q\,R = R\sqrt{(k_d - k_p)^2 + 4k_p\,k_d \sin^2\frac{\vartheta}{2}}.$$

Für $L = 0$ wird der größte Teil der Protonen in Vorwärtsrichtung emittiert, da $g^2(Q)$ und $j_0^2(q\,R)$ ihren Maximalwert bei $\vartheta = 0$ annehmen. Für $L \neq 0$ entspricht kleinen Werten von ϑ (und folglich auch q) das Minimum der Funktion $j_L(q\,R)$. In diesem Fall wird die Hauptmenge der Protonen unter Winkeln ungleich Null emittiert, die um so größer werden, je größer der Wert L im Hauptglied der Summe (14.3.9) wird. Um aus den experimentellen Angaben über die Winkelverteilung L zu erhalten, muß die experimentelle Kurve für die ϑ-Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts durch $g^2(Q)$ dividiert werden. Das erhaltene Resultat ist dann proportional

$$\sum_L A_L\,j_L^2(q\,R). \qquad (14.3.12)$$

Für einige Reaktionen A (d, p) B wird durch die Auswahlregel (14.3.10) nur ein L-Wert zugelassen. In diesem Fall ist die Bestimmung von L besonders einfach. Einen ersten Hinweis auf den Wert von L kann man durch Untersuchung der Kurve (14.3.12) bei kleinen Winkeln erhalten. Ein Maximum in Vorwärtsrichtung deutet auf $L = 0$ hin. Liegt das Maximum bei $\vartheta \neq 0$, so wählt man L und R so, daß die beste Übereinstimmung mit dem Experiment hergestellt wird. Ist L gefunden und sind Spin und Parität im Anfangszustand bekannt, so liefert die Auswahlregel die Parität im Endzustand. Der Spin im Endzustand läßt sich mit einer Genauigkeit bis auf Werte, die durch die Vektoraddition zulässig sind:

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{i} + \mathfrak{L} + \mathfrak{s} \quad \left(s = \frac{1}{2}\right),$$

angeben.

Berücksichtigt man in der Theorie die COULOMB-Wechselwirkung nicht (wie es bisher getan wurde), so werden die Reaktionen A (d, p) B und A (d, n) B auf die gleiche Weise beschrieben.

14.4.* Grundgleichungen für die Theorie der Strippingreaktionen ohne Berücksichtigung der COULOMB-Wechselwirkung

Im vorigen Abschnitt betrachteten wir die elementare Theorie der Winkelverteilung von Protonen in Reaktionen der Art A (d, p) B. Dabei nahmen wir an, daß die Kerne A und B so schwer sind, daß ihre Bewegung vernachlässigt werden kann. Außerdem machten wir sehr grobe Annahmen über den Charakter der Wechselwirkung zwischen Nukleonen und Kern. Jetzt wollen wir die Grundgleichungen für die Theorie der Strippingreaktionen ohne diese Vereinfachung ableiten.

Wir führen die Radiusvektoren $\mathfrak{x}_p$ und $\mathfrak{x}_n$ des Protons und Neutrons im Deuteron und den Radiusvektor $\mathfrak{R}$ für die Lage des Schwerpunkts des Kerns A ein. Der Operator der kinetischen Energie besitzt dann die Form

$$K = -\frac{\hbar^2}{2m}\left\{\frac{1}{A}\Delta_R + \Delta_{x_n} + \Delta_{x_p}\right\}. \tag{14.4.1}$$

Dabei ist m die Nukleonenmasse, mA die Kernmasse und A die Massenzahl. Alle weiteren Betrachtungen führen wir in einem Koordinatensystem durch, das mit dem Schwerpunkt des Kerns A und dem Schwerpunkt des Deuterons verknüpft ist. Für den Übergang zum Schwerpunktsystem führen wir neue Koordinaten über die Beziehungen

$$\mathfrak{R}, \mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_p \to \begin{cases} \vec{\zeta} = \dfrac{A\mathfrak{R} + \mathfrak{x}_n + \mathfrak{x}_p}{A+2}, \quad \mathfrak{r}_n = \mathfrak{x}_n - \mathfrak{R}, \quad \mathfrak{r}_p = \mathfrak{x}_p - \mathfrak{R}; & (14.4.2\text{a}) \\ \vec{\zeta} = \dfrac{A\mathfrak{R} + \mathfrak{x}_n + \mathfrak{x}_p}{A+2}, \quad \mathfrak{r} = \dfrac{1}{2}(\mathfrak{x}_n + \mathfrak{x}_p) - \mathfrak{R}, & \\ \qquad \vec{\varrho} = \mathfrak{x}_p - \mathfrak{x}_n; & (14.4.2\text{b}) \\ \vec{\zeta} = \dfrac{A\mathfrak{R} + \mathfrak{x}_n + \mathfrak{x}_p}{A+2}, \quad \mathfrak{r}_n = \mathfrak{x}_n - \mathfrak{R}, & \\ \qquad \mathfrak{y} = \mathfrak{x}_p - \dfrac{\mathfrak{x}_n + A\mathfrak{R}}{A+1} & (14.4.2\text{c}) \end{cases}$$

ein. Damit erhält man für die kinetische Energie (14.4.1) folgende Ausdrücke:

$$K = \begin{cases} -\dfrac{\hbar^2}{2m}\left[\dfrac{1}{A+2}\Delta_\zeta + \dfrac{A+1}{A}\Delta_{r_n} + \dfrac{A+1}{A}\Delta_{r_p}\right], & (14.4.3\text{a}) \\ -\dfrac{\hbar^2}{2m}\left[\dfrac{1}{A+2}\Delta_\zeta + \dfrac{A+2}{2A}\Delta_r + 2\Delta_\varrho\right], & (14.4.3\text{b}) \\ -\dfrac{\hbar^2}{2m}\left[\dfrac{1}{A+2}\Delta_\zeta + \dfrac{A+1}{A}\Delta_{r_n} + \dfrac{A+2}{A+1}\Delta_y\right]. & (14.4.3\text{c}) \end{cases}$$

Außerdem führen wir noch die Operatoren der kinetischen Energie für die Relativbewegung des Kerns A und entsprechend des Neutrons und Protons ein. Diese bezeichnen wir mit K_n und K_p. Da die Koordinaten $\mathfrak{r}_n$ und $\mathfrak{r}_p$

die Lage von Neutron und Proton bezüglich des Schwerpunkts des Kerns A bestimmen, gilt

$$K_{\mathrm{n}} = -\frac{\hbar^2}{2M}\Delta_{r_{\mathrm{n}}}, \quad K_{\mathrm{p}} = -\frac{\hbar^2}{2M}\Delta_{r_{\mathrm{p}}} \quad \text{mit} \quad M = \frac{A}{A+1}m.$$

Wir bezeichnen weiter den HAMILTON-Operator für den Kern A mit $H_A(\xi)$, wobei $\xi = (\xi, \sigma)$ die Gesamtheit der räumlichen und Spinkoordinaten für den inneren Zustand des Kerns ist. V_{np} bedeutet die Wechselwirkungsenergie von Proton und Neutron im Deuteron. Die Wechselwirkungsenergie des Protons und Neutrons mit dem Kern A wird entsprechend durch $V_{\mathrm{p}\xi}$ und $V_{\mathrm{n}\xi}$ beschrieben.

Der Gesamt-HAMILTON-Operator des Systems aus Kern und Deuteron lautet dann im Schwerpunktsystem

$$H = H_0 + V_{\mathrm{np}} + V_{\mathrm{n}\xi} + V_{\mathrm{p}\xi}. \tag{14.4.4}$$

Dabei ist H_0 je nach der Wahl der Variablen (14.4.2) nach (14.4.3) in folgender Form zu schreiben:

$$H_0 = \begin{cases} K_{\mathrm{n}} + K_{\mathrm{p}} + H_A(\xi), & (14.4.5\mathrm{a}) \\ K_{\mathrm{r}} + K_{\varrho} + H_A(\xi), & (14.4.5\mathrm{b}) \\ K_{\mathrm{n}} + K_y + H_A(\xi). & (14.4.5\mathrm{c}) \end{cases}$$

Dabei wurden K_{n} und K_{p} oben bereits definiert. Weiter sind

$$K_r = -\frac{\hbar^2}{2M_{\mathrm{d}}}\Delta_r, \quad K_\varrho = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta_\varrho, \quad K_y = -\frac{\hbar^2}{2M_y}\Delta_y,$$

$$M_d = \frac{2A}{A+2}m, \quad \mu = \frac{m}{2}, \quad M_y = \frac{A+1}{A+2}m.$$

Der Anfangszustand a stellt einen Zustand des Systems dar, in dem sich Deuteron und Kern A, die sich in unendlich großer Entfernung voneinander befinden, mit der Energie ε_0 aufeinander zu bewegen. Zu seiner Beschreibung benutzt man zweckmäßig das Variablensystem (14.4.2b). Bei $r \to \infty$ gilt $V_{\mathrm{n}\xi} = V_{\mathrm{p}\xi} = 0$, und der HAMILTON-Operator (14.4.4) nimmt folgende Form an:

$$H_a = H_0 + V_{\mathrm{np}} \equiv H_A(\xi) + H(\varrho) + K_r \tag{14.4.6}$$

mit $H(\varrho) = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta_\varrho + V_{\mathrm{np}}$ als HAMILTON-Operator für die innere Bewegung im Deuteron.

Die Wellenfunktion des Anfangszustandes Φ_a genügt der Gleichung

$$(H_a - E_a)\,\Phi_a = 0, \tag{14.4.7}$$

die sich in der Form

$$\Phi_a = \mathrm{e}^{i\mathfrak{k}_d\mathfrak{r}}\,\chi_{1m_{\mathrm{d}}}\,f(\varrho)\,\varphi_A(\xi) \tag{14.4.8}$$

schreiben läßt. Dabei bedeutet $\varphi_A(\xi) = \varphi_{jm}(\xi, \sigma_\xi)$ die Wellenfunktion für den Anfangszustand des Kerns A und genügt folgender Gleichung:

$$H_A(\xi)\,\varphi_A(\xi) = E_A\,\varphi_A(\xi). \tag{14.4.9}$$

$f(\varrho)$ ist die Wellenfunktion für den Grundzustand im Deuteron und genügt der Gleichung

$$H_\varrho f(\varrho) = -\varepsilon_d f(\varrho), \qquad \varepsilon_d > 0. \tag{14.4.10}$$

$\chi_{1 m_d}$ bedeutet die Spinfunktion des Deuterons, $E_a = E_A - \varepsilon_d + \varepsilon_0$ die Gesamtenergie für den Anfangszustand im Schwerpunktsystem und $\varepsilon_0 = \frac{\hbar^2}{2M_d} k_d^2$ die kinetische Energie der Relativbewegung von Deuteron und Kern. Im weiteren führen wir folgende Kurzbezeichnung für den Anfangszustand ein:

$$a \equiv \{\mathfrak{k}_d, A\} \equiv \{\mathfrak{k}_d, m_d, j, m\}. \tag{14.4.11}$$

Wir betrachten nun den Endzustand des Systems. Dieser entspricht dem Einfang eines Neutrons aus dem Deuteron durch den Kern A bei gleichzeitiger Bildung des Kerns B und der Entfernung eines Protons auf einen unendlich großen Abstand. Zur Beschreibung des Endzustandes benutzt man zweckmäßig das Variablensystem (14.4.2c). Man bestimmt also die Lage des Protons bezüglich des Schwerpunkts vom Endkern B durch den Radiusvektor $\mathfrak{y} = \mathfrak{r}_p - \frac{1}{A+1} \mathfrak{r}_n$. Für schwere Kerne gilt $\mathfrak{y} \approx \mathfrak{r}_p$.

Bei unendlich großer Entfernung des Protons vom Kern gilt $V_{np} = V_{p\xi} = 0$, und der Hamilton-Operator besitzt im Schwerpunktsystem nach (14.4.4) und (14.4.5c) die Form

$$H_b = H_0 + V_{n\xi} \equiv H_B(\xi, r_n) + K_y, \tag{14.4.12}$$

wobei

$$H_B(\xi, r_n) \equiv H_A(\xi) + K_n + V_{n\xi} \tag{14.4.13}$$

der Hamilton-Operator für den Endkern B ist.

Die Wellenfunktionen $\varphi_B(\xi, r_n)$ und die Energiezustände E_B des Kerns B (das kontinuierliche Spektrum eingeschlossen) werden durch die Gleichung

$$H_B(\xi, r_n)\, \varphi_B(\xi, r_n) = E_B\, \varphi_B(\xi, r_n) \tag{14.4.14}$$

gegeben. Die Wellenfunktion für den Endzustand des Gesamtsystems mit der Energie $E_b = E_B + \varepsilon_{k_p}$, wobei $\varepsilon_{k_p} = \frac{\hbar^2 k_p^2}{2M_y}$ ist, muß folgender Gleichung genügen:

$$(H_b - E_b)\, \Phi_b = 0. \tag{14.4.15}$$

Die Wellenfunktion lautet

$$\Phi_b = e^{i \mathfrak{k}_p \mathfrak{y}} \chi_{1/2\, m_p}(\sigma_p)\, \varphi_{JM}(\xi, r_n, \sigma_\xi, \sigma_n) \tag{14.4.16}$$

mit $\chi_{1/2\, m_p}(\sigma_p)$ als Spinfunktion des Protons.

Den Endzustand des Systems bezeichnen wir in der Kurzform durch

$$b \equiv \{\mathfrak{k}_p, B\} \equiv \{\mathfrak{k}_p, m_p, J, M\}.$$

Die Aufgabe der Theorie der Strippingreaktionen besteht in der Bestimmung des differentiellen Wirkungsquerschnitts der Reaktion, die dem Übergang

aus dem Zustand Φ_a in den Zustand Φ_b für das durch den HAMILTON-Operator (14.4.4) beschriebene System entspricht. Dazu ist die Lösung der Gleichung

$$(E - H_0 - V_{\text{np}} - V_{\text{n}\xi} - V_{\text{p}\xi})\,\Psi = 0 \tag{14.4.17}$$

als Summe der einfallenden Welle Φ und auslaufender Wellen unter der Bedingung $E = E_a = E_b$ zu bestimmen. Wir schreiben (14.4.17) in der Form

$$(E - H_0 - V_{\text{n}\xi})\,\Psi = (V_{\text{np}} + V_{\text{p}\xi})\,\Psi. \tag{14.4.18}$$

Die Lösung von (14.4.18) läßt sich als Integralgleichung schreiben:

$$\Psi = \Phi_b + D^{-1}(V_{\text{np}} + V_{\text{p}\xi})\,\Psi. \tag{14.4.19}$$

Dabei ist

$$D = E - H_b + i\,\eta \equiv E - H_0 - V_{\text{n}\xi} + i\,\eta; \tag{14.4.20}$$

η bedeutet eine kleine positive reelle Größe, die garantiert, daß in (14.4.19) nur auslaufende gestreute Wellen vorhanden sind. Nach Berechnung der entsprechenden Integrale geht man zur Grenze $\eta \to 0$ über.

Wir drücken Φ_b in der Gl. (14.4.19) durch die einfallende Welle Φ_a aus. Dazu schreiben wir die Gl. (14.4.7) unter Berücksichtigung von (14.4.6) in der Form

$$(E - H_0 - V_{\text{n}\xi})\,\Phi_a = (V_{\text{np}} - V_{\text{n}\xi})\,\Phi_a.$$

Damit gilt

$$\Phi_a = \Phi_b + D^{-1}(V_{\text{np}} - V_{\text{n}\xi})\,\Phi_a, \tag{14.4.21}$$

wobei Φ_b der Gleichung $(E - H_0 - V_{\text{n}\xi})\,\Phi_b = 0$ genügt, die mit Gl. (14.4.15) übereinstimmt. Setzt man Φ_b aus (14.4.21) in (14.4.19) ein, so erhält man eine Integralgleichung der geforderten Art:

$$\Psi = \Phi_a + D^{-1}[W_1\,\Phi_a + V_b\,\Psi] \tag{14.4.22}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} W_1 &= V_{\text{n}\xi} - V_{\text{np}}, \\ V_b &= V_{\text{p}\xi} + V_{\text{np}}. \end{aligned}\right\} \tag{14.4.23}$$

Die Gl. (14.4.22) ist der in der Arbeit [14,18] für spinlose Teilchen erhaltenen Gleichung analog, wenn der Kern durch ein Kraftzentrum ersetzt wird.

Berücksichtigt man $W_1 = V_a - V_b$ $(V_a = V_{\text{p}\xi} + V_{\text{n}\xi})$, so überzeugt man sich leicht, daß die hier erhaltene Integralgleichung (14.4.22), die die exakte Wellenfunktion der Strippingreaktion bestimmt, identisch mit der Integralgleichung in Abschn. 9.4. ist, die aus der formalen Theorie der Kernreaktionen mit Nukleonenaustausch erhalten wurde. Dort wurde gezeigt, daß diese Gleichung folgender Integralgleichung äquivalent ist:

$$\Psi = \Phi_a + (E - H_a + i\,\eta)^{-1}\,V_a\,\Psi, \tag{14.4.22a}$$

wobei

$$H_a = H_A(\xi) + H_\varrho + K_r$$

ist.

Führt man die GREENsche Funktion ein, so läßt sich die Integralgleichung (14.4.22) folgendermaßen schreiben:

$$\Psi = \Phi_a + \int G(r_{\text{p}}, r_{\text{n}}, \xi;\, r'_{\text{p}}, r'_{\text{n}}, \xi')\,[W_1\,\Phi_a + V_a\,\Psi]'\,d\tau'. \tag{14.4.24}$$

Das Integralzeichen bedeutet gleichzeitig auch Summierung über die Spinvariablen. Der Strich an der eckigen Klammer soll andeuten, daß die in der Klammer stehenden Funktionen für die gestrichenen Koordinaten zu nehmen sind. Die GREENsche Funktion G in (14.4.24) wird durch die Gleichung

$$G = \sum_{b'} \Phi_{b'}(r_n, r_p, \xi)\, D^{-1}\, \Phi_{b'}(r'_n, r'_p, \xi')$$

gegeben. Berücksichtigt man, daß die Φ_b Eigenfunktionen des Operators H_b sind, so läßt sich mit Hilfe von (14.4.15) und (14.4.20)

$$D^{-1}\, \Phi^*_{b'} = (E - E_{b'} + i\,\eta)^{-1}\, \Phi^*_{b'}$$

schreiben. Berücksichtigt man den Ausdruck für die Wellenfunktion (14.4.16) und setzt die Werte E_a und E_b ein, so folgt hieraus

$$D^{-1}\, \Phi^*_{b'} = \frac{2M_y}{\hbar^2}\,(k^2_{B'} - k^2_p + i\,\eta')^{-1}\, e^{-i\mathfrak{k}_p \mathfrak{y}}\, \chi^*_{1/2\, m_p}\, \varphi^*_{B'}(\xi, r_n)$$

mit

$$k^2_{B'} = \frac{2M_y}{\hbar^2}\,(E_A - E_B + \varepsilon_d + \varepsilon_0), \qquad \eta' = \frac{\hbar^2}{2M_y}\,\eta .$$

Jetzt kann man schreiben

$$G = \frac{2M_y}{\hbar^2} \sum_{B'} \int \frac{d\mathfrak{k}_p}{(2\pi)^3}\, e^{i\mathfrak{k}_p(\mathfrak{y}-\mathfrak{y}')}\, \frac{\chi_{1/2\, m_p}(\sigma_p)\, \varphi_{B'}(\xi, r_n)\, \chi^*_{1/2\, m_p}(\sigma'_p)\, \varphi^*_{B'}(\xi', r'_n)}{k^2_{B'} - k^2_p + i\,\eta'} .$$

Berücksichtigt man noch die bekannte Gleichung

$$(2\pi)^{-3} \int \frac{e^{i\mathfrak{k}\mathfrak{x}}}{k_0^2 - k^2 + i\,\eta}\, d\mathfrak{k} = -\frac{e^{i k_0 |\mathfrak{x}|}}{4\pi\, |\mathfrak{x}|},$$

so erhält man als endgültigen Ausdruck für die GREENsche Funktion

$$G = -\frac{M_y}{2\pi\,\hbar^2} \sum_B \frac{\exp\{i\, k_B\, |\mathfrak{y} - \mathfrak{y}'|\}}{|\mathfrak{y} - \mathfrak{y}'|}\, \chi_{1/2\, m_p}(\sigma_p)\, \varphi_B(\xi, r_n)\, \chi^*_{1/2\, m_p}(\sigma'_p)\, \varphi^*_B(\xi', r'_n)$$

mit

$$k^2_B = \frac{2M_y}{\hbar^2}\,(E_A - E_B + \varepsilon_d + \varepsilon_0).$$

Diese Beziehung drückt den Energieerhaltungssatz für die Reaktion A (d, p) B aus.

Setzt man die gefundene GREENsche Funktion in (14.4.24) ein, so erhält man eine Integralgleichung für die Wellenfunktion des Systems:

$$\Psi = \Phi_a - \frac{M_y}{2\pi\,\hbar^2} \sum_B \chi_{1/2\, m_p}\, \varphi_B(\xi, r_n) \times$$

$$\times \int \frac{e^{i k_p |\mathfrak{y} - \mathfrak{y}'|}}{|\mathfrak{y} - \mathfrak{y}'|}\, \chi^*_{1/2\, m_p}(\sigma'_p)\, \varphi^*_B(\xi', r'_n)\, [W_1\, \Phi_a + V_b\, \Psi]'\, d\tau'. \qquad (14.4.25)$$

Φ_a entspricht der einfallenden Welle, alle übrigen Glieder entsprechen auslaufenden Wellen.

Wir bestimmen die Streuamplitude $A_B(\mathfrak{n})$ für Protonenstreuung in der Richtung des Einheitsvektors $\mathfrak{n}$ mit Hilfe der Beziehung

$$A_B(\mathfrak{n}) \frac{e^{i k_p y}}{y} = \lim_{y \to \infty} \int \varphi_B^*(\xi, r_n) \chi^*_{1/2 m_p} \Psi \, d\mathfrak{r}_n \, d\xi, \qquad (14.4.26)$$

wenn der Endkern in den Zustand B übergeht. Hierbei bedeutet Ψ die Lösung der Integralgleichung (14.4.25). Setzt man Ψ aus (14.4.25) in (14.4.26) ein und berücksichtigt, daß für $y \to \infty$ die Beziehung $k_p |\mathfrak{y} - \mathfrak{y}'| \approx k_p y - \mathfrak{k}_p \mathfrak{y}'$ mit $\mathfrak{k}_p = \mathfrak{n} k_p$ gilt, so erhält man

$$A_B(\mathfrak{n}) = -\frac{M_y}{2\pi \hbar^2} (\mathfrak{k}_p, B; |W| a), \qquad (14.4.27)$$

wobei

$$(\mathfrak{k}_p, B; |W| a) \equiv \int e^{-i\mathfrak{k}_p \mathfrak{y}} \chi^*_{1/2 m_p} \varphi_B^*(\xi, r_n) [W_1 \Phi_a + V_b \Psi] \, d\tau \qquad (14.4.28)$$

ist.

Wir zeigen jetzt, daß das Matrixelement

$$\int e^{-i\mathfrak{k}_p \mathfrak{y}} \chi^*_{1/2 m_p} \varphi_B^*(\xi, r_n) W_1 \Phi_a \, d\tau \equiv \int \Phi_b^* (V_{n\xi} - V_{np}) \Phi_a \, d\tau = 0 \quad (14.4.29)$$

ist. Nach (14.4.7) und (14.4.15) genügen die Funktionen Φ_a und Φ_b^* den Gleichungen

$$(H_0 + V_{np} - E_a) \Phi_a = 0,$$
$$(H_0 + V_{n\xi} - E_b) \Phi_b^* = 0.$$

Multipliziert man die erste dieser Gleichungen mit Φ_b^* und die zweite mit Φ_a, integriert über alle Variablen, von denen sie abhängen, und subtrahiert schließlich die eine Gleichung von der anderen, so erhält man

$$(\Phi_b, V_{n\xi} \Phi_a) = (\Phi_b, V_{np} \Phi_a), \qquad (14.4.30)$$

und damit ist (14.4.29) bereits bewiesen.

Für das Matrixelement gilt also

$$(\mathfrak{k}_p, B; |W| a) = (\Phi_b, V_b \Psi) \equiv \int e^{-i\mathfrak{k}_p \mathfrak{y}} \chi^*_{1/2 m_p} \varphi_B^* (V_{p\xi} + V_{pn}) \Psi \, d\tau. \quad (14.4.31)$$

Im Experiment registriert man ein Bündel gestreuter Protonen, wobei die Protonenenergie für das gegebene Bündel dem Neutroneneinfang in einen der Zustände des Endkerns entspricht. Der Protonenfluß je Raumwinkeleinheit in der Richtung $\mathfrak{n}$ läßt sich durch die Streuamplitude ausdrücken und ist gleich

$$\frac{\hbar k_p}{M_y} |A_B(\mathfrak{n})|^2.$$

Dividiert man dies durch die Flußdichte der einfallenden Deuteronen $(\hbar k_d/M_d)$, so erhält man den Wirkungsquerschnitt der betreffenden Reaktion bei bestimmten Spinorientierungen von Deuteron, emittiertem Proton und Kernen:

$$\frac{d\sigma_{ba}}{d\Omega} = \frac{M_d k_p}{M_y k_d} |A(\mathfrak{n})|^2 = \frac{M_y M_d k_p}{(2\pi)^2 \hbar^4 k_d} |(\mathfrak{k}_p, B; |W| a)|^2. \qquad (14.4.32)$$

Meist handelt es sich um nichtpolarisierte Deuteronenbündel, und man registriert Protonen ohne Berücksichtigung ihrer Polarisation. Zur Berechnung des im Experiment gemessenen Wirkungsquerschnitts hat man (14.4.32) über die Polarisationszustände der Protonen und die Spinzustände des Endkerns zu summieren sowie über die Anfangspolarisationszustände im Deuteronenbündel und die Spinprojektionen des Anfangskerns zu mitteln. Bezeichnet man diese Operation durch das Zeichen

$$\sum_S \equiv \frac{1}{3(2j+1)} \sum_{m_\mathrm{d},\, m,\, m_\mathrm{p},\, M},$$

so erhält man für den Wirkungsquerschnitt der Strippingreaktion

$$\frac{d\sigma_{ba}}{d\Omega} = \frac{M_y M_\mathrm{d} k_\mathrm{p}}{(2\pi)^2 \hbar^4 k_\mathrm{d}} \sum_S |(\Phi_b, V_b \Psi)|^2 \tag{14.4.33}$$

mit

$$(\Phi_b, V_b \Psi) \equiv \int e^{-i\mathfrak{k}_\mathrm{p}\mathfrak{y}} \chi^*_{1/2 m_\mathrm{p}} \varphi^*_B (V_{\mathrm{p}\xi} + V_{\mathrm{pn}}) \Psi \, d\tau. \tag{14.4.34}$$

Die in (14.4.34) eingehende Wellenfunktion Ψ muß Lösung der Integralgleichung (14.4.25) sein, die die Wechselwirkungsenergien $V_{\mathrm{n}\xi}$, V_{np}, $V_{\mathrm{p}\xi}$ enthält. Für ihre Lösung muß man die analytische Form der Wechselwirkungsenergie und die Wellenfunktionen für die Grundzustände im Deuteron und im Kern A sowie die Wellenfunktionen für die verschiedenen Zustände des Kerns B kennen.

Die Gl. (14.4.33), die den differentiellen Wirkungsquerschnitt der Strippingreaktion bestimmt, ist exakt, wenn man die Coulomb-Wechselwirkung zwischen Proton und Kern nicht berücksichtigt bzw. wenn man annimmt, daß $V_{\mathrm{p}\xi}$ die Coulomb-Wechselwirkung enthält, diese jedoch für Abstände größer als die Abmessungen des Atoms durch die Hüllenelektronen abgeschirmt wird.

Da es außerordentlich schwierig ist, die Integralgleichung (14.4.25) zu lösen, machen wir einige vereinfachende Annahmen. Am einfachsten, gleichzeitig jedoch auch am gröbsten, ist die Näherung für Strippingreaktionen, die durch die Bornsche Näherung vermittelt wird. In der Bornschen Näherung wird die exakte Wellenfunktion des Systems Ψ durch die einfallende Welle Φ_a ersetzt. Nach (14.4.25) ist eine solche Substitution nur im Gebiet außerhalb der Reichweite der Potentiale $V_{\mathrm{n}\xi}$, $V_{\mathrm{p}\xi}$, V_{pn} möglich. Innerhalb dieses Gebietes stellt die Substitution eine zu grobe Näherung dar, obwohl sie, wie das Experiment zeigt, eine qualitativ richtige Beschreibung der Winkelverteilung der Nukleonen bei Strippingreaktionen liefert.

In der Bornschen Näherung nimmt (14.4.33) folgende Form an:

$$\left(\frac{d\sigma_{ba}}{d\Omega}\right)_\mathrm{B} = \frac{M_y M_\mathrm{d} k_\mathrm{p}}{(2\pi)^2 \hbar^4 k_\mathrm{d}} \sum_S |(\Phi_b, V_b \Phi_a)|^2. \tag{14.4.35}$$

Mit Hilfe von (14.4.30) läßt sich schreiben

$$(\Phi_b, V_b \Phi_a) \equiv \int \Phi_b^* (V_{\mathrm{p}\xi} + V_{\mathrm{pn}}) \Phi_a \, d\tau = \int \Phi_b^* (V_{\mathrm{p}\xi} + V_{\mathrm{n}\xi}) \Phi_a \, d\tau. \tag{14.4.36}$$

Die letzte Gleichung ist ein Spezialfall der allgemeineren Gleichung $(\Phi_b, V_b \Phi_a) = (\Phi_b, V_a \Phi_a)$, die im Abschn. 9.4. bewiesen wurde. Setzt man in (14.4.36) noch die expliziten Ausdrücke für die Funktionen des Endzustandes (14.4.16) und des Anfangszustandes (14.4.8) ein, so erhält man

$$(\Phi_b, V_b \Phi_a) = \int e^{-i\mathfrak{k}_p \mathfrak{y}} \chi^*_{1/2 m_p} \varphi^*_{JM} [V_{p\xi} + V_{n\xi}] e^{i\mathfrak{k}_d \mathfrak{r}} f(\varrho) \chi_{1 m_d} \varphi_{jm} d\tau. \quad (14.4.36a)$$

In Gl. (14.4.36a) bedeutet das Integralzeichen wieder gleichzeitig auch Summierung über alle Spinvariablen. Unter Benutzung von (14.4.2) erhält man

$$\mathfrak{k}_q \mathfrak{r} = \mathfrak{Q} \vec{\varrho} + \mathfrak{q}\, \mathfrak{r}_n + \mathfrak{k}_p \mathfrak{y} \quad (14.4.37)$$

mit

$$|\mathfrak{Q}| = \left|\frac{\mathfrak{k}_d}{2} - \mathfrak{k}_p\right| = \sqrt{\left(\frac{k_d}{2} - k_p\right)^2 + 2 k_p k_d \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}, \quad (14.4.38)$$

$$|\mathfrak{q}| = \left|\mathfrak{k}_d - \frac{A}{A+1}\mathfrak{k}_p\right| = \sqrt{\left(k_d - \frac{A}{A+1} k_p\right)^2 + \frac{4A}{A+1} k_p k_d \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}. \quad (14.4.39)$$

Entwickelt man die ebene Welle $e^{i\mathfrak{q}\mathfrak{r}_n}$ nach Kugelfunktionen:

$$e^{i\mathfrak{q}\mathfrak{r}_n} = \sum_{L=0}^{\infty} \sqrt{4\pi(2L+1)}\, i^L j_L(q r_n) Y_{L0}(\vartheta_n),$$

so läßt sich (14.4.36a) folgendermaßen schreiben:

$$(\Phi_b, V_b \Phi_a) = \sum_L i^L \sqrt{4\pi(2L+1)}\, g(Q) (\chi_{1/2 m_p} \varphi_{JM} | F_{L0} | \chi_{1/2 m_d} \varphi_{jm}) \quad (14.4.40)$$

mit

$$F_{L0} \equiv j_L(q r_n)(V_{p\xi} + V_{n\xi}) Y_{L0}(\vartheta_n), \qquad g(Q) = \int e^{iQ\varrho} f(\varrho)\, d\vec{\varrho}.$$

Setzt man die Spinfunktion des Deuterons in der Form

$$\chi_{1m_d} = \sum_{m'} \left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\, m',\, m_d - m' \,|\, 1 m_d\right) \chi_{1/2 m'}(\sigma_p)\, \chi_{1/2,\, m_d - m'}(\sigma_n)$$

ein und berücksichtigt die Orthogonalität der Spinfunktionen des Protons, so wird

$$\begin{aligned}
&(\chi_{1/2 m_p} \varphi_{JM} | F_{L0} | \chi_{1 m_d} \varphi_{jm}) = \\
&\quad = \left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\, m_p,\, m_d - m_p \,|\, 1 m_d\right) (\varphi_{JM} | F_{L0} | \chi_{1/2\, m_d - m_p} \varphi_{jm}) = \\
&\quad = \left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\, m_p,\, m_d - m_p \,|\, 1 m_d\right) \times \\
&\qquad \times \sum_{\lambda = j - 1/2}^{j + 1/2} \left(\frac{1}{2}\, j,\, m_d - m_p,\, m \,|\, \lambda,\, m + m_d - m_p\right) \times \\
&\qquad \times (JM | F_{L0} | \lambda, m + m_d - m_p) = \\
&\quad = \left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\, m_p,\, m_d - m_p \,|\, 1 m_d\right) \times \\
&\qquad \times \sum_{\lambda = j - 1/2}^{j + 1/2} \left(\frac{1}{2}\, j,\, m_d - m_p,\, m \,|\, \lambda,\, m + m_d - m_p\right) \times \\
&\qquad \times (L\lambda,\, 0,\, m + m_d - m_p \,|\, JM) A_L.
\end{aligned} \quad (14.4.41)$$

In dieser Formel müssen auf Grund der Eigenschaften der Vektoradditionskoeffizienten die Bedingungen

$$M = m + m_\mathrm{d} - m_\mathrm{p}, \qquad \left| |J - j| - \frac{1}{2} \right| \leqq L \leqq J + j + \frac{1}{2}$$

erfüllt sein.

Zur Ableitung von (14.4.41) benutzten wir die Beziehung

$$\chi_{1/2\, m_\mathrm{d} - m_\mathrm{p}}\, \varphi_{jm} = \sum_{\lambda = j - 1/2}^{j + 1/2} \left(\frac{1}{2}\, j,\, m_\mathrm{d} - m_\mathrm{p},\, m \,|\, \lambda,\, m_\mathrm{d} - m_\mathrm{p} + m \right) \varphi_{\lambda,\, m_\mathrm{d} + m - m_\mathrm{p}}$$

sowie das Theorem von Wigner und Racah (s. Anhang 1.7.)

$$(JM \,|F_{L_0}|\, \lambda\, m) = (L\, \lambda\, 0\, m \,|\, JM)\, A_L.$$

Dabei hängt das Matrixelement A_L des Operators $j_L(q\, r_\mathrm{n})\, [V_{\mathrm{p}\xi} + V_{\mathrm{n}\xi}]$ nicht von den Quantenzahlen m und M ab. Berücksichtigt man die Coulomb-Wechselwirkung zwischen Proton und Kern nicht, so sind $V_{\mathrm{p}\xi}$ und $V_{\mathrm{n}\xi}$ außerhalb des Kerns gleich Null. Man kann also schreiben

$$A_L = a_L\, j_L(q\, R) \tag{14.4.42}$$

mit a_L als Konstante; R ist der Größenordnung nach gleich dem Kernradius.[1])

Setzt man (14.4.40) in (14.4.35) ein und berücksichtigt (14.4.41), so erhält man

$$\left(\frac{d\sigma_{ba}}{d\Omega} \right)_\mathrm{B} = \frac{M_y\, M_\mathrm{d}\, k_\mathrm{p} (2J + 1)}{\pi\, \hbar^4\, k_\mathrm{d} (2j + 1)} \sum_L g^2\,(Q)\, |A_L|^2. \tag{14.4.43}$$

Benutzt man zur Abschätzung der Größe A_L (14.4.42), so liefert die Gleichung (14.4.43) die gleiche Winkelverteilung der Protonen bei der Reaktion A (d, p) B wie die Gl. (14.3.9).

14.5. Berücksichtigung der Coulomb-Wechselwirkung bei Strippingreaktionen

Eine exakte Berücksichtigung der Coulomb-Wechselwirkung bei Kernreaktionen mit Deuteronen ist mit erheblichen mathematischen Schwierigkeiten verbunden, da Schwerpunkt und Ladungszentrum im Deuteron nicht zusammenfallen. Diese Tatsache führt zur „Polarisation" des Deuterons bei seiner Bewegung im Coulomb-Feld.

Angenähert kann man diese Erscheinung durch die adiabatische Methode in 2 Grenzfällen berücksichtigen:

---

[1]) Strenggenommen muß in (14.4.42) R als von L und q abhängig betrachtet werden, da nach dem Mittelwertsatz das Matrixelement des Operators $j_L(q\, r_\mathrm{n})\, [V_{\mathrm{p}\xi} + V_{\mathrm{n}\xi}]$ in der Form (14.4.42) dargestellt werden kann, wenn jedem L eindeutig ein Wert $q\, R$ zugeordnet wird. Meist nimmt man an, daß die Abhängigkeit zwischen R, q und L vernachlässigt werden kann.

a) Fall langsamer Deuteronen, d. h. von Deuteronen, deren Geschwindigkeit im COULOMB-Feld klein gegen die innere Geschwindigkeit der Nukleonen im Deuteron ist;

b) Fall schneller Deuteronen, d. h. von Deuteronen, deren Geschwindigkeit im COULOMB-Feld die innere Geschwindigkeit der Nukleonen in Deuteronen wesentlich übersteigt.

Im ersten Fall läßt sich die Wellenfunktion des Deuterons in folgender Form darstellen:

$$\psi_d(\mathfrak{r}_p, \mathfrak{r}_n) = F(\mathfrak{r})\, f(\mathfrak{r}, \vec{\varrho}) \tag{14.5.1}$$

mit

$$\mathfrak{r} = \frac{\mathfrak{r}_p + \mathfrak{r}_n}{2}, \quad \vec{\varrho} = \mathfrak{r}_p - \mathfrak{r}_n.$$

$F(\mathfrak{r})$ beschreibt die Bewegung des Schwerpunktes des Deuterons, und $f(\mathfrak{r}, \vec{\varrho})$ ist die Wellenfunktion für die innere Bewegung im Deuteron unter Berücksichtigung des Wechselwirkungspotentials

$$Z e^2 \left(\frac{1}{\left| \mathfrak{r} + \frac{\vec{\varrho}}{2} \right|} - \frac{1}{r} \right),$$

das die Differenz der COULOMB-Energie für die Punkte, in denen sich das Proton und der Schwerpunkt des Deuterons befinden, darstellt. Diese potentielle Energie ändert die innere Bewegung im Deuteron etwas. In nullter Näherung kann die Änderung vernachlässigt und (14.5.1) durch die Wellenfunktion

$$\Psi_d(\mathfrak{r}_p, \mathfrak{r}_n) = F(\mathfrak{r})\, f(\vec{\varrho}) \tag{14.5.1a}$$

ersetzt werden.

Für schnelle Deuteronen kann man von der Annahme ausgehen, daß ihre Bewegung im COULOMB-Feld bei fixierter Orientierung vor sich geht, und die Wellenfunktion in der Form

$$\Psi_d(\mathfrak{r}_p, \mathfrak{r}_n) = F(\mathfrak{r}_p)\, f(\vec{\varrho})$$

wählen. Dabei beschreibt $F(\mathfrak{r}_p)$ die Bewegung eines Teilchens im COULOMB-Feld, wenn dieses Teilchen die Masse des Deuterons besitzt und sich am Ort des Protons befindet. Eine solche Näherung wurde von SERBER [14,19] und PEASLEE [14,20] zur Berechnung des totalen Wirkungsquerschnitts für Strippingreaktionen verwendet.

Den Einfluß der COULOMB-Wechselwirkung auf die Winkelverteilung in der nullten Näherung durch (14.5.1a) berücksichtigten FRIEDMAN und TOBOCKMAN [14,13] sowie YOCCOZ [14,21]. Die ebenen Wellen, die die Bewegung von Deuteron und Proton (ohne Berücksichtigung der COULOMB-Wechselwirkung) außerhalb des Kerns beschreiben, wurden durch die Wellenfunktionen für die Bewegung dieser Teilchen im COULOMB-Feld ersetzt. Die übrigen vereinfachenden Annahmen waren den von BUTLER angenommenen äquivalent. Die Rechnungen wurden für den Fall der Reaktion $^9Be(d, n)^{10}B$ bei einer Deuteronenenergie von 0,94 MeV im Laborsystem durchgeführt. Dabei nahm

man $R \approx 5 \cdot 10^{-13}$ cm an. Wie sich zeigte, verkleinert der Effekt der COULOMB-Wechselwirkung den Wirkungsquerschnitt beim Einfang eines Protons mit dem Bahndrehimpuls $l = 0$ um etwa den Faktor 12 und beim Einfang eines Protons mit dem Bahndrehimpuls $l = 1$ bzw. 2 um sieben- bzw. sechsmal. Außerdem führt die COULOMB-Wechselwirkung zu einer Abflachung der Maxima und Minima in der Winkelverteilung. Der erhebliche Einfluß des COULOMB-Feldes ist auf die geringe Energie der einfallenden Deuteronen zurückzuführen.

Für Energien größer als die Höhe des COULOMB-Walls ($\varepsilon_0 > Z_A e^2/R \approx \approx Z_A A^{-1/3}$ [MeV]) beeinflußt die COULOMB-Wechselwirkung den Verlauf nur noch schwach.

Im anderen Grenzfall bei sehr niedrigen Deuteronenenergien

$$\varepsilon_0 < \frac{Z_A e^2}{R}$$

hängt die Winkelverteilung der emittierten Teilchen für schwere Kerne nur schwach vom übertragenen Bahndrehimpuls ab. Dies wurde von TER-MARTIROSJAN [14,22] gezeigt. In diesem Fall wird die Winkelverteilung im wesentlichen durch das COULOMB-Feld des Kerns bestimmt. Die aus der Reaktion A (d, p) B erhaltenen Protonen werden hauptsächlich in Rückwärtsrichtung emittiert.

14.6. Polarisation der emittierten Nukleonen bei Strippingreaktionen

Geht in das Potential der Nukleon-Kern-Wechselwirkung die Spin-Bahn-Kopplung ein, so läßt sich zeigen, daß die bei der Strippingreaktion emittierten Nukleonen z. T. polarisiert sind.

Die Protonenpolarisation bei Strippingreaktionen wurde in den theoretischen Arbeiten von NEWNS [14,23], HOROWITZ und MESSIAH [14,24] sowie von CHESTON [14,25] untersucht. NEWNS nimmt an, daß der Kern die Neutronen vollständig absorbiert. In der Theorie von HOROWITZ und MESSIAH ersetzte man die Wechselwirkung zwischen Proton und Kern durch ein abstoßendes Potential mit bestimmter Reichweite. Beide Theorien führten zu Polarisationen, die dem Vorzeichen nach nicht mit der im Experiment beobachteten Polarisation übereinstimmen. Das richtige Vorzeichen für die Nukleonenpolarisation bei Strippingreaktionen wurde erst von CHESTON [14,25] erhalten. CHESTON beschreibt die Wechselwirkung zwischen emittiertem Nukleon und Kern durch ein komplexes anziehendes Potential mit Spin-Bahn-Kopplung, das wir (vgl. Abschn. 8.13.) bei der theoretischen Beschreibung von Polarisationsprozessen in der Streuung von Nukleonen mittlerer Energie an Kernen verwendet haben.

Wir untersuchen den Polarisationseffekt für Protonen bei der Strippingreaktion A (d, p) B für den einfachsten Fall, daß der Spin des Kerns A gleich Null ist. Der Einfachheit halber berücksichtigen wir die COULOMB-Wechselwirkung nicht. Die Wellenfunktion für den Anfangszustand des

Systems, d. h. für den Grundzustand des Kerns A und die Relativbewegung von Deuteron und Kern A, kann in folgender Form geschrieben werden:

$$\Phi_a(k_d, m_d) = \Psi_A(\xi) \sum_{m'_p} \left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,m'_p, m_d - m'_p \middle| 1\, m_d\right) \chi_{1/2\, m'_p}(\sigma_p)\, \chi_{1/2\, m_d - m'_p}(\sigma_n) \times$$
$$\times \sum_{l_d} \psi_{l_d}(\mathfrak{r}_p, \mathfrak{r}_n). \qquad (14.6.1)$$

Die Koordinaten $\mathfrak{r}_p$ und $\mathfrak{r}_n$ werden vom Schwerpunkt des Kerns A aus abgetragen, der bei genügend schwerem Kern mit dem Schwerpunkt des Gesamtsystems zusammenfällt. Der Einfluß des Kerns auf die ebene Welle, die die Relativbewegung von Kern und Deuteron beschreibt, läßt sich durch die Bedingung

$$\Phi_a(\mathfrak{k}_d, m_d) = 0 \quad \text{für} \quad \frac{|\mathfrak{r}_p + \mathfrak{r}_n|}{2} \leqq R \qquad (14.6.2)$$

für die Funktion Φ_a berücksichtigen. Die Wellenfunktion des Endzustandes ohne Berücksichtigung der Wechselwirkung von Proton und Kern B hat die Form

$$\Phi_b = e^{i \mathfrak{k}_p \mathfrak{r}_p}\, \chi_{1/2\, m_p}(\sigma_p)\, \Psi_B(\xi, r_n, \sigma_n). \qquad (14.6.3)$$

Wir nehmen weiter an, daß die Wellenfunktion Ψ_B für den Endkern B, der sich durch Einfang eines Neutrons aus dem Kern A bildet, einem Bewegungszustand des Neutrons mit vollständig bestimmtem Bahndrehimpuls L entspricht. Dann gilt

$$\Psi_B(\xi, r_n, \sigma_n) \equiv \Psi_{JM} = \Psi_A(\xi) \sum_{m_L} \left(L \frac{1}{2} m_L, M - m_L \middle| J M\right) \varphi_{L m_L}(r_n)\, \chi_{1/2, M - m_L}(\sigma_n). \qquad (14.6.4)$$

Der differentielle Wirkungsquerschnitt für die Strippingreaktion ist dem Quadrat des Matrixelements $(\Phi_b, V_b\, \Omega_a\, \Phi_a)$ proportional, das in der Bornschen Näherung $(\Omega_a = 1)$ in das Matrixelement

$$(\Phi_b, V_b\, \Phi_a), \qquad V_b = V_{p\xi} + V_{np} \qquad (14.6.5)$$

übergeht.

Wir wählen das Koordinatensystem x, y, z so, daß die Quantelungsachse z senkrecht auf der Streuebene steht, d. h. in der Richtung des Vektorprodukts $[\mathfrak{k}_p\, \mathfrak{k}_d]$ liegt. Den Polarisationsgrad der Protonen in Richtung der z-Achse definieren wir durch die Beziehung

$$P_z = \frac{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_+ - \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_-}{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_+ + \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_-}. \qquad (14.6.6)$$

Dabei bedeuten $(d\sigma/d\Omega)_+$ und $(d\sigma/d\Omega)_-$ die differentiellen Streuquerschnitte für Protonen mit einer Polarisation parallel $(m_p = 1/2)$ bzw. antiparallel $(m_p = -1/2)$ zur z-Achse. Die maximale Polarisation entspricht dem Wert $P_z = \pm 1$.

Setzt man (14.6.1) und (14.6.3) in (14.6.5) ein, so erhält man

$$(\Phi_b, V_b \Phi_a) = \sum_{m'_p, l_d} \left(L \tfrac{1}{2}, M - m_d + m'_p, m_d - m'_p \mid J M\right) \times \times \left(\tfrac{1}{2} \tfrac{1}{2} m'_p, m_d - m'_p \mid 1 m_d\right) \times \times \left(\varphi_{L, M-m_d+m'_p} e^{i\mathfrak{k}_p \mathfrak{r}_p} \chi_{1/2 m_p}(\sigma_p) \mid \overline{V}_b \mid \chi_{1/2 m'_p}(\sigma_p)\, \psi_{l_d}(\mathfrak{r}_p, \mathfrak{r}_n)\right) \tag{14.6.7}$$

mit

$$\overline{V}_b = \left(\Psi_A(\xi) \mid V_{p\xi} + V_{pn} \mid \Psi_A(\xi)\right) \equiv \overline{V}_{p\xi} + V_{pn}. \tag{14.6.7a}$$

Das mittlere Wechselwirkungspotential von Proton und Kern A läßt sich nach dem optischen Modell durch das Potential

$$\overline{V}_{p\xi} = \begin{cases} -V_0(1 + i\zeta) - a\,\hat{\mathfrak{l}}\,\hat{\mathfrak{s}} & \text{für } r_p \leqq R; \\ 0 & \text{für } r_p > R \end{cases} \tag{14.6.8}$$

ersetzen. Bei $r_p > R$ kann die Wirkung des Potentials $\overline{V}_{p\xi}$ auf die Protonenwellenfunktion durch die Substitution

$$e^{i\mathfrak{k}_p \mathfrak{r}_p} \chi_{1/2 m_p}(\sigma_p) \to \sum_{l, j} i^l \sqrt{4\pi(2l+1)} \left(l \tfrac{1}{2} 0\, m_p \mid j\, m_p\right) \Phi_{l j m_p} \times \times \{j_l(k_p r_p) - \beta_{lj} h_l(k_p r_p)\} \tag{14.6.9}$$

ersetzt werden. Dabei bedeuten Φ_{ljm_p} die Spinwinkelfunktion für das Proton, $j_l(k_r)$ und $h_l(k_r)$ sphärische Bessel- bzw. Hankel-Funktionen und β_{lj} komplexe Zahlen, die mit der Streumatrix S_{lj} für die Streuung des Protons mit dem Bahndrehimpuls L und dem Gesamtdrehimpuls j am Kern A beim Wechselwirkungspotential (14.6.8) verknüpft sind. Da in (14.6.8) für $l \neq 0$ eine Spin-Bahn-Wechselwirkung vorhanden ist, müssen die 2 Werte von β_{lj} für die beiden möglichen Spinorientierungen des Protons $j = l \pm 1/2$ voneinander unterschieden werden. Werden bei der Reaktion A (d, p) B Protonen mit $l = 0$ emittiert, so tritt keine Polarisation auf.

Führt man die Substitution (14.6.9) durch, so braucht man im Matrixelement (14.6.7) nur das Wechselwirkungspotential V_{np} zu berücksichtigen. Nimmt man weiterhin an, daß dieses Potential die Reichweite 0 besitzt, und macht man gewisse Annahmen über die Abhängigkeit der Neutronenwellenfunktion im Kern, so ergibt sich nach Cheston [14,25] der Polarisationsgrad P_z zu -17% für Protonen der Reaktion ^{12}C (d, p) ^{13}C unter einem Winkel von 30° zur Richtung des Deuteronenstrahls bei einer Deuteronenenergie von 3,20 MeV. Der experimentelle Wert für 4-MeV-Deuteronen beträgt $P_z = -58 \pm 13\%$ [14,26].

KAPITEL 15

THEORIE DER KERNREAKTIONEN BEI HOHEN ENERGIEN

15.1. Schatten- oder Diffraktionsstreuung

Bei gewissen Werten der Relativenergie (< 50 MeV) von Neutron und Kern wird das Neutron vom Kern absorbiert. In diesem Fall läßt sich die Wechselwirkung zwischen Neutron und Kern angenähert durch das Modell des schwarzen Körpers beschreiben.

Die Absorption eines Neutrons durch den Kern führt zu einer Störung der einfallenden Welle, die eine zusätzliche elastische Streuung hervorruft. Diese ist nicht mit der Bildung eines Compoundkerns assoziiert und für Neutronen mit Wellenlängen klein gegen die Abmessungen des Kerns der Lichtbeugung an einer schwarzen Kugel analog. Man bezeichnet sie als *Diffraktionsstreuung*, *Beugungsstreuung* oder *Schattenstreuung* [15,1]. Die elementare Theorie dieser Erscheinung wurde schon im Abschn. 8.7. betrachtet.

Zur Klärung der hauptsächlichen Eigenschaften der Diffraktionsstreuung nehmen wir an, daß ein Strahl von Neutronen mit dem Wellenvektor $\mathfrak{k}$ auf einen absolut schwarzen Kern vom Radius R fällt. Wir wählen die z-Achse des Koordinatensystems (im Koordinatenursprung befindet sich der Kern) in Richtung des Wellenvektors $\mathfrak{k}$ der einfallenden Welle. Die Richtung der elastischen Streuung ist dann durch die Projektionen des Wellenvektors der gestreuten Welle $\mathfrak{k}'$ auf die x- und y-Achse eindeutig bestimmt. So bestimmt sich z. B. der Streuwinkel aus der Gleichung

$$\sin\vartheta = \frac{\sqrt{(k_x')^2 + (k_y')^2}}{\sqrt{\mathfrak{k}^2}}.$$

Nach Achijeser und Sitenko [15,2] betrachten wir nur die Werte der Wellenfunktionen für die freie Bewegung von Neutronen in der Ebene $z = 0$. Weiterhin führen wir das Funktionensystem

$$\psi_q(\vec{\varrho}) = L^{-1}\, e^{i q \vec{\varrho}} \tag{15.1.1}$$

ein, wobei $\mathfrak{q}, \vec{\varrho}$ Vektoren in der Ebene $z = 0$ sind, so daß

$$\mathfrak{q}\vec{\varrho} = k_x' \varrho_x + k_y' \varrho_y$$

gilt. Es wird angenommen, daß die Funktionen (15.1.1) in einem genügend großen Quadrat mit der Seitenlänge L durch die Bedingung

$$\int_L \psi_{q'}^*(\varrho)\, \psi_q(\varrho)\, d\varrho = \delta_{q'q} \tag{15.1.2}$$

orthonormiert sind und daß sie auf den übrigen Teil der Ebene $z = 0$ durch die Periodizitätsbedingung

$$\psi_q(\varrho_x, \varrho_y) = \psi_q(\varrho_x + L, \varrho_y) = \psi_q(\varrho_x, \varrho_y + L)$$

fortgesetzt sind. Auf Grund dieser Beziehung nimmt der Vektor $\mathfrak{q}$ die diskreten Werte $q_x = \frac{2\pi}{L} n_x$, $q_y = \frac{2\pi}{L} n_y$ an; n_x und n_y sind beliebige ganze Zahlen.

Den einfallenden Neutronen entspricht in der Ebene $z = 0$ eine Wellenfunktion $\psi_0 = L^{-1}$. Die Wellenfunktionen der gestreuten Welle erhält man aus ψ_0, wenn man auf ψ_0 mit dem Operator

$$\omega = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad \varrho \leqq R, \\ 1 & \text{für} \quad \varrho > R \end{cases}$$

wirkt, da die Anwesenheit des schwarzen Kerns die Wellenfunktion ψ_0 im Kreis mit dem Radius R zu Null macht. Wir zerlegen nun die gestreute Welle $\omega\,\psi_0$ nach den Wellenfunktionen $\psi_q(\vec{\varrho})$:

$$\omega\,\psi_0 = \sum_q a_q\,\psi_q(\vec{\varrho})\,. \tag{15.1.3}$$

Damit läßt sich die Wahrscheinlichkeit für Diffraktionsstreuung in die vom Wellenvektor $\mathfrak{q}$ festgelegte Richtung im Intervall $\mathfrak{q}, \mathfrak{q} + d\mathfrak{q}$ in der Form

$$dw = |a_q|^2 \frac{L^2\, d\mathfrak{q}}{(2\pi)^2}$$

darstellen. Der entsprechende differentielle Streuquerschnitt im Raumwinkel $d\Omega$ beträgt dann

$$d\sigma = |a_q|^2 \frac{L^4\, k^2\, d\Omega}{(2\pi)^2}\,. \tag{15.1.4}$$

Weiterhin folgt aus (15.1.3) wegen der Orthogonalität der Funktionen (15.1.1)

$$\begin{aligned} a_{q \neq 0} &= \int \omega\,\psi_0\,\psi_q^*\, d\vec{\varrho} = \\ &= -\int (1-\omega)\,\psi_0\,\psi_q^*\, d\vec{\varrho} = \\ &= -\frac{1}{L^2}\int_0^R\int_0^{2\pi} e^{-iq\varrho\cos\varphi}\,\varrho\, d\varrho\, d\varphi = -\frac{2\pi}{L^2}\int_0^R J_0(q\,\varrho)\,\varrho\, d\varrho\,, \end{aligned}$$

wobei

$$J_0(q\,\varrho) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp(i\,q\,\varrho\cos\varphi)\, d\varphi$$

die Bessel-Funktion nullter Ordnung bedeutet. Verwendet man die bekannte Beziehung aus der Theorie der Bessel-Funktionen

$$\int_0^R J_0(q\,\varrho)\,\varrho\, d\varrho = \frac{R\, J_1(R\,q)}{q}\,,$$

wobei $J_1(R\,q)$ die BESSEL-Funktion 1. Ordnung bedeutet, so erhält man

$$a_q = -\frac{2\pi}{L^2} R \frac{J_1(q\,R)}{q}.$$

Setzt man dies in (15.1.4) ein und berücksichtigt $q = k \sin\vartheta$, so ergibt sich für den Wirkungsquerschnitt für Diffraktionsstreuung

$$d\sigma = R^2 \frac{J_1(k\,R \sin\vartheta)}{\sin^2\vartheta} d\Omega. \tag{15.1.5}$$

Der Wirkungsquerschnitt (15.1.5) nimmt ein Maximum bei $k\,R \sin\vartheta = 0$ an und geht danach mit wachsendem Argument $k\,R \sin\vartheta$ oszillierend schnell gegen Null. Schon bei $k\,R \sin\vartheta = 1{,}22\,\pi$ wird der Wirkungsquerschnitt $d\sigma$ das erste Mal gleich Null. Infolgedessen ist der Wirkungsquerschnitt (15.1.5) für Diffraktionsstreuung bei $k\,R \equiv R/\lambda\!\!\!^{-} > 1$ durch eine starke Vorwärtsanisotropie gekennzeichnet. Die Diffraktionsstreuung ist im wesentlichen nur im Gebiet kleiner Winkel $\vartheta < 1{,}22\,\pi/k\,R$ von Null verschieden. Man kann also $\sin\vartheta \approx \vartheta$ setzen und daher schreiben

$$d\sigma = R^2 \frac{J_1^2(k\,R\,\vartheta)}{\vartheta^2} d\Omega. \tag{15.1.5a}$$

Wir bestimmen nun den totalen Wirkungsquerschnitt für Diffraktionsstreuung. Dazu ist (15.1.5) über alle Winkel zu integrieren:

$$\sigma = R^2 \int \frac{J_1^2(k\,R \sin\vartheta)}{\sin^2\vartheta} d\Omega.$$

Da bei $k\,R \gg 1$ nur Winkel $\vartheta \approx 0$ einen wesentlichen Beitrag liefern, kann man $\sin\vartheta$ durch sein Argument ϑ ersetzen und als obere Integrationsgrenze ∞ annehmen. Damit wird

$$\sigma = 2\pi\,R^2 \int_0^\infty \frac{J_1^2(x)}{x} dx = \pi\,R^2, \qquad k\,R \gg 1.$$

Absorbiert also der Kern Neutronen mit Wellenlängen klein gegen seine Abmessungen, so geht eine zusätzliche elastische Streuung um kleine Winkel vor sich. Der totale Querschnitt dieser Diffraktionsstreuung ist gleich der Fläche des Kernquerschnitts.

Bei der Absorption von schnellen geladenen Teilchen (Protonen u. a.) durch den Kern beobachtet man ebenfalls eine Diffraktionsstreuung. Die Theorie dieser Erscheinung wurde von ACHIJESER und POMERANTSCHUK [15,3] untersucht. Weil man in diesem Fall die COULOMB-Wechselwirkung berücksichtigen muß, wird die Theorie der Diffraktionsstreuung von geladenen Teilchen an Kernen äußerst kompliziert. Wir geben hier nur die wesentlichsten Resultate an. Zum genaueren Studium verweisen wir auf die oben erwähnte Originalarbeit von ACHIJESER und POMERANTSCHUK sowie auf die Übersichtsarbeit [15,4].

Da die COULOMB-Kräfte große Reichweite besitzen, tritt COULOMB-Streuung auch beim Vorbeifliegen eines geladenen Teilchens in großem Abstand vom Kern auf, wenn dieses Teilchen also nicht vom Kern eingefangen werden

kann. Bei sehr kleinen Winkeln, die einem Vorbeifliegen in großen Abständen vom Kern entsprechen, muß die Streuung also nur COULOMB-Charakter besitzen.

Bei der Streuung von schnellen geladenen Teilchen, deren Wellenlänge klein gegen die Kernabmessungen ist, kann man quasiklassische Berechnungsmethoden anwenden, d. h., man kann die Bewegung der Teilchen an Hand ihrer Bahnen berechnen. Für eine Absorption des Teilchens muß der kürzeste Abstand zwischen Kern und Teilchen r_0 kleiner als der Kernradius R sein; r_0 ist mit dem Stoßparameter b durch die Beziehung

$$r_0 = \frac{b}{\sqrt{1 - \frac{Z e^2}{r_0 E}}}$$

verknüpft. Dabei bedeutet E die Energie des einfallenden Teilchens. Die notwendige Bedingung für Absorption $r_0 < R$ lautet somit

$$b \leqq R \sqrt{1 - \frac{Z e^2}{R E}}. \tag{15.1.6}$$

Der Stoßparameter für Teilchen mit dem Bahndrehimpuls l wird in der quasiklassischen Näherung durch die Beziehung $b = l/k = l \lambda$ bestimmt. Damit folgt aus (15.1.6), daß die Absorption von Protonen mit bestimmtem Bahndrehimpuls nur unter der Bedingung

$$l \leqq l_0, \qquad l_0 = \frac{R}{\lambda} \sqrt{1 - \frac{Z e^2}{R E}}$$

möglich ist. Für schwere Kerne und Protonen mit der Energie 15 MeV gilt $l_0 \approx 4$, für Protonen mit der Energie 25 MeV $l_0 \approx 5$.

Auf Grund der Diffraktionsstreuung unterscheidet sich die elastische Streuung schneller geladener Teilchen an absorbierenden Kernen von der reinen COULOMB-Streuung (RUTHERFORD-Streuung).

Bei $\eta = Z e^2/\hbar v \ll 1$ erhält man reine COULOMB-Streuung für Winkel, die im Vergleich mit $\sqrt{2\eta}/l_0$ sehr klein sind. Bei $\vartheta = \sqrt{2\eta}/l_0$ fallen die Amplituden der COULOMB- und Diffraktionsstreuung größenordnungsmäßig zusammen. Bei $1 \gg \vartheta \gg \sqrt{2\eta}/l_0$ überwiegt die Diffraktionsstreuung, wobei der elastische Streuquerschnitt von Protonen etwa gleich dem Streuquerschnitt für schnelle Neutronen ist.

Bei $\eta = Z e^2/\hbar v \gg 1$ und kleinen Winkeln $\vartheta \ll 2\eta/l_0$ trägt die Streuung reinen COULOMB-Charakter, im Winkelgebiet $2\eta/l_0 \ll \vartheta \ll 1$ im wesentlichen Diffraktionscharakter. Bei $\vartheta \approx 2\eta/l_0$ ist die Amplitude für COULOMB-Streuung etwa um $\sqrt{\eta}$ größer als die Amplitude für Diffraktionsstreuung.

Die Diffraktionsstreuung ist eine notwendige Folge aller Prozesse, die mit einer teilweisen Absorption von Teilchen im ursprünglichen Strahl verknüpft sind. Außer in den bereits zitierten Arbeiten wurde die allgemeine Theorie der Diffraktionsstreuung von LANDAU und POMERANTSCHUK [15,5] sowie von POMERANTSCHUK und FEINBERG [15,6] entwickelt.

Wie FEINBERG [15,7], ACHIJESER und SITENKO [15,8] sowie GLAUBER [15,9] zeigten, muß neben der Diffraktionsstreuung schneller Deuteronen (30 bis 300 MeV) an schweren Kernen neben der rein elastischen Streuung auch noch eine Diffraktionsspaltung des Deuterons in Proton und Neutron auftreten. Dieser eigentümliche Prozeß verläuft außerhalb des Kerns. Bei der Diffraktionsstreuung erhält das Deuteron einen kleinen zusätzlichen Impuls, der dem Deuteron durch Rückstoß übertragen wird und die Aufspaltung des Deuterons in Proton und Neutron hervorrufen kann.

Nimmt man an, daß der Kern absolut schwarz ist, so drückt sich der Wirkungsquerschnitt für die elastische Diffraktionsstreuung von Deuteronen an Kernen, deren Radius R den Deuteronenradius R_d wesentlich übersteigt, durch die Beziehung

$$\sigma_\mathrm{el} = \pi R^2 + \frac{2\pi}{3}(1 - \ln 2)\, R\, R_\mathrm{d}, \qquad R_\mathrm{d} \ll R$$

aus. Der Wirkungsquerschnitt für die Diffraktionsspaltung lautet

$$\sigma_\mathrm{sp} = \frac{\pi}{3}\left(2\ln 2 - \frac{1}{2}\right) R\, R_\mathrm{d}, \qquad R_\mathrm{d} \ll R.$$

Der totale Querschnitt aller Prozesse einschließlich der Absorptionsreaktionen, der Strippingreaktion usw. lautet dann

$$\sigma_t = 2\pi R^2 + \pi R\, R_\mathrm{d}, \qquad R_\mathrm{d} \ll R.$$

15.2. Das optische Modell für die Wechselwirkung schneller Nukleonen mit Kernen

Das optische Modell für die Untersuchung der Wechselwirkung von Kernen mit Nukleonen großer Energien wurde zuerst von FERNBACH, SERBER und TAYLOR [15,10] angewandt.

Unter großen Energien verstehen wir solche Energien der Relativbewegung von Nukleon und Kern, bei denen die Wellenlänge $\lambda\!\!\!^-$ klein gegen den Kernradius R ist. Diese Bedingung ist für Neutronen mit Energien der Größenordnung 100 MeV erfüllt.

Im optischen Modell betrachtet man den Kern als homogenes Medium mit einem Brechungsindex und einem Absorptionskoeffizienten. Da bei großen Energien die Wellenlänge des Nukleons kleiner als die Kernabmessungen ist, kann man die Bewegung des Nukleons quasiklassisch betrachten und einen „Eintrittsort" des Nukleons in den Kern sowie die „Bahn" des Nukleons innerhalb des Kerns usw. definieren. Die Welleneigenschaften lassen sich in diesem Fall durch eine Untersuchung der Beugungserscheinungen für die entsprechenden Wellen am Kern berücksichtigen. Die Vorstellung über eine Bahnbewegung des Nukleons im Kern gestattet, die Phasenänderung der einfallenden Welle für jede mögliche Bahn zu berechnen und die Gesamtphasenänderung als geometrische Summe der Phasenänderungen auf den einzelnen Bahnen zu bestimmen. Daraus läßt sich auch der Streuquerschnitt berechnen.

Charakterisiert man die Kernmaterie durch den komplexen Brechungsindex

$$n = \mu + i\frac{\varkappa}{2k}, \tag{15.2.1}$$

so nimmt die ebene Welle $\exp(i\,k\,z)$ nach dem Durchgang durch eine Kernmaterieschicht der Dicke Δz folgende Form an:

$$\Psi = S(\Delta z)\exp\{i\,k(z + \Delta z)\}. \tag{15.2.2}$$

Dabei ist

$$S(\Delta z) = \exp\left\{\left[i\,k(\mu - 1) - \frac{\varkappa}{2}\right]\Delta z\right\} \tag{15.2.2a}$$

gesetzt; $\varkappa$ bedeutet den Absorptionskoeffizienten für die Absorption von Nukleonen durch die Kernmaterie und bestimmt diejenige Strecke $z_0 \equiv 1/\varkappa$, nach deren Durchlaufen die Nukleonenwellen um den Faktor e an Intensität verlieren.

Der elastische Streuquerschnitt für eine Kernmaterieschicht der Dicke Δz und der Fläche df beträgt

$$d\sigma_e = \left|1 - \int S(\Delta z)\right|^2 df.$$

Für den Reaktionsquerschnitt gilt

$$d\sigma_r = (1 - |S(\Delta z)|^2)\,df.$$

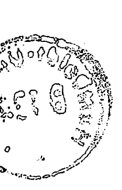
Die totalen Querschnitte für elastische Streuung und Reaktionen erhält man aus diesen Ausdrücken durch Integration über das gesamte, auf dem Wege des Nukleons befindliche Hindernis. Wenn das Hindernis ein Kern mit dem Radius R ist, gilt $df = 2\pi\,\varrho\,d\varrho$, $\Delta z = 2\xi$ mit $\xi^2 = R^2 - \varrho^2$. Vernachlässigt man die Reflexion und die Brechung der Neutronenwelle beim Durchgang durch die Kernoberfläche (diese Effekte sind klein), so erhält man

$$\begin{aligned}\sigma_r &= 2\pi\int_0^R \{1 - \exp(-2\varkappa\,\xi)\}\,\varrho\,d\varrho = \\ &= 2\pi\int_0^R \{1 - \exp(-2\varkappa\,\xi)\}\,\xi\,d\xi = \\ &= \pi R^2\left\{1 - \frac{1 - (1 - 2q)\,\mathrm{e}^{-2q}}{2q^2}\right\}, \qquad q \equiv \varkappa R.\end{aligned} \tag{15.2.3}$$

Ebenso läßt sich der Querschnitt für elastische Streuung berechnen:

$$\begin{aligned}\sigma_e &= 2\pi\int_0^R |1 - \exp\{[2i\,k(\mu - 1) - \varkappa]\,\xi\}|^2\,\varrho\,d\varrho = \\ &= \pi R^2\left\{1 + \frac{1 - (1 + 2q)\,\mathrm{e}^{-2q}}{2q^2} + \frac{4(p^2 - q^2)}{(p^2 + q^2)^2} - \right. \\ &\left. - 4\mathrm{e}^{-q}\left[\frac{p^2 - q^2 - q\,(p^2 + q^2)}{(p^2 + q^2)^2}\cos p + \frac{p\,(p^2 + q^2 + 2q)}{(p^2 + q^2)^2}\sin p\right]\right\},\end{aligned} \tag{15.2.4}$$

$$q \equiv \varkappa\,R, \qquad p \equiv 2k(\mu - 1)\,R.$$



Zur Berechnung der Winkelverteilung bestimmt man die Streuamplitude:

$$A(\vartheta) = \frac{i}{2k} \sum_{l=0}^{l+1/_2 \leq kR} (2l+1)\left(1 - \exp\{[2ik(\mu-1) - \varkappa]\,\xi\}\right) P_l(\cos\vartheta). \quad (15.2.5)$$

Setzt man hierin $l + 1/_2 = k\varrho$ und benutzt bei kleinen ϑ und großen l die Beziehung $P_l(\cos\vartheta) = J_0(k\varrho\sin\vartheta)$, so kann man von der Summe zum Integral übergehen:

$$A(\vartheta) = i\,k\int_0^R \{1 - \exp[2i\,k(\mu-1) - \varkappa]\,\xi\}\,J_0(k\varrho\sin\vartheta)\,\varrho\,d\varrho.$$

Im allgemeinen Fall läßt sich dieses Integral nicht ohne weiteres berechnen. Für die Streuung in Vorwärtsrichtung erhält man jedoch leicht

$$A(0) = \frac{i\,k\,R^2}{2}\left\{1 + \frac{2(p-iq)^2[1-(1+q-ip)\exp(-q+ip)]}{(q^2+p^2)^2}\right\},$$

$$q \equiv \varkappa R, \qquad p \equiv 2k(\mu-1)R.$$

Der Brechungsindex μ wurde in der Arbeit [15,10] durch die Beziehung

$$\mu = \sqrt{1 + \frac{V}{\varepsilon}} \quad (15.2.6)$$

definiert, wobei V die Tiefe des Potentialtopfes (gleich der Summe aus der Bindungsenergie des Neutrons und der Nukleonenenergie an der FERMI-Oberfläche) und $\varepsilon = \hbar^2 k^2/2M$ die Energie der Relativbewegung von Neutron und Kern bedeuten.

Von JASTROW [15,11] wurde vorgeschlagen, den Brechungsindex μ mit den Streuamplituden A_{nn} und A_{np} durch die Beziehung

$$\mu = 1 + \frac{4\pi}{k^2}\,\frac{N_1}{A}\left(Z\,A_{\mathrm{np}} + (A-Z)\,A_{\mathrm{nn}}\right) \quad (15.2.6\,\mathrm{a})$$

zu verknüpfen. Die Gl. (15.2.6a) kann man durch einfache Verallgemeinerung der Gl. (12.7.5a) erhalten.

Betrachtet man als Absorption einen beliebigen Stoß des einfallenden Nukleons mit einem der Kernnukleonen, so kann der Absorptionskoeffizient für Neutronen $\varkappa$ aus den Wirkungsquerschnitten für die Streuung von Neutronen an Neutronen σ_{nn} und von Neutronen an Protonen σ_{np} nach der Relation

$$\varkappa = N_1\,\frac{Z\,\sigma_{\mathrm{np}} + (A-Z)\sigma_{\mathrm{nn}}}{A} \quad (15.2.7)$$

berechnet werden. Dabei bedeutet N_1 die Nukleonenanzahl in der Volumeneinheit des Kerns. Wegen des PAULI-Prinzips, das die Anzahl der möglichen Zustände nach der Streuung begrenzt, müssen sich die in (15.2.7) eingehenden Werte σ_{np} und σ_{nn} im Vergleich zur Streuung an freien Nukleonen bei Neutronenenergien ≈ 100 MeV um $15 \cdots 30\%$ verkleinern.

Um die experimentellen Werte für die Wirkungsquerschnitte bei der Streuung von 84-MeV-Neutronen zu erklären, ist in den Gln. (15.2.3) und (15.2.4) $R = 1{,}37 \cdot 10^{-13} A^{1/3}$ [cm], $(\mu - 1)\,k = 3{,}3 \cdot 10^{12}\ \mathrm{cm}^{-1}$ und



$\varkappa = 2{,}2 \cdot 10^{12}\,\text{cm}^{-1}$ zu setzen. Der $\varkappa$-Wert entspricht einer mittleren freien Weglänge des Neutrons in Kernmaterie von $\Lambda = 4{,}5 \cdot 10^{-13}$ cm. Der Wert $(\mu - 1)\,k = 3{,}3 \cdot 10^{-12}\,\text{cm}^{-1}$ entspricht nach (15.2.6) einer Potentialtopftiefe $V = 30{,}8$ MeV.

Wir berechnen nun die mittlere freie Weglänge der Neutronen in Kernmaterie unter der Annahme, daß die Nukleonen als FERMI-Gas bei der absoluten Temperatur $T = 0$ betrachtet werden können. Die Verteilung der Absolutbeträge der Nukleonenimpulse p_A genügt dabei der Bedingung

$$0 \leqq p_A \leqq p_F \tag{15.2.8}$$

mit p_F als maximal möglichem Impuls. Es sei nun der Impuls des einfallenden Nukleons gleich $\mathfrak{p}_a$ und der Impuls eines Nukleons im Kern $\mathfrak{p}_A$. Nach dem Stoß ändern sich die Impulse; sie seien dann entsprechend $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$. Der Absolutbetrag des Anfangsimpulses p_A genügt der Ungleichung (15.2.8). Nach dem PAULI-Prinzip ist ein Stoß möglich, wenn die Impulse nach dem Stoß folgenden Ungleichungen genügen:

$$|\mathfrak{p}_1| \geqq p_F, \qquad |\mathfrak{p}_2| \geqq p_F. \tag{15.2.8a}$$

Da nach dem Energieerhaltungssatz $p_a^2 + p_A^2 = p_1^2 + p_2^2$ ist, kann man die Ungleichungen (15.2.8a) in folgender Form zusammenfassen:

$$p_a^2 + p_A^2 - 2p_F^2 \geqq 0. \tag{15.2.9}$$

Die Ungleichungen (15.2.8) und (15.2.9) begrenzen die möglichen Werte der Nukleonenimpulse im Kern, wenn diese Streuung zulassen sollen, durch folgende Werte:

$$0 \leqq p_A^2 \leqq p_F^2 \quad \text{für} \quad p_a^2 \geqq 2p_F^2, \tag{15.2.10}$$

$$2p_F^2 - p_a^2 \leqq p_A^2 \leqq p_F^2 \quad \text{für} \quad p_a^2 \leqq 2p_F^2. \tag{15.2.11}$$

Bezeichnen wir mit $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ die Relativimpulse der Nukleonen vor und nach dem Stoß: $2\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_A - \mathfrak{p}_a$, $2\mathfrak{q} = \mathfrak{p}_1 - \mathfrak{p}_2$ $(|\mathfrak{p}| = |\mathfrak{q}|)$, so ergibt sich im Schwerpunktsystem der differentielle Wirkungsquerschnitt für die Streuung eines Neutrons an den Nukleonen des Kerns durch den Ausdruck

$$\langle\sigma\rangle = \frac{3}{4\pi p_F^3}\int d\,\mathfrak{p}_A \int \frac{|\mathfrak{p}_A - \mathfrak{p}_a|}{p_a}\,\frac{d\,\sigma(\mathfrak{p},\mathfrak{q})}{d\,\Omega}\,\delta(p - q)\,\frac{d\mathfrak{q}}{q^2}. \tag{15.2.12}$$

Dabei wird über alle Impulswerte der Nukleonen, die an der Streuung teilhaben, sowie über alle Streuwinkel integriert. Die Delta-Funktion $\delta(p - q)$ berücksichtigt den Energieerhaltungssatz.

Wegen des PAULI-Prinzips wird die Streuung von Nukleonen mit nicht allzu großen Energien um kleine Winkel, die kleinen Impulsübertragungen auf die Kernnukleonen entsprechen, wenig wahrscheinlich. Infolgedessen kann man die Abhängigkeit des Querschnitts $d\sigma(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})/d\Omega$ vom Winkel zwischen den Vektoren $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ vernachlässigen und $d\sigma/d\Omega = \sigma(p)/4\pi$ setzen. Hierbei ist $\sigma(p)$ der totale Streuquerschnitt mit dem Relativimpuls p. In dieser Näherung läßt sich bei gegebenem Anfangszustand (der festgelegt ist durch die Werte $\mathfrak{p}_a$ und $\mathfrak{p}_A$) die Integration über $\mathfrak{q}$ in (15.2.12) durchführen. Das Integral $\int \delta(p - q)\,d\mathfrak{q}/q^2$ bestimmt den Raumwinkel für die

möglichen Richtungen des Relativimpulses nach dem Stoß. Legt man die Achse des Polarkoordinatensystems in die Richtung $\mathfrak{p}_A + \mathfrak{p}_a$ und benutzt die Beziehung $\mathfrak{p}_1 = {}^1/_2(\mathfrak{p}_A + \mathfrak{p}_a) + \mathfrak{q}$, so erhält man

$$\int \delta(p - q)\frac{d\mathfrak{q}}{q^2} = \frac{4\pi}{|\mathfrak{p}_A - \mathfrak{p}_a|\,|\mathfrak{p}_A + \mathfrak{p}_a|}\int d(\mathfrak{p}_1^2). \tag{15.2.13}$$

Das Integral (15.2.13) berechnet sich leicht, wenn man berücksichtigt, daß sich die obere Integrationsgrenze aus der Bedingung $p_1^2 = p_A^2 + p_a^2 - p_2^2$ und die untere Integrationsgrenze aus dem PAULI-Prinzip

$$(p_1^2)_{\min} = 2p_F^2 - p_2^2$$

bestimmen. Man erhält

$$\int \delta(p - q)\frac{d\mathfrak{q}}{q^2} = 4\pi\frac{p_A^2 + p_a^2 - 2p_F^2}{|\mathfrak{p}_A - \mathfrak{p}_a|\,|\mathfrak{p}_A + \mathfrak{p}_a|}. \tag{15.2.14}$$

Setzt man (15.2.14) in (15.2.12) ein, so wird

$$\langle\sigma\rangle = \frac{3}{2p_F^3 p_a}\int\frac{p_A^2 + p_a^2 - 2p_F^2}{|\mathfrak{p}_A + \mathfrak{p}_a|}.\sigma(p)\sin\vartheta\, d\vartheta\, p_A^2\, dp_A. \tag{15.2.15}$$

Die Integration über die Winkel in (15.2.15) kann leicht durchgeführt werden:

$$\int\frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{|\mathfrak{p}_A + \mathfrak{p}_a|} = \frac{2}{p_a},$$

so daß

$$\langle\sigma\rangle = \frac{3}{p_F^3 p_a^2}\int\sigma(p)\,(p_A^2 + p_a^2 - 2p_F^2)\,p_A^2\,dp_A \tag{15.2.15a}$$

folgt. Über p_A ist in den durch die Bedingungen (15.2.10) und (15.2.11) festgelegten Grenzen zu integrieren.

Kann man die Abhängigkeit $\sigma(p)$ vernachlässigen, so läßt sich die Integration in (15.2.15a) sofort durchführen:

$$\langle\sigma\rangle = \sigma\left(1 - \frac{7}{5}\frac{p_F^2}{p_a^2}\right) \qquad \text{für} \quad p_a^2 \geqq 2p_F^2, \tag{15.2.16}$$

$$\langle\sigma\rangle = \sigma\left\{1 - \frac{7}{5}\frac{p_F^2}{p_a^2} + \frac{2}{5}\frac{p_F^2}{p_a^2}\left(2 - \frac{p_a^2}{p_F^2}\right)^{5/2}\right\} \quad \text{für} \quad p_a^2 \leqq 2p_F^2. \tag{15.2.16a}$$

Führt man die Dichte der Kernmaterie ϱ ein, so läßt sich die mittlere freie Weglänge eines Nukleons in der Kernmaterie Λ durch die Beziehung

$$\Lambda = \frac{1}{\langle\sigma\rangle\varrho}$$

definieren. Setzt man $\sigma = (Z\,\sigma_{\mathrm{np}} + (A - Z)\,\sigma_{\mathrm{nn}})/A$ mit σ_{np} und σ_{nn} als Streuquerschnitt für die Streuung eines Neutrons an einem freien Proton bzw. an einem freien Neutron, so erhält man für den Absorptionskoeffizienten für Neutronen in der Kernmaterie

$$\varkappa = N_1\frac{Z\,\sigma_{\mathrm{np}} + (A - Z)\sigma_{\mathrm{nn}}}{A}f(E). \tag{15.2.17}$$

Dabei bedeutet $f(E)$ einen Faktor (kleiner als 1), der den Einfluß des PAULI-Prinzips berücksichtigt. Nach (15.2.16) und (15.2.16a) läßt sich schreiben

$$f(E) = \begin{cases} 1 - \frac{7}{5}\frac{E_F}{\varepsilon} & \text{für} \quad \varepsilon \geqq 2E_F, \\ 1 - \frac{7}{5}\frac{E_F}{\varepsilon} + \frac{2}{5}\left(\frac{E_F}{\varepsilon}\right)\left(2 - \frac{\varepsilon}{E_F}\right)^{5/2} & \text{für} \quad \varepsilon \leqq 2E_F. \end{cases} \tag{15.2.18}$$

Dabei bedeuten E_F und ε die Maximalenergie des Nukleons im Kern bzw. die Energie der Relativbewegung des Neutrons im Kern. Setzt man $R = 1{,}2\,A^{1/3}\,[10^{-13}\,\text{cm}]$, so erhält man $E_F = 33$ MeV. Für $R = 1{,}48\,A^{1/3}$ $[10^{-13}\,\text{cm}]$ gilt $E_F = 22$ MeV.

Die abgeleiteten Relationen sind nur für Neutronen anwendbar, da nur die Kernwechselwirkung in Betracht gezogen wurde. Will man das optische Potential für die Wechselwirkung zwischen Proton und Kern berechnen, so ist im einfachsten Fall zu dem optischen Potential für die Neutronenwechselwirkung noch das COULOMB-Potential für die Proton-Kern-Wechselwirkung hinzuzufügen. Nimmt man an, daß die Nukleonen im Kern mit gleicher Dichte verteilt sind, so läßt sich dieses Zusatzglied zum Potential in der Form

$$\Delta V = \begin{cases} \frac{Z e^2}{r} & \text{für} \quad r > R, \\ (3R^2 - r^2)\,\frac{Z e^2}{2R^3} & \text{für} \quad r < R \end{cases} \tag{15.2.19}$$

darstellen.

Berücksichtigt man die Energieabhängigkeit der Wirkungsquerschnitte, so läßt sich aus (15.2.15a) die Abhängigkeit des Absorptionskoeffizienten

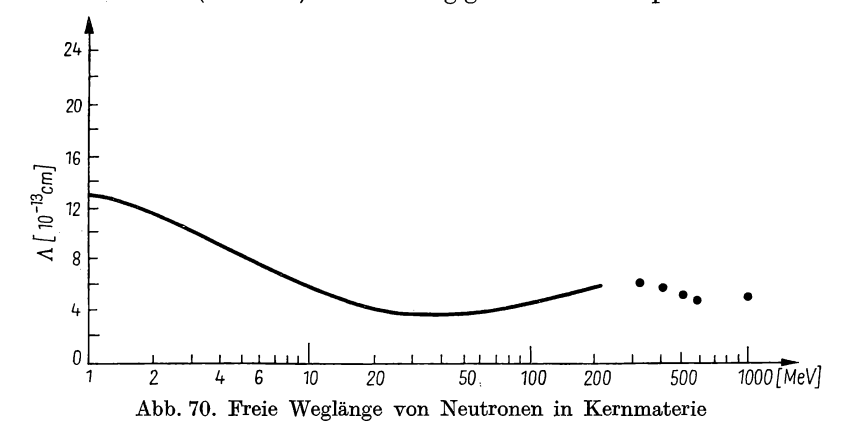


Abb. 70. Freie Weglänge von Neutronen in Kernmaterie

von der Energie berechnen. Für grobe Abschätzungen des Verlaufs dieser Abhängigkeit kann man den Ausdruck (15.2.17) für den Absorptionskoeffizienten verwenden und auch die Energieabhängigkeit der Streuquerschnitte σ_{np} und σ_{nn} berücksichtigen. Da σ_{np} und σ_{nn} mit wachsender Energie abnehmen,

$f(\varepsilon)$ jedoch wächst und gegen 1 strebt, kann man erwarten, daß der Absorptionskoeffizient mit wachsender Neutronenenergie durch ein breites Maximum geht. Nach numerischen Abschätzungen liegt dieses Maximum im Energiegebiet zwischen 20 und 50 MeV. Die freie Weglänge eines Nukleons in Kernmaterie ist in diesem Energiegebiet maximal.

In der Abb. 70 ist die Abhängigkeit der freien Weglänge des Nukleons in Kernmaterie von der Energie ε nach den Berechnungen von VAN DER VEGT und JONKER [15,12] dargestellt. Dabei wurden für den Kernradius und für die Maximalenergie eines Nukleons im Kern folgende Werte benutzt: $R = 1{,}33 \cdot A^{1/3}\,[10^{-13}\,\text{cm}]$, $E_F = 27{,}2$ MeV. Die Neutronenenergie im Kern wurde in der Form $E = \varepsilon + E_F + 8$ MeV dargestellt. Die Werte von σ_{np} für Energien $\varepsilon < 200$ MeV wurden aus der Arbeit von FOWLER und BROLLEY [15,13] entnommen, für Energien $\varepsilon \geqq 345$ MeV aus der Arbeit von DSHELEPOW, SATAROW und GOLOWIN [15,14].

15.3. „Impuls“-Näherung

Nachdem beim Bau von Beschleunigern für hohe Energien (100 MeV und mehr) große Fortschritte erzielt wurden, konnte man in breitem Rahmen Untersuchungen an Kernreaktionen vornehmen, die durch Nukleonen hoher Energie (im Vergleich zur Bindungsenergie eines Nukleons) ausgelöst werden. In diesem Fall läßt sich die Streuung der einfallenden Teilchen im Kern angenähert als Streuung an den einzelnen Nukleonen des Kerns auffassen, da die Bindungsenergie der Teilchen im Kern nur zweitrangige Bedeutung besitzt. Eine derart vereinfachte Betrachtung dieser Aufgabe führt das Vielkörperproblem auf ein Zweikörperproblem zurück.

Eine der Methoden für diese Reduzierung wird als *Methode der Impulsnäherung* bezeichnet. Sie wurde erstmals von CHEW [15,15] für die Untersuchung der Streuung schneller Nukleonen an Deuteronen benutzt. Im weiteren wurde sie auch auf eine Reihe anderer Aufgaben angewendet.

In der Methode der Impulsnäherung wird die Streuamplitude für die Streuung von Nukleonen an einem komplexen Kern als Summe der Streuamplituden für die Streuung an freien Nukleonen dargestellt. Dabei besitzen diese „freien“ Nukleonen eine Impulsverteilung, die der Impulsverteilung der Nukleonen im Kern für den gegebenen Zeitpunkt entspricht. Die Methodik wurde von CHEW, WICK und GOLDBERGER [15,16] entwickelt. Man macht folgende Annahmen:

1. Das einfallende Teilchen steht zu jedem Zeitpunkt nur mit einem Nukleon des Kerns in Wechselwirkung.

2. Die Amplitude der einfallenden Welle ändert sich beim Durchgang durch den Kern nur wenig.

3. Die Wechselwirkung zwischen den Nukleonen des Kerns beeinflußt die Wechselwirkung des einfallenden Nukleons mit dem gegebenen Nukleon des Kerns nicht wesentlich.

Zum Unterschied von der BORNschen Näherung setzt man bei der Impulsnäherung nicht voraus, daß die Wechselwirkungskräfte zwischen dem einfallenden Teilchen und dem streuenden Nukleon klein sind.

Um die Methode zu veranschaulichen, untersuchen wir die Streuung eines Neutrons an einem Proton, das sich in einem Potentialtopf $U(r_p)$ im Zustand $\varphi_a(\mathfrak{r}_p)$ befindet. Der HAMILTON-Operator des Systems lautet

$$H = K + V + U(r_p) \tag{15.3.1}$$

mit $V = V(r_n - r_p)$ als Operator für die Wechselwirkung zwischen Neutron und Proton und $K = \hbar^2(\Delta_n^2 + \Delta_p^2)/2M$ als Operator der gesamten kinetischen Energie von Proton und Neutron.

Der Anfangszustand des Systems ist durch die Funktion

$$\Phi_a = (2\pi)^{-3/2}\, \varphi_a(\mathfrak{r}_p) \exp(i\, \mathfrak{k}_a\, \mathfrak{r}_n) \tag{15.3.2a}$$

und der Endzustand durch die Funktion

$$\Phi_b = (2\pi)^{-3/2}\, \varphi_b(\mathfrak{r}_p) \exp(i\, \mathfrak{k}_b\, \mathfrak{r}_n) \tag{15.3.2b}$$

gegeben. Nach der allgemeinen Streutheorie (vgl. Abschn. 9.1.) drückt sich die Wahrscheinlichkeit für den Übergang aus dem Zustand Φ_a in den Zustand Φ_b je Zeiteinheit durch die Beziehung

$$P_{ba} = \frac{2\pi}{\hbar}\, |T_{ba}|^2\, \delta(E_a - E_b) \tag{15.3.3}$$

aus. Das Matrixelement

$$T_{ba} = (\Phi_b,\, V\, \Psi_a) \tag{15.3.4}$$

läßt sich leicht berechnen, wenn die Wellenfunktion Ψ_a bekannt ist. Diese Wellenfunktion erhält man aus der Integralgleichung

$$\Psi_a = \Phi_a + (E_a - K - U + i\,\eta)^{-1}\, V\, \Psi_a \tag{15.3.5}$$

mit $E_a = \hbar^2\, k_a^2/2M - E_0$ (E_0 = Bindungsenergie des Protons).

Führt man den Operator T über die Beziehung

$$T\, \Phi_a = V\, \Psi_a \tag{15.3.6}$$

ein, so läßt sich (15.2.4) in der Form

$$T_{ba} = (\Phi_b,\, T\, \Phi_a) \tag{15.3.7}$$

schreiben. Dabei genügt T nach (15.3.5) der Operatorgleichung

$$T = V + V(E_a - K - U + i\,\eta)^{-1}\, T, \tag{15.3.8}$$

die man noch in einer etwas anderen Form schreiben kann:

$$T = V + V(E_a - K - U - V + i\,\eta)^{-1}\, V. \tag{15.3.8a}$$

Die Impulsnäherung nimmt nun eine Substitution des Operators T durch den Operator t der freien Teilchen im Matrixelement (15.3.7) vor. Der Operator t genügt der Operatorgleichung

$$t = V + V(\varepsilon_{ak} - K + i\,\eta)^{-1}\, t \tag{15.3.9}$$

oder der hierzu äquivalenten Gleichung

$$t = V + V(\varepsilon_{ak} - K - V + i\,\eta)^{-1}\, V. \tag{15.3.9a}$$

Dieser Operator bestimmt die Streuung eines Neutrons am freien Proton. Bei der Definition von t wurde die Bezeichnung

$$\varepsilon_{a k} = \frac{\hbar^2}{2M}(k_a^2 + k^2) \tag{15.3.10}$$

für die Energie der freien Bewegung von Proton und Neutron verwendet.

In der Impulsnäherung besitzt also das Matrixelement für Streuung folgende Form:

$$T_{ba}^{\text{imp}} = (\Phi_b, t\,\Phi_a). \tag{15.3.11}$$

Um ihre physikalische Bedeutung zu klären, gehen wir zu einer Darstellung mit den folgenden Basisfunktionen über:

$$\chi_{\mathfrak{k}_a \mathfrak{k}} = (2\pi)^{-3} \exp\{i(\mathfrak{k}_a \mathfrak{r}_n + \mathfrak{k}\,\mathfrak{r}_p)\}. \tag{15.3.12}$$

Dies sind die Eigenfunktionen des Operators der kinetischen Energie von Proton und Neutron:

$$\{K - \varepsilon_{a k}\}\chi_{\mathfrak{k}_a \mathfrak{k}} = 0. \tag{15.3.12a}$$

Damit wird

$$t\,\Phi_a = \int \chi_{\mathfrak{k}'_a \mathfrak{k}'}(\mathfrak{k}'_a\,\mathfrak{k}'\,|t|\,\mathfrak{q}_a\,\mathfrak{q})\,(\chi_{\mathfrak{q}_a \mathfrak{q}}, \Phi_a)\,d\mathfrak{k}'_a\,d\mathfrak{k}'\,d\mathfrak{q}_a\,d\mathfrak{q}, \tag{15.3.13}$$

wobei

$$(\mathfrak{k}'_a\,\mathfrak{k}'\,|t|\,\mathfrak{q}_a\,\mathfrak{q}) \equiv \int \chi^*_{\mathfrak{k}'_a \mathfrak{k}'}\,t\,\chi_{\mathfrak{q}_a \mathfrak{q}}\,d\mathfrak{r}_n\,d\mathfrak{r}_p \tag{15.3.13a}$$

die Streumatrix für die Streuung eines Neutrons an einem freien Proton darstellt. In der Impulsnäherung nimmt man an, daß diese Matrix bekannt ist.

Unter Benutzung von (15.3.12) und (15.3.2a) erhält man

$$(\chi_{\mathfrak{q}_a \mathfrak{q}}, \Phi) = \delta(\mathfrak{k}_a - \mathfrak{q}_a)\,G(\mathfrak{q}) \tag{15.3.14}$$

mit

$$G(\mathfrak{q}) \equiv (2\pi)^{-3/2} \int e^{-i\mathfrak{q}\mathfrak{r}_p}\,\varphi_a(\mathfrak{r}_p)\,d\mathfrak{r}_p. \tag{15.3.15}$$

Die Funktion $|G(\mathfrak{q})|^2\,d\mathfrak{q}$ bestimmt die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Impuls des Protons im Zustand φ_a im Intervall $\hbar\,\mathfrak{q}$, $\hbar(\mathfrak{q} + d\mathfrak{q})$ liegt.

Ist die Wellenfunktion des Grundzustandes bekannt, so läßt sich die Funktion $G(\mathfrak{q})$, die die Impulsverteilung der Nukleonen im Grundzustand bestimmt, nach Gl. (15.3.15) berechnen. Nach den experimentellen Werten der Arbeit [15,17] erhält man

$$G(\mathfrak{q}) = \alpha^{-3}\,\pi^{-3/2} \exp\left(-\frac{q^2}{\alpha^2}\right).$$

Hierbei bedeutet α eine Konstante, die der Größenordnung nach aus der Beziehung $\alpha^2(2M)^{-1} \approx 14$ MeV bestimmt werden kann.

Setzt man (15.3.14) in (15.3.13) ein, so folgt

$$t\,\Phi_a = \int \chi_{\mathfrak{k}'_a \mathfrak{k}'}(\mathfrak{k}'_a\,\mathfrak{k}'\,|t|\,\mathfrak{k}_a\,\mathfrak{q})\,G(\mathfrak{q})\,d\mathfrak{k}'_a\,d\mathfrak{k}'\,d\mathfrak{q}. \tag{15.3.16}$$

Wir führen nun die Wellenfunktion $\Psi_{\mathfrak{k}_a \mathfrak{q}}$ ein, die die Streuung eines Neutrons mit dem Impuls $\hbar\,\mathfrak{k}_a$ an einem Proton mit dem Impuls $\hbar\,\mathfrak{q}$ beschreibt. Sie läßt sich über die Beziehung

$$V\,\Psi_{\mathfrak{k}_a \mathfrak{q}} = \int \chi_{\mathfrak{k}'_a \mathfrak{k}'}(\mathfrak{k}'_a\,\mathfrak{k}'\,|t|\,\mathfrak{k}_a\,\mathfrak{q})\,d\mathfrak{k}'_a\,d\mathfrak{k}' \tag{15.3.17}$$

definieren. Dann nimmt (15.3.16) folgende Form an:

$$t\,\Phi_a = V \int \Psi_{\mathfrak{k}_a \mathfrak{q}}\, G(\mathfrak{q})\, d\mathfrak{q}.$$

Setzt man dies in (15.3.11) ein, so erhält man das Matrixelement T_{ba} in der Impulsnäherung:

$$T_{ba}^{\text{imp}} = (\Phi_b,\, V\, \Psi_a^{\text{imp}}). \tag{15.3.18}$$

Dabei gilt

$$\Psi_a^{\text{imp}} = \int \Psi_{\mathfrak{k}_a \mathfrak{q}}\, G(\mathfrak{q})\, d\mathfrak{q}. \tag{15.3.18a}$$

Vergleicht man (15.3.18) mit dem exakten Ausdruck (15.3.4), so sieht man, daß die Impulsnäherung einer Substitution der exakten Wellenfunktion Ψ_a durch die Funktion Ψ_a^{imp} entspricht, die die Streuung des einfallenden Neutrons durch ein Wellenpaket freier Protonen charakterisiert, wobei das Wellenpaket dieselbe Impulsverteilung wie im Zustand $\varphi_a(\mathfrak{r}_\mathfrak{p})$ besitzt.

Um die Bedingungen für die Anwendbarkeit der Impulsnäherung zu klären, betrachten wir das Zusatzglied

$$\Delta T_{ba} = T_{ba} - T_{ba}^{\text{imp}} = (\Phi_b,\, [T - t]\, \Phi_a). \tag{15.3.19}$$

Unter Benutzung von (15.3.8a), (15.3.9a) und der Operatoridentität

$$A^{-1} - B^{-1} = A^{-1}(B - A)\, B^{-1}$$

läßt sich schreiben

$$T - t = V(E_a - H + i\,\eta)^{-1}\,[\varepsilon_{aq} - E_a + U]\, D_q^{-1}\, V$$

mit

$$D_q = (\varepsilon_{aq} - K - V + i\,\eta).$$

Stellt man die Funktion Φ_a in der Form

$$\Phi_a = \int \chi_{\mathfrak{k}_a \mathfrak{p}} (\chi_{\mathfrak{k}_a \mathfrak{q}},\, \Phi_a)\, d\mathfrak{q}$$

dar, so erhält man

$$(T - t)\,\Phi_a = V(E_a - H + i\,\eta)^{-1} \times$$
$$\times \int \{U(\chi_{\mathfrak{k}_a \mathfrak{q}},\, \Phi_a) - (\chi_{\mathfrak{k}_a \mathfrak{q}},\, U\,\Phi_a)\}\, D_q^{-1}\, V\, \chi_{\mathfrak{k}_a \mathfrak{q}}\, d\mathfrak{q}. \tag{15.3.20}$$

Dabei wurde die Beziehung

$$(\varepsilon_{aq} - E_a)\,(\chi_{\mathfrak{k}_a \mathfrak{q}},\, \Phi_a) = -(\chi_{\mathfrak{k}_a \mathfrak{q}},\, U\,\Phi_a)$$

benutzt. Mit Hilfe von (15.3.12) und (15.3.2a) findet man

$$(\chi_{\mathfrak{k}_a \mathfrak{q}},\, \Phi_a) = (2\pi)^{-3}\, G(\mathfrak{q}) = (2\pi)^{-3/2} \int \varphi_a(\mathfrak{r}_\mathfrak{p})\, e^{i\mathfrak{q}\mathfrak{r}_\mathfrak{p}}\, d\mathfrak{r}_\mathfrak{p},$$

$$(\chi_{\mathfrak{k}_a \mathfrak{q}},\, U\,\Phi_a) = (2\pi)^{-3/2} \int U(\mathfrak{r}_\mathfrak{p})\, \varphi_a(\mathfrak{r}_\mathfrak{p})\, e^{-i\mathfrak{q}\mathfrak{r}_\mathfrak{p}}\, d\mathfrak{r}_\mathfrak{p} = (2\pi)^{-3}\, g(\mathfrak{q}).$$

Setzt man (15.3.20) in (15.3.19) ein, so erhält man folgenden Zusatzterm zur Impulsnäherung:

$$\Delta T_{ba} = (2\pi)^{-3}\Big(\Phi_b,\, V(E_a - H + i\,\eta)^{-1} \int [U\,G(\mathfrak{q}) - g(\mathfrak{q})]\, D_q^{-1}\, V\, \chi_{\mathfrak{k}_a \mathfrak{q}}\, d\mathfrak{q}\Big). \tag{15.3.21}$$

Der Wert dieses Zusatzterms hängt von der konkreten Form der Potentiale U und V ab. Im allgemeinen Fall ist seine Berechnung außerordentlich schwierig.

Befindet sich das einfallende Neutron mit einem Kern aus A Nukleonen in Wechselwirkung, so läßt sich der HAMILTON-Operator des Systems in der Form

$$H = K + V + U \tag{15.3.22}$$

darstellen. Dabei bedeuten $K = -\frac{\hbar^2}{2M} \sum_{\alpha=1}^{A+1} \nabla_\alpha^2$ den Operator für die kinetische Energie aller Nukleonen des Systems, $V = \sum_{\alpha=1}^{A} V_{n\alpha}$ die Wechselwirkungsenergie des äußeren Nukleons mit allen Nukleonen des Kerns und $U = \sum_{\alpha<\beta} U_{\alpha\beta}$ die Wechselwirkung der Nukleonen des Kerns miteinander. In diesem Fall läßt sich der Übergang zur Impulsnäherung durch die Substitution des exakten Matrixelements $T_{ba} = (\Phi_b, T\,\Phi_a)$ durch das angenäherte Matrixelement

$$T_{ba}^{\text{imp}} = \left(\Phi_b, \sum_{\alpha=1}^{A} t_{n\alpha}\,\Phi_a\right)$$

darstellen. Die Operatoren $t_{n\alpha}$ werden durch die Operatorgleichungen

$$t_{n\alpha} = V_{n\alpha} + V_{n\alpha}(\varepsilon_\lambda - K - V_{n\alpha} + i\,\eta)^{-1}\,V_{n\alpha} \tag{15.3.23}$$

definiert. In (15.3.23) bedeuten die ε_λ die Eigenwerte des Operators der kinetischen Energie aller Teilchen:

$$(K - \varepsilon_\lambda)\,\chi_\lambda = 0.$$

Setzt man

$$\Phi_a = \int (\chi_\lambda, \Phi_a)\,\chi_\lambda\,d\lambda, \tag{15.3.24}$$

so läßt sich T_{ba}^{imp} in der Form

$$T_{ba}^{\text{imp}} = \sum_\alpha \int (\chi_\lambda, \Phi_a)\,(\Phi_b, t_{n\alpha}\,\chi_\lambda)\,d\lambda \tag{15.3.25}$$

schreiben. Die Operatoren $t_{n\alpha}$ kann man durch die Untersuchung der Streuung an freien Nukleonen finden. Nimmt man an, daß die $t_{n\alpha}$ bekannt sind, dann läßt sich der Ausdruck (15.3.25) leicht berechnen. T_{ba}^{imp} hängt stark von den Matrixelementen der Operatoren $t_{n\alpha}$ für die Streuung an freien Nukleonen wie auch von der Impulsverteilung der Nukleonen im Grundzustand des Kerns (χ_λ, Φ_a) ab.

Die Korrektion zur Impulsnäherung läßt sich im allgemeinen Fall mit einer Methode berechnen, die der bei der Untersuchung der Korrektion zur Impulsnäherung für die Wechselwirkung eines Nukleons mit einem gebundenen Proton analog ist. Man erhält

$$\Delta T_{ba} = T_{ba} - T_{ba}^{\text{imp}} = \left(\Phi_b, \left[T - \sum_{\alpha=1}^{A} t_{n\alpha}\right] \Phi_a\right). \tag{15.3.26}$$

Unter Benutzung von (15.3.8a) und (15.3.23) gilt

$$T - \sum_{\alpha} t_{n\alpha} = \sum_{\alpha} V_{n\alpha}(E - H + i\eta)^{-1} \times$$
$$\times \{[\varepsilon_\lambda - E_a + U] (\varepsilon_\lambda - K - V_{n\alpha} + i\eta)^{-1} V_{n\alpha} + (V - V_{n\alpha})\}.$$

Setzt man dies in (15.3.26) ein, so läßt sich die Korrektion zur Impulsnäherung als Summe zweier Glieder schreiben:

$$\Delta T_{ba} = \Delta T_{ba}^{(1)} + \Delta T_{ba}^{(2)}. \tag{15.3.27}$$

Hierbei ist

$$\Delta T_{ba}^{(1)} = \sum_{\alpha=1}^{A} \left(\Phi_b, V_{n\alpha}(E_a - H + i\eta)^{-1}[V - V_{n\alpha}]\right) \tag{15.3.28}$$

die Korrektion für die Vielfachstreuung. Diese Korrektion ist Null bei Anwesenheit nur eines Streuzentrums, da dann $V = V_{n\alpha}$ gilt. Weiterhin bedeutet

$$\Delta T_{ba}^{(2)} = \sum_{\alpha=1}^{A} \left(\Phi_b, V_{n\alpha}(E_a - H + i\eta)^{-1} \times\right.$$
$$\left.\times [\varepsilon_\lambda - E_a + U] (\varepsilon_\lambda - K - V_{n\alpha} + i\eta)^{-1} V_{n\alpha} \Phi_a\right) \tag{15.3.29}$$

die Korrektion für den Bindungseffekt zwischen den Nukleonen, an denen die Streuung erfolgt.

Unter Berücksichtigung von (15.3.24) und mit der Beziehung

$$(\varepsilon_\lambda - E_a)(\chi_\lambda, \Phi_a) = -(\chi_\lambda, U\Phi_a)$$

kann man (15.3.29) in die Form

$$\Delta T_{ba}^{(2)} = \sum_{\alpha=1}^{A} \left(\Phi_b, V_{n\alpha}(E_a - H + i\eta)^{-1} \times\right. \tag{15.3.30}$$
$$\left.\times \int [U(\chi_\lambda, \Phi_a) - (\chi_\lambda, U\Phi_a)] (\varepsilon_\lambda - K - V_{n\alpha} + i\eta)^{-1} V_{n\alpha} \Phi_a \, d\lambda\right)$$

bringen.

Die Korrektion für die Vielfachstreuung ist dem Faktor $\frac{1}{\varrho}\sqrt{\frac{\sigma}{4\pi}\frac{1}{k_a \varrho}}$ proportional. Hierbei bedeuten ϱ den mittleren Abstand zwischen 2 Streuzentren und σ den Wirkungsquerschnitt für Streuung an einem Streuzentrum. Bei der unelastischen Streuung wird diese Korrektion wegen der Inkohärenz kleiner als bei elastischer Streuung.

Offensichtlich kann man die Impulsnäherung erfolgreich bei der Untersuchung von Wechselwirkungen zwischen Nukleonen und leichten Kernen bei Energien der Relativbewegung größer als 50 ··· 100 MeV verwenden.

Da das Matrixelement (15.3.25) für den Streuquerschnitt bei hohen Energien (> 50 MeV) stark von der Impulsverteilung der Nukleonen im Grundzustand des Kerns [d. h. von der Funktion (χ_λ, Φ_a)] abhängt, kann man hoffen, daß Untersuchungen über die Wechselwirkung schneller Nukleonen mit Kernen weitere Angaben über die Wellenfunktionen für den Grundzustand der Kerne und über die Impulsverteilung der Nukleonen in diesem Zustand liefern können.

15.4.* Elementare Theorie der Kernreaktionen mit mehr als zwei Endteilchen

In einer Reihe von Fällen erhält man als Resultat der Wechselwirkung eines Neutrons mit einem Kern eine Reaktion, bei der sich drei, vier oder noch mehr Teilchen bilden. Beispiele für solche Reaktionen sind die Reaktionen ^{9}Be (n, 2n) ^{8}Be, ^{12}C (n, n′) 3 ^{4}He usw. Sie besitzen eine Schwellenenergie von der Größenordnung einiger MeV und verlaufen meist an solchen leichten Kernen, die in eine bestimmte Anzahl leichterer Kerne zerfallen können, welche eine große Bindungsenergie besitzen (z. B. He).

Bei nicht sehr hohen Energien der einfallenden Neutronen verlaufen derartige Reaktionen wahrscheinlich ohne Compoundkernbildung (d. h., ohne daß sich die Anregungsenergie über alle Nukleonen des Compoundkerns verteilt) durch unmittelbare Energieübertragung an Gruppen stark gebundener Nukleonen (z. B. α-Teilchen) ohne Anregung ihres inneren Bewegungszustandes.

Die Theorie dieser Reaktionen wurde von Sachs [15,18] auf Grund einer Idee von Fermi [15,19] entwickelt. Fermi verwendete diese Idee in der Theorie der Vielfacherzeugung von Mesonen, wobei er eine statistische Energieverteilung zwischen den auseinanderfliegenden Teilchen vor ihrer Emission annahm. Die Zerfallsgesetze werden in diesem Fall durch die Bedingungen der statistischen Verteilung von Energie und Impuls auf die Zerfallsprodukte vor ihrer Emission aus dem Volumen, in dem sich die Wechselwirkung zwischen ihnen bemerkbar macht, bestimmt. Diesen Mechanismus einer Kernreaktion werden wir als *direkten Kernzerfall* bezeichnen.

Für die elementare qualitative Betrachtung des direkten Kernzerfalls nehmen wir an, daß im Anfangszustand Φ_a im Volumen V ein Kern und ein Neutron mit der Relativgeschwindigkeit v_a vorhanden sind. Im Endzustand Φ_b sind n auseinanderfliegende Teilchen vorhanden (Nukleonen und α-Teilchen). Bezeichnet man die Übergangswahrscheinlichkeit je Zeiteinheit für den Übergang aus dem Zustand Φ_a in den Zustand Φ_b mit W_{ba}, so ergibt sich für den Wirkungsquerschnitt der Reaktion

$$\sigma_{ba} = W_{ba} \frac{V}{v_a}. \tag{15.4.1}$$

Nimmt man weiter an, daß die Wechselwirkung zwischen den Teilchen im Volumen Ω vor sich geht, so läßt sich die Übergangswahrscheinlichkeit W_{ba} als Produkt der Wahrscheinlichkeit (Ω/V) für den Aufenthalt des Nukleons und des Kerns im Volumen Ω und der Wahrscheinlichkeit für den Übergang des Teilchens im Volumen Ω in den Zustand Φ_b darstellen:

$$W_{ba} = \frac{\Omega}{V} W_{b\Omega}. \tag{15.4.2}$$

Bezeichnet man den Zustand der n Teilchen im Wechselwirkungsvolumen mit Φ_Ω, so wird die Übergangswahrscheinlichkeit $W_{b\Omega}$ je Zeiteinheit durch das Quadrat der Wechselwirkungsmatrix $(\Phi_b, T\,\Phi_\Omega)$ (vgl. Abschn. 9.1.) über die übliche Beziehung

$$W_{b\Omega} = \frac{2\pi}{\hbar} |(\Phi_b, T\,\Phi_\Omega)|^2 \varrho_b \tag{15.4.3}$$

ausgedrückt. Hierbei bedeutet ϱ_b die Anzahl der Endzustände im Einheitsenergieintervall.

Nach FERMI [15,19] ist das Quadrat des Wechselwirkungsmatrixelements in (15.4.3) proportional der Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich alle Teilchen des gegebenen Zustandes gleichzeitig im Volumen Ω befinden. Befinden sich im Volumen Ω n Teilchen, deren Zustände im Schwerpunktsystem durch die Impulse (ebene Wellen) charakterisiert werden, so erhält man bei Normierung der Wellenfunktionen auf das Volumen V folgenden Ausdruck:

$$|(\Phi_b, T\,\Phi_a)|^2 = D^2 \left(\frac{\Omega}{V}\right)^{n-1}. \tag{15.4.4}$$

Hierbei bedeutet D eine Konstante von der Dimension einer Energie, die der Größenordnung nach gleich der Tiefe des Potentialtopfes für ein Nukleon im Kern ist.

Setzt man (15.4.4), (15.4.3) und (15.4.2) in (15.4.1) ein, so erhält man

$$\sigma_{ba}(n) = \frac{2\pi}{\hbar\, v_a} \frac{D^2\, \Omega^n}{V^{n-1}}\, \varrho_b\,. \tag{15.4.5}$$

Um die Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts (15.4.5) von der Anfangsenergie der Relativbewegung von Neutron und Kern explizit zu berechnen, ist das effektive Volumen Ω zu bestimmen, in dem die Umgruppierung von Energie und Impuls vor sich geht. Weiterhin muß die Anzahl der Endzustände im Einheitsenergieintervall bekannt sein.

Nach SACHS wird das Volumen Ω durch die Beziehung

$$\Omega = \frac{4\pi}{3} (R + a\,\lambda\!\!\!^-)^2\, \lambda\!\!\!^- \tag{15.4.6}$$

gegeben. Dabei bedeuten R und a Parameter, die den betreffenden Typ der Reaktion mit direktem Zerfall charakterisieren.

Die Anzahl der Endzustände im Energieeinheitsintervall erhält man aus der Gleichung

$$\varrho_b = \left[\frac{V}{(2\pi\hbar)^3}\right]^{n-1} \prod_{i=1}^{n} (2J_i+1) \frac{d}{d\varepsilon} \left\{\int \prod_{i=1}^{n} d\mathfrak{p}_i\, \delta(\textstyle\sum \mathfrak{p}_i)\, \delta\left(\varepsilon - \textstyle\sum \frac{p_i^2}{2M_i}\right)\right\} \tag{15.4.7}$$

mit J_i als Spin des i-ten Teilchens. Das Produkt der beiden δ-Funktionen in (15.4.7) berücksichtigt den Energie- und Impulserhaltungssatz; $\varepsilon = \varepsilon_a + Q$ bedeutet die totale kinetische Energie im Endzustand (Summe der kinetischen Energie der Relativbewegung im Anfangszustand und dem Q-Wert der Reaktion).

Das in (15.4.7) eingehende Integral wurde von MULBURN [15,20] berechnet. Unter Benutzung seines Ergebnisses erhält man

$$\varrho_b = \frac{V^{n-1} \prod_{i=1}^{n} (2J_i+1)\, (2\pi)^{\frac{3(n-1)}{2}} \prod_i M_i^{3/2}}{(2\pi\hbar)^{3(n-1)}\, \Gamma\left(\frac{3}{2}(n-1)\right) \left(\sum_{i=1}^{n} M_i\right)^{3/2}}\, \varepsilon^{\frac{3n-5}{2}}. \tag{15.4.7a}$$

Setzt man (15.4.7a) und (15.4.6) in (15.4.5) ein und drückt die Relativgeschwindigkeit im Anfangszustand durch die Energie aus $\left(v_a = \sqrt{2\varepsilon_a/\mu}\right)$, so erhält man einen Ausdruck für den Wirkungsquerschnitt des direkten Kernzerfalls.

Für den Spezialfall des Zerfalls in 3 Teilchen ($n = 3$) wird

$$\sigma(3) = \prod_{i=1}^{3} (2J_i + 1) \frac{2\pi}{27\hbar^4} \frac{\prod_{i=1}^{3} M_i^{3/2}}{\mu\left(\sum_{i=1}^{3} M_i\right)^3} D^2 \left(1 + \frac{Q}{\varepsilon_a}\right)^2 \left(R + \frac{a\hbar}{\sqrt{2\mu\varepsilon_a}}\right)^6 [\mathrm{cm}^2]. \tag{15.4.8}$$

Wendet man dies auf die Reaktion ^{9}Be (n, 2n) ^{8}Be an, benutzt dabei die Werte $Q = -1{,}656$ MeV, $D = 40$ MeV, $\Pi(2J_i + 1) = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$ und drückt außerdem $\left(R + \frac{a\hbar}{\sqrt{2\mu\varepsilon_a}}\right)$ in Einheiten von 10^{-13} cm aus, so erhält man nach Sachs

$$\sigma(3) = 6{,}78\left(1 - \frac{1{,}84}{\varepsilon_a}\right)^2 \left(R + \frac{5{,}08\,a}{\sqrt{\varepsilon_a}}\right) [\mathrm{mbarn}]. \tag{15.4.9}$$

Wählt man hier $R = 1{,}39$ und $a = 0{,}463$, so erhält man befriedigende Übereinstimmung mit dem gemessenen Wirkungsquerschnitt für 4,07 MeV.

Für Reaktionen mit Zerfall in 4 Teilchen ($n = 4$) ist

$$\sigma(4) = \left(\frac{2}{3\hbar}\right)^6 \frac{\prod_{i=1}^{4}(2J_i + 1)\prod_{i=1}^{4} M_i^{3/2} D^2}{35\mu^{3/2}\left(\sum_{i=1}^{4} M_i\right)^{3/2}} \varepsilon_a \left(1 + \frac{Q}{\varepsilon_a}\right)^{7/2} \left(R + \frac{a\hbar}{\sqrt{2\mu\varepsilon_a}}\right)^8 [\mathrm{cm}^2]. \tag{15.4.10}$$

Für die Reaktion ^{12}C (n, n′) 3 ^{4}He ist $Q = -7{,}278$ MeV, und Gl. (15.3.10) liefert befriedigende Übereinstimmung (im Gebiet bis zu 14 MeV) mit den gemessenen Wirkungsquerschnitten dieser Reaktion bei 4,07 MeV [15,21], wenn man die Werte $D = 40$ MeV, $R = 0{,}77$ und $a = 1{,}17$ benutzt.

ANHANG

1. ALLGEMEINE EIGENSCHAFTEN DER EIGENFUNKTIONEN VON DREHIMPULSOPERATOREN

1.1. Zustände eines Systems mit definiertem Spin- und Bahndrehimpuls

Wie aus der Quantenmechanik gut bekannt ist, können das Quadrat des Drehimpulses und eine seiner Projektionen (z. B. J_z) im zentralsymmetrischen Feld gleichzeitig bestimmte Werte besitzen. Jeder beliebige Bewegungszustand in einem solchen Feld kann als lineare Superposition von Zuständen mit bestimmten Werten des Absolutbetrages des Drehimpulses und einer der Projektionen dargestellt werden.

In diesem Abschnitt bringen wir eine kurze Zusammenfassung der Grundeigenschaften von Drehimpulsoperatoren und deren Eigenfunktionen, die wir bei der Darlegung von Fragen der Kerntheorie benutzt haben.

Der Operator des Gesamtdrehimpulses in Einheiten $\hbar$ wird mit $\hat{\mathfrak{J}}$ bezeichnet. Seine Projektionen $\hat{J}_x$, $\hat{J}_y$, $\hat{J}_z$ auf die Koordinatenachsen genügen der Vertauschungsrelation

$$\hat{J}_x \hat{J}_y - \hat{J}_y \hat{J}_x = i \hat{J}_z \tag{A 1.1.1}$$

und den beiden analogen, die sich daraus durch zyklische Vertauschung der Indizes x, y, z ergeben. Diese Vertauschungsrelationen lassen sich in der Vektorform kurz schreiben $[\hat{\mathfrak{J}}, \hat{\mathfrak{J}}] = i \hat{\mathfrak{J}}$.

Die Operatoren $\hat{\mathfrak{J}}^2 = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2$ und $\hat{J}_z$ sind kommutativ und besitzen deshalb ein gemeinsames System von Eigenfunktionen ψ_{JM}, die den Gleichungen

$$\hat{\mathfrak{J}}^2 \psi_{JM} = J(J+1)\, \psi_{JM},$$
$$\hat{J}_z \psi_{JM} = M\, \psi_{JM}$$

genügen. Die Eigenfunktionen ψ_{JM} hängen von den Variablen ab, auf die die Operatoren $\hat{\mathfrak{J}}^2$ und $\hat{J}_z$ wirken. Als Beispiele betrachten wir 3 Spezialfälle:

a) Der Operator des Drehimpulses $\hat{\mathfrak{J}}$ soll nur der Bahnbewegung des Teilchens entsprechen und folglich nur auf die Winkelvariablen ϑ und φ wirken. In diesem Fall ist

$$\left.\begin{aligned} \hat{J}_z &= -i \frac{\partial}{\partial \varphi} \equiv \hat{L}_z, \\ \hat{J}_x &= i \left\{ \sin\varphi \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \cot\vartheta \cos\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\} \equiv \hat{L}_x, \\ \hat{J}_y &= -i \left\{ \cos\varphi \frac{\partial}{\partial \vartheta} - \cot\vartheta \sin\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\} \equiv \hat{L}_y, \end{aligned}\right\} \tag{A 1.1.2}$$

und die Eigenfunktionen der Operatoren $\hat{\mathfrak{L}}^2$ und $\hat{L}_z$ sind die (LAPLACEschen) Kugelfunktionen Y_{LM}. Bei $M \geqq 0$ gilt

$$Y_{LM}(\vartheta, \varphi) = \frac{(-1)^{L+M}}{2^L(L!)} \left[\frac{(2L+1)(L-M)!}{4\pi(L+M)!}\right]^{1/2} \times$$
$$\times (\sin\vartheta)^M \frac{d^{L+M}}{(d\cos\vartheta)^{L+M}} (\sin\vartheta)^{2L} \exp(i M \varphi), \qquad \text{(A 1.1.2a)}$$

wobei die Quantenzahl L die Werte $0, 1, \ldots, \infty$ und die Quantenzahl M die Werte $M = 0, 1, \ldots, L$ annehmen.

Die Kugelfunktionen für die negativen M-Werte $-1, -2, \ldots$ werden durch die Bedingung

$$Y^*_{LM} = (-1)^M Y_{L,-M}$$

definiert. Die Y_{LM} bilden ein vollständiges Orthonormalsystem:

$$\int Y^*_{LM} Y_{L'M'} d\Omega = \delta_{LL'} \delta_{MM'}. \qquad \text{(A 1.1.3)}$$

Deshalb kann jede beliebige Funktion $F(\vartheta, \varphi)$, welche der Bedingung genügt, daß das Integral

$$\int |F(\vartheta, \varphi)|^2 d\Omega$$

beschränkt ist, als Linearkombination von Kugelfunktionen dargestellt werden:

$$F(\vartheta, \varphi) = \sum_{L,M} A_{LM} Y_{LM}(\vartheta, \varphi),$$

wobei

$$A_{LM} = \int F(\vartheta, \varphi) Y^*_{LM} d\Omega$$

ist. Unter anderem haben wir die Entwicklung einer ebenen Welle, die sich in Richtung der z-Achse ausbreitet, benutzt:

$$e^{ikz} = e^{ikr\cos\vartheta} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l \sqrt{4\pi(2l+1)}\, j_l(kr)\, Y_{l0}(\vartheta). \qquad \text{(A 1.1.4)}$$

Hierbei bedeutet $j_l(kr) \equiv \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} J_{l+1/2}(kr)$ die sphärische BESSEL-Funktion vom Index l.

Benutzt man das Additionstheorem der Kugelfunktionen

$$\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} Y_{l0}(\Theta) = \sum_{m=-l}^{l} Y^*_{lm}(\vartheta_1, \varphi_1) Y_{lm}(\vartheta_2, \varphi_2),$$

wobei Θ der Winkel zwischen den Richtungen ist, welche durch die Winkel ϑ_1, φ_1 und ϑ_2, φ_2 bestimmt werden, so erhält man aus (A 1.1.4) die Zerlegung einer ebenen Welle, die sich in beliebiger Richtung unter den Winkeln Θ, Φ ausbreitet:

$$e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} i^l j_l(kr) Y^*_{lm}(\Theta, \Phi) Y_{lm}(\vartheta, \varphi). \qquad \text{(A 1.1.4a)}$$

Die in (A 1.1.4) eingehende Kugelfunktion kann durch ein LEGENDREsches Polynom $P_l(\cos\vartheta)$ ausgedrückt werden:

$$Y_{l0}(\vartheta) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos\vartheta).$$

b) Wir betrachten nun den Fall, daß der Drehimpulsoperator $\hat{\mathfrak{J}}$ dem Spin $J = {}^1/_2$ entspricht. In einer Darstellung, in welcher der Operator $\hat{J}_z$ diagonal ist, können die Operatoren der Projektionen von $\hat{\mathfrak{J}}$ durch zweireihige Matrizen dargestellt werden:

$$\hat{J}_z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \equiv \frac{\sigma_z}{2}, \qquad \hat{J}_x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \equiv \frac{\sigma_x}{2}, \qquad \hat{J}_y = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix} \equiv \frac{\sigma_y}{2}.$$

Die Eigenfunktionen der Operatoren $\hat{\mathfrak{J}}^2 \equiv \vec{\sigma}^2/4$ und $\hat{J}_z \equiv \sigma_z/2$, die den Gleichungen

$$\hat{\mathfrak{J}}^2 \chi_{{}^1/_2 m}(s_z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 1\right)\chi_{{}^1/_2 m}(s_z),$$
$$\hat{J}_z\, \chi_{{}^1/_2 m}(s_z) = m\, \chi_{{}^1/_2 m}(s_z)$$

genügen, werden als *Spinfunktionen* bezeichnet. Die Quantenzahl m nimmt die beiden Werte ${}^1/_2$ und $-{}^1/_2$ an.

Die Spinfunktionen $\chi_{{}^1/_2 m}(s_z)$ sind Funktionen der Spinvariablen s_z, die nur die beiden Werte ${}^1/_2$ und $-{}^1/_2$ annimmt. Dabei ist

$$\left.\begin{aligned} \chi_{{}^1/_2\, {}^1/_2}\left(\frac{1}{2}\right) &= \alpha, & \chi_{{}^1/_2\, {}^1/_2}\left(-\frac{1}{2}\right) &= 0,\\ \chi_{{}^1/_2,\, -{}^1/_2}\left(\frac{1}{2}\right) &= 0, & \chi_{{}^1/_2,\, -{}^1/_2}\left(-\frac{1}{2}\right) &= \beta. \end{aligned}\right\} \tag{A 1.1.5}$$

Die Spinfunktionen (A 1.1.5) sind orthonormal:

$$\sum_{s_z = {}^1/_2,\, -{}^1/_2} \chi^*_{{}^1/_2 m'}(s_z)\, \chi_{{}^1/_2 m}(s_z) = \delta_{m m'}. \tag{A 1.1.6}$$

Die Spinfunktionen können auch in Matrizenform geschrieben werden:

$$\chi_{{}^1/_2\, {}^1/_2} = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}, \qquad \chi_{{}^1/_2,\, -{}^1/_2} = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}. \tag{A 1.1.7}$$

In dieser Form läßt sich die Orthonormalbedingung der Wellenfunktionen (A 1.1.7) folgendermaßen schreiben:

$$\chi^+_{{}^1/_2 m}\, \chi_{{}^1/_2 m'} = \delta_{m m'}.$$

c) Betrachten wir schließlich den Fall, daß der Drehimpulsoperator dem Spin $J = 1$ entspricht.

In einer Darstellung, in welcher der Operator $\hat{J}_z$ diagonal ist, werden die Projektionen von $\hat{\mathfrak{J}}$ durch dreireihige Matrizen dargestellt:

$$\hat{J}_x = s_x \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}, \qquad \hat{J}_y = s_y \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & -i & 0\\ i & 0 & -i\\ 0 & i & 0\end{pmatrix},$$

$$\hat{J}_z = s_z \equiv \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \tag{A 1.1.8}$$

Für den Operator $\hat{\mathfrak{s}}^2$ gilt dann

$$\hat{\mathfrak{s}}^2 = s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Spinwellenfunktionen der Operatoren $\hat{\mathfrak{s}}^2$ und $\hat{s}_z$ können als Vektoren geschrieben werden:

$$\mathfrak{e}_{1,1} = \mathfrak{e}_1, \qquad \mathfrak{e}_{1,0} = \mathfrak{e}_0, \qquad \mathfrak{e}_{1,-1} = \mathfrak{e}_{-1}. \tag{A 1.1.9}$$

Mit (A 1.1.8) errechnen sich die Spinfunktionen durch die Matrizen

$$\chi_{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{10} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \chi_{1,-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dabei sind die Einheitsvektoren $\mathfrak{e}_p$ durch die Beziehungen

$$\mathfrak{e}_{\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathfrak{e}_x \pm i\, \mathfrak{e}_y), \qquad \mathfrak{e}_0 = \mathfrak{e}_z$$

definiert. Die $\mathfrak{e}_x$, $\mathfrak{e}_y$ und $\mathfrak{e}_z$ sind die Einheitsvektoren in Richtung der Koordinatenachsen des kartesischen Koordinatensystems. Die Einheitsvektoren $\mathfrak{e}_p$ genügen den Orthogonalitätsrelationen

$$\mathfrak{e}_p\, \mathfrak{e}_{p'}^* = \delta_{p p'}, \qquad p, p' = 0, 1, -1, \tag{A 1.1.9a}$$

wobei gilt

$$\mathfrak{e}_p^* = (-1)^p\, \mathfrak{e}_{-p}. \tag{A 1.1.9b}$$

Jeder Vektor $\mathfrak{A}$ kann in der Form

$$\mathfrak{A} = \sum_{p=0,\, \pm 1} A_p\, \mathfrak{e}_p^* = \sum_p (-1)^p A_p\, \mathfrak{e}_{-p} \tag{A 1.1.10}$$

dargestellt werden, wobei $A_p = \mathfrak{A}\, \mathfrak{e}_p$ ist, so daß gilt

$$A_{\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (A_x \pm i\, A_y), \qquad A_0 = A_z. \tag{A 1.1.11}$$

Wenn man aus den Operatoren $\hat{J}_x$, $\hat{J}_y$, $\hat{J}_z$, die den Vertauschungsrelationen (A 1.1.1) genügen, drei andere Operatoren bildet:

$$\hat{J}_0 = \hat{J}_z, \quad \hat{J}_\pm = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{J}_x \pm i\, \hat{J}_y), \tag{A 1.1.12}$$

so läßt sich die Wirkung dieser Operatoren auf die Eigenfunktionen ψ_{JM} der Operatoren $\hat{\mathfrak{J}}^2$ und $\hat{J}_z$ durch einfache Gleichungen ausdrücken:

$$\left.\begin{aligned} \hat{J}_0\, \psi_{JM} &= M\, \psi_{JM}, \\ \hat{J}_\pm\, \psi_{JM} &= \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(J \mp M)(J \pm M + 1)}\; \psi_{J,\, M \pm 1}. \end{aligned}\right\} \tag{A 1.1.13}$$

Die Operatoren $\hat{J}_+$ und $\hat{J}_-$ vergrößern bzw. verkleinern die magnetische Quantenzahl um 1.

Unter Berücksichtigung von (A 1.1.12) und (A 1.1.13) kann man schreiben

$$\hat{J}_z\, \psi_{JM} = M\, \psi_{JM}, \tag{A 1.1.14}$$

$$\hat{J}_x \psi_{JM} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{J}_- - \hat{J}_+)\, \psi_{JM} = \frac{1}{2} \{\sqrt{(J-M)(J+M+1)}\, \psi_{J,M+1} + \sqrt{(J+M)(J-M+1)}\, \psi_{J,M-1}\}, \tag{A 1.1.15}$$

$$\hat{J}_y\, \psi_{JM} \equiv \frac{i}{\sqrt{2}} (\hat{J}_- + \hat{J}_+)\, \psi_{JM} = \frac{i}{2} \{\sqrt{(J-M)(J+M+1)}\, \psi_{J,M+1} - \sqrt{(J+M)(J-M+1)}\, \psi_{J,M-1}\}. \tag{A 1.1.16}$$

Mit den Gln. (A 1.1.13)—(A 1.1.16) lassen sich die Matrixelemente von Drehimpulsoperatoren leicht berechnen.

Führt man noch die Variable $p = 0, \pm 1$ ein, so kann man (A 1.1.13) in der Kurzform

$$\hat{J}_p\, \psi_{JM} = (-1)^p \sqrt{J(J+1)}\, (J\,1,\, M+p,\, -p \,|\, J\,M)\, \psi_{J,\,M+p} \tag{A 1.1.17}$$

schreiben, wobei $(J\,1,\, M+p,\, -p \,|\, J\,M)$ Vektoradditionskoeffizienten sind, die wir im folgenden Abschnitt definieren werden.

Unter Benutzung von (A 1.1.10) kann man nun schreiben

$$\hat{\mathfrak{J}}\, \psi_{JM} = \sum_{p=0,\,\pm 1} (-1)^p\, \hat{J}_p\, \mathfrak{e}_{-p}\, \psi_{JM} = \sqrt{J(J+1)} \sum_p (J\,1,\, M+p,\, -p \,|\, J\,M)\, \psi_{J,\,M+p}\, \mathfrak{e}_{-p}. \tag{A 1.1.18}$$

Ein Spezialfall der Gl. (A 1.1.10) ist die Darstellung des Radiusvektors:

$$\mathfrak{r} = r \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \sum_p (-1)^p\, Y_{1p}\, \mathfrak{e}_{-p}. \tag{A 1.1.19}$$

1.2. Vektoraddition von Drehimpulsen

Wir betrachten ein System, das aus 2 Untersystemen besteht und dessen Drehimpuls ein Bewegungsintegral ist. Der Drehimpulsoperator des einen Untersystems sei $\hat{j}_1$, der des anderen Untersystems $\hat{j}_2$. Wenn diese beiden Operatoren miteinander kommutieren, so kann man den Zustand des Gesamtsystems durch einen Drehimpuls charakterisieren, der sich additiv aus den Drehimpulsen der beiden Untersysteme zusammensetzt. Eine solche Situation entsteht z. B. bei der gemeinsamen Betrachtung des Spins und des Bahndrehimpulses eines Teilchens (in diesem Fall wirkt der Operator des Bahndrehimpulses auf die Winkelvariablen und der Spinoperator auf die Spinvariablen, und die beiden Operatoren sind kommutativ), bei der Betrachtung der Bahndrehimpulse oder der Spins zweier Teilchen usw.

In allen diesen Fällen kann der Zustand des Gesamtsystems durch den Satz der Quantenzahlen j_1, j_2, m_1, m_2 beschrieben werden, die für jedes der

Untersysteme das Quadrat des Drehimpulses und seine Projektion auf die z-Achse bestimmen. Man kann aber auch den Satz der Quantenzahlen J, M, j_1, j_2 benutzen, die den Gesamtdrehimpuls und seine Projektion auf die z-Achse für das Gesamtsystem und die Drehimpulse der einzelnen Untersysteme bestimmen.

Die Drehimpulsquantenzahl J des Gesamtsystems kann folgende Werte annehmen, die durch die Regel der *Vektoraddition* festgelegt werden:

$$J = j_1 + j_2, \quad j_1 + j_2 - 1, \quad \ldots, \quad |j_1 - j_2|$$

oder

$$|j_1 - j_2| \leqq J \leqq j_1 + j_2. \tag{A 1.2.1}$$

Die Beziehung (A 1.2.1) schreiben wir kurz $\Delta(j_1, j_2, J)$ und bezeichnen sie als *Dreiecksregel.*

Die Eigenfunktionen des Gesamtdrehimpulses lassen sich als Linearkombination von Produkten der Eigenfunktionen der Operatoren $\hat{\mathfrak{j}}_1$ und $\hat{\mathfrak{j}}_2$ darstellen:

$$\Phi_{j_1 j_2 JM} = \sum_{m_1, m_2} (j_1\, j_2\, m_1\, m_2 \,|\, J\, M)\, \psi_{j_1 m_1}\, \psi_{j_2 m_2}. \tag{A 1.2.2}$$

Die zu (A 1.2.2) inverse Transformation lautet

$$\psi_{j_1 m_1}\, \psi_{j_2 m_2} = \sum_{J=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} (j_1\, j_2\, m_1\, m_2 \,|\, J\, M)\, \Phi_{j_1 j_2 JM}. \tag{A 1.2.3}$$

Die Koeffizienten $(j_1\, j_2\, m_1\, m_2 \,|\, J\, M)$ der Linearkombinationen (A 1.2.2) und (A 1.2.3) sind reelle Zahlen und werden als *Vektoradditionskoeffizienten* oder CLEBSCH-GORDAN-*Koeffizienten* bezeichnet. Für $M \neq m_1 + m_2$ sind sie gleich Null. Deshalb erstreckt sich in (A 1.2.2) die Summe faktisch nur über eine der beiden Quantenzahlen m_1 oder m_2; die Schreibweise als Doppelsumme ist mitunter aus formalen Gründen zweckmäßig.

In den Tab. 33, 34 und 35 sind die Werte der Vektoradditionskoeffizienten für $j_2 = {}^1/_2$, 1 sowie ein Teil der Koeffizienten für $j_2 = 2$ angeführt. Tabellen[1]) für $j_2 = {}^3/_2$ und $j_2 = 2$ findet man bei CONDON und SHORTLEY [A,1].

Tabelle 33

Die Vektoradditionskoeffizienten $(j_1\, {}^1/_2\, m_1\, m_2 \,|\, J\, M)$

J	$m_2 = {}^1/_2$	$m_2 = -{}^1/_2$
$j_1 + {}^1/_2$	$\left(\dfrac{j_1 + M + {}^1/_2}{2j_1 + 1}\right)^{1/2}$	$\left(\dfrac{j_1 - M + {}^1/_2}{2j_1 + 1}\right)^{1/2}$
$j_1 - {}^1/_2$	$-\left(\dfrac{j_1 - M + {}^1/_2}{2j_1 + 1}\right)^{1/2}$	$\left(\dfrac{j_1 + M + {}^1/_2}{2j_1 + 1}\right)^{1/2}$

[1]) Wir benutzen eine etwas andere Bezeichnung für die CLEBSCH-GORDAN-Koeffizienten als CONDON und SHORTLEY, die $(j_1\, j_2\, m_1\, m_2 \,|\, j_1\, j_2\, J\, M)$ an Stelle unserer kürzeren Bezeichnung $(j_1\, j_2\, m_1\, m_2 \,|\, J\, M)$ schreiben.

Tabelle 34

Die Vektoradditionskoeffizienten $(j_1\, 1\, m_1\, m_2 \mid J M)$

J	$m_2 = 1$	$m_2 = 0$	$m_2 = -1$
$j_1 + 1$	$\left\{\frac{(j_1+M)(j_1+M+1)}{(2j_1+1)(2j_1+2)}\right\}^{1/2}$	$\left\{\frac{(j_1-M+1)(j_1+M+1)}{(2j_1+1)(j_1+1)}\right\}^{1/2}$	$\left\{\frac{(j_1-M)(j_1-M+1)}{(2j_1+1)(2j_1+2)}\right\}^{1/2}$
j_1	$-\left\{\frac{(j_1+M)(j_1-M+1)}{2j_1(j_1+1)}\right\}^{1/2}$	$\frac{M}{\sqrt{j_1(j_1+1)}}$	$\left\{\frac{(j_1-M)(j_1+M+1)}{2j_1(j_1+1)}\right\}^{1/2}$
$j_1 - 1$	$\left\{\frac{(j_1-M)(j_1-M+1)}{2j_1(2j_1+1)}\right\}^{1/2}$	$-\left\{\frac{(j_1-M)(j_1+M)}{j_1(2j_1+1)}\right\}^{1/2}$	$\left\{\frac{(j_1+M)(j_1+M+1)}{2j_1(2j_1+1)}\right\}^{1/2}$

Tabelle 35

Die Vektoradditionskoeffizienten $(j_1\, 2\, m_1\, 0 \mid J M)$

$J = j_1 + 2$	$\left\{\frac{3(j_1-M+2)(j_1-M+1)(j_1+M+2)(j_1+M+1)}{(2j_1+1)(2j_1+2)(2j_1+3)(j_1+2)}\right\}^{1/2}$
$J = j_1 + 1$	$M\left\{\frac{3(j_1-M+1)(j_1+M+1)}{j_1(2j_1+1)(j_1+1)(j_1+2)}\right\}^{1/2}$
$J = j_1$	$\frac{3M^2 - j_1(j_1+1)}{\sqrt{(2j_1-1)j_1(j_1+1)(2j_1+3)}}$
$J = j_1 - 1$	$-M\left\{\frac{3(j_1-M)(j_1+M)}{(j_1-1)j_1(2j_1+1)(j_1+1)}\right\}^{1/2}$
$J = j_1 - 2$	$\left\{\frac{3(j_1-M)(j_1-M-1)(j_1+M)(j_1+M-1)}{(2j_1-2)(2j_1-1)j_1(2j_1+1)}\right\}^{1/2}$

Es ist manchmal nützlich zu wissen, daß bei $J = j_1 + j_2$ die Beziehung $(j_1\, j_2\, j_1\, j_2 \mid J\, J) = (j_1\, j_2,\, -j_1,\, -j_2 \mid J,\, -J) = 1$ gilt.

Die Wellenfunktionen $\Phi_{j_1 j_2 JM}$ hängen von den Variablen ab, von denen die Funktionen $\psi_{j_1 m_1}$ und $\psi_{j_2 m_2}$ abhängen. Wenn speziell die eine der Funktionen von den Spinvariablen und die zweite von den Winkeln abhängt, so nennt man die entsprechende Funktion $\Phi_{j_1 j_2 JM}$ *Kugelfunktion mit Spin* [A, 2] oder *Spin-Bahn-Funktion* (vgl. den folgenden Abschnitt).

Die Vektoradditionskoeffizienten genügen den Symmetriebedingungen

$$(j_1\, j_2\, m_1\, m_2 \mid J M) = (-1)^{j_1+j_2-J} (j_1\, j_2,\, -m_1,\, -m_2 \mid J,\, -M), \tag{A 1.2.4}$$

$$(j_1\, j_2\, m_1\, m_2 \mid J M) = (-1)^{j_1+j_2-J} (j_2\, j_1\, m_2\, m_1 \mid J M), \tag{A 1.2.5}$$

$$\sqrt{2j_1+1}\,(j_1\, j_2\, m_1\, m_2 \mid J M) = (-1)^{j_2+m_2} \sqrt{2J+1}\,(J\, j_2,\, -M,\, m_2 \mid j_1,\, -m_1), \tag{A 1.2.6}$$

$$\sqrt{2j_2+1}\,(j_1\,j_2\,m_1\,m_2\,|\,J M) = (-1)^{j_1-m_1}\sqrt{2J+1}\,(j_1\,J\,m_1,\ -M\,|\,j_2,\ -m_2), \tag{A 1.2.7}$$

$$\sqrt{2j_1+1}\,(j_1\,j_2\,m_1\,m_2\,|\,J M) = (-1)^{j_1-J+m_2}\sqrt{2J+1}\,(j_2\,J\,m_2,\ -M\,|\,j_1,\ -m_1) \tag{A 1.2.8}$$

sowie folgenden Orthogonalitätsbedingungen:

$$\sum_{m_1, m_2} (j_1\,j_2\,m_1\,m_2\,|\,J M)\,(j_1\,j_2\,m_1\,m_2\,|\,J' M') = \delta_{JJ'}\,\delta_{MM'}, \tag{A 1.2.9}$$

$$\sum_{J=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \sum_{M} (j_1\,j_2\,m_1\,m_2\,|\,J M)\,(j_1\,j_2\,m_1'\,m_2'\,|\,J M) = \delta_{m_1 m_1'}\,\delta_{m_2 m_2'}, \tag{A 1.2.10}$$

$$\sum_{m_1, M} (j_1\,j_2\,m_1\,m_2\,|\,J M)\,(j_1\,j_2'\,m_1\,m_2'\,|\,J M) = \frac{2J+1}{2j_2+1}\,\delta_{j_2 j_2'}\,\delta_{m_2 m_2'}. \tag{A 1.2.11}$$

Ein Spezialfall der letzten Formel ist die Summenregel

$$\sum_{M} |(j_1\,j_2\,0\,M\,|\,J M)|^2 = \frac{2J+1}{2j_1+1}. \tag{A 1.2.12}$$

Wir wollen noch die Werte einiger Vektoradditionskoeffizienten angeben, die häufig auftreten:

$$(j_1\,0\,m_1\,m_2\,|\,J,\ m_1+m_2) = \delta_{j_1 J}\,\delta_{m_2 0}. \tag{A 1.2.13}$$

Wenn j_1 und j_2 die ganzzahligen Werte l_1 und l_2 annehmen, so folgt aus (A 1.2.4)

$$(l_1\,l_2\,0\,0\,|\,L\,0) = 0 \quad \text{für} \quad l_1+l_2+L \neq \text{gerade Zahl.} \tag{A 1.2.14}$$

Ist $l_1 + l_2 + L = 2g$ eine gerade Zahl, so gilt

$$(l_1\,l_2\,0\,0\,|\,L\,0) = (-1)^{g+L}\left(2L+1\right)^{1/2} \frac{g!}{(g-l_1)!\,(g-l_2)!\,(g-L)!}\,f(l_1\,l_2\,L), \tag{A 1.2.15}$$

wobei gesetzt wurde

$$f(l_1\,l_2\,L) \equiv \left[\frac{(l_1+l_2-L)!\,(l_1-l_2+L)!\,(-l_1+l_2+L)!}{(l_1+l_2+L+1)!}\right]^{1/2}.$$

Die allgemeine Definitionsgleichung für die Vektoradditionskoeffizienten lautet

$$\begin{aligned}(j_1\,j_2\,m_1\,m_2\,|\,J M) &= \\ &= \delta_{M, m_1+m_2}\left[\frac{(2J+1)\,(j_1+j_2-J)!\,(j_1-j_2+J)!\,(J+j_2-j_1)!}{(j_1+j_2+J+1)!}\right]^{1/2} \times \\ &\times \sum_n \frac{(-1)^n\,[(j_1+m_1)!\,(j_1-m_1)!\,(j_2+m_2)!\,(j_2-m_2)!\,(J+M)!\,(J-M)!]^{1/2}}{n!\,(j_1+j_2-J-n)!\,(j_1-m_1-n)!\,(j_2+m_2-n)!\,(J-j_2+m_1+n)!\,(J-j_1-m_2+n)!}.\end{aligned} \tag{A 1.2.16}$$

Die Vektoradditionskoeffizienten sind für ganz- und halbzahlige Werte der Quantenzahlen j_1, m_1, j_2 und m_2 definiert mit den Bedingungen: $j_1 - m_1$ und $j_2 - m_2$ müssen ganze Zahlen sein, und es muß $|j_1 - j_2| \leqq J \leqq j_1 + j_2$

gelten. Die Summe über n in (A 1.2.16) wird so weit erstreckt, daß die Argumente der Fakultäten nicht negativ werden. Die Zahl der Glieder in der Summe ist um Eins größer als die kleinste positive der folgenden 9 Zahlen:

$$j_1 + m_1, \quad j_1 - m_1, \quad j_2 + m_2, \quad j_2 - m_2, \quad J + M, \quad J - M,$$
$$j_1 + j_2 - J, \quad j_1 + J - j_2, \quad j_2 + J - j_1. \qquad \text{(A 1.2.17)}$$

Der Vektoradditionskoeffizient ist stets gleich Null, wenn eine der Zahlen (A 1.2.17) negativ ist. Ist eine der Zahlen (A 1.2.17) Null, so reduziert sich die Summe auf ein Glied.

1.3. Spin-Bahn-Funktionen oder Kugelfunktionen mit Spin

Untersucht man die Bewegung von Teilchen mit dem Spin $1/2$ in einem zentralsymmetrischen Feld, so muß man die Wellenfunktionen der Operatoren $\hat{\mathfrak{j}}^2$, $\hat{j}_z$, $\hat{\mathfrak{l}}^2$, $\hat{\mathfrak{s}}^2$ benutzen, wobei gilt

$$\hat{\mathfrak{l}} = -i[\mathfrak{r}\,\nabla]; \qquad \hat{\mathfrak{s}} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}; \qquad \hat{\mathfrak{j}} = \hat{\mathfrak{l}} + \frac{\vec{\sigma}}{2}.$$

$\vec{\sigma}$ ist ein Operator, der auf die Spinfunktionen wirkt. Nach den Ergebnissen des vorhergehenden Abschnitts können die Funktionen $\Phi_{l\,{}^1\!/_2\,jm}$ durch die Kugelfunktionen Y_{lm} und die Spinfunktionen $\chi_{{}^1\!/_2\,\mu}$ ausgedrückt werden:

$$\Phi_{l\,{}^1\!/_2\,jm} = \sum_{\mu} \left(l\,\frac{1}{2},\, m-\mu,\, \mu \,\middle|\, j\,m\right) Y_{l,\,m-\mu}(\vartheta,\varphi)\,\chi_{{}^1\!/_2\,\mu}(s_z). \qquad \text{(A 1.3.1)}$$

Werden hier die Vektoradditionskoeffizienten eingesetzt, so finden wir einen expliziten Ausdruck für die Kugelfunktionen mit Spin:

$$\Phi_{l,\,{}^1\!/_2,\,l+{}^1\!/_2,\,m} = \sqrt{\frac{l+m+{}^1\!/_2}{2l+1}}\,Y_{l,\,m-{}^1\!/_2}\,\chi_{{}^1\!/_2\,{}^1\!/_2} + \sqrt{\frac{l-m+{}^1\!/_2}{2l+1}}\,Y_{l,\,m+{}^1\!/_2}\,\chi_{{}^1\!/_2,\,-{}^1\!/_2},$$
$$\Phi_{l,\,{}^1\!/_2,\,l-{}^1\!/_2,\,m} = -\sqrt{\frac{l-m+{}^1\!/_2}{2l+1}}\,Y_{l,\,m-{}^1\!/_2}\,\chi_{{}^1\!/_2\,{}^1\!/_2} + \sqrt{\frac{l+m+{}^1\!/_2}{2l+1}}\,Y_{l,\,m+{}^1\!/_2}\,\chi_{{}^1\!/_2,\,-{}^1\!/_2}.$$

Die Spin-Bahn-Funktionen oder Kugelfunktionen mit Spin sind auch Eigenfunktionen des Operators $\vec{\sigma}\,\mathfrak{l}$ und genügen den Gleichungen

$$(\vec{\sigma}\,\mathfrak{l})\,\Phi_{l\,{}^1\!/_2\,jm} = \left(j-\frac{1}{2}\right)\Phi_{l\,{}^1\!/_2\,jm} \quad \text{für} \quad l = j-\frac{1}{2}, \qquad \text{(A 1.3.2a)}$$

$$(\vec{\sigma}\,\mathfrak{l})\,\Phi_{l\,{}^1\!/_2\,jm} = -\left(j+\frac{3}{2}\right)\Phi_{l\,{}^1\!/_2\,jm} \quad \text{für} \quad l = j+\frac{1}{2}. \qquad \text{(A 1.3.2b)}$$

Zur Berechnung der Eigenwerte einiger anderer Operatoren, die in der Kerntheorie auftreten, benutzt man die Operatoridentität

$$(\vec{\sigma}\,\mathfrak{A})\,(\vec{\sigma}\,\mathfrak{B}) = \mathfrak{A}\,\mathfrak{B} + i\,\vec{\sigma}\,[\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}], \qquad \text{(A 1.3.3)}$$

wobei $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei beliebige Vektoroperatoren sind, die auf die Koordinatenfunktionen wirken.

Berücksichtigt man die Beziehung $[\hat{\mathfrak{l}}, \hat{\mathfrak{l}}] = i\,\hat{\mathfrak{l}}$, so folgt aus der Identität (A 1.3.3) unmittelbar

$$\vec{\sigma}\,\mathfrak{l} = \mathfrak{l}^2 - (\vec{\sigma}\,\mathfrak{l})\,(\vec{\sigma}\,\mathfrak{l}). \qquad \text{(A 1.3.4)}$$

Weiterhin kann man aus (A 1.3.3) die Beziehung

$$(\mathfrak{r}\vec{\sigma})\,(\vec{\sigma}\,\mathfrak{l}) = (\mathfrak{r}\vec{\sigma})\,(\mathfrak{r}\,\nabla) - r^2(\vec{\sigma}\,\nabla)$$

oder mit Hilfe von

$$\sigma_r = \frac{\mathfrak{r}\vec{\sigma}}{r}, \quad \sigma_r^2 = 1 \qquad \text{(A 1.3.5)}$$

die Beziehung

$$\vec{\sigma}\,\nabla = \sigma_r\left\{\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\vec{\sigma}\,\mathfrak{l}}{r}\right\} \qquad \text{(A 1.3.6)}$$

erhalten. Unter Benutzung von (A 1.3.6) und (A 1.3.3) läßt sich folgende Relation zeigen:

$$\sigma_r(\vec{\sigma}\,\mathfrak{l})\,\sigma_r = \sigma_r(\vec{\sigma}\,\mathfrak{l})\,\frac{(\vec{\sigma}\,\mathfrak{r})}{r} = -(\vec{\sigma}\,\mathfrak{l} + 2). \qquad \text{(A 1.3.7)}$$

Aus der Operatorgleichung (A 1.3.7) ergibt sich folgender Satz: Ist $\Phi_{l\,{}^1\!/_2\,j\,m}$ eine normierte Eigenfunktion des Operators $\vec{\sigma}\,\mathfrak{l}$ mit dem Eigenwert A, so ist die Funktion $\sigma_r\,\Phi_{l\,{}^1\!/_2\,j\,m}$ ebenfalls eine normierte Eigenfunktion dieses Operators mit dem Eigenwert $-(A+2)$.

Benutzt man dies sowie die Gl. (A 1.3.2), so kann man schreiben

$$(\vec{\sigma}\,\mathfrak{l})\,(\sigma_r\,\Phi_{l\,{}^1\!/_2\,j\,m}) = -\left(j + \frac{3}{2}\right)(\sigma_r\,\Phi_{l\,{}^1\!/_2\,j\,m}) \quad \text{für} \quad l = j - \frac{1}{2}, \qquad \text{(A 1.3.8a)}$$

$$(\vec{\sigma}\,\mathfrak{l})\,(\sigma_r\,\Phi_{l\,{}^1\!/_2\,j\,m}) = \left(j - \frac{1}{2}\right)(\sigma_r\,\Phi_{l\,{}^1\!/_2\,j\,m}) \quad \text{für} \quad l = j + \frac{1}{2}. \qquad \text{(A1.3.8b)}$$

Wird (A 1.3.8) mit (A 1.3.2) verglichen, so sieht man, daß

$$\sigma_r\,\Phi_{l\,{}^1\!/_2\,j\,m} = \Phi_{l+1,\,{}^1\!/_2\,j\,m} \quad \text{für} \quad l = j - {}^1\!/_2,$$

$$\sigma_r\,\Phi_{l\,{}^1\!/_2\,j\,m} = \Phi_{l-1,\,{}^1\!/_2\,j\,m} \quad \text{für} \quad l = j + {}^1\!/_2$$

ist.

Die Wirkung des Operators σ_r auf die Wellenfunktion $\Phi_{l\,{}^1\!/_2\,j\,m}$ führt somit zum Umklappen des Nukleonenspins unter Erhaltung des Gesamtdrehimpulses.

1.4. Vektorkugelfunktionen

Mitunter ist es zweckmäßig, die sogenannten *Vektorkugelfunktionen*, d. h. die Eigenfunktionen des Operators $\hat{\mathfrak{J}} = \hat{\mathfrak{L}} + \hat{\mathfrak{S}}$, zu benutzen, wobei $\hat{\mathfrak{L}} = -i\,[\mathfrak{r}\,\nabla]$ der Operator des Bahndrehimpulses und $\hat{\mathfrak{S}}$ der Spinoperator (A 1.1.8) für den Spin 1 sind.

Die Vektorkugelfunktionen $\mathfrak{Y}_{JLm}$ werden durch die Kugelfunktionen Y_{LM} und die Funktionen $\mathfrak{e}_{1p}$ des Operators $\hat{\mathfrak{S}}$ definiert:[1])

$$\mathfrak{Y}_{JLm} = \sum_p (1\,L\,p,\, m - p\,|\,J\,m)\,\mathfrak{e}_{1p}\,Y_{L,\,m-p}(\vartheta, \varphi). \qquad \text{(A 1.4.1)}$$

---

[1]) Von Sorokin [A, 3] wurde eine etwas andere Methode zur Einführung der Vektorkugelfunktionen vorgeschlagen; vgl. auch [A, 4; A, 5; A, 6].

Die zu (A 1.4.1) inverse Transformation lautet

$$\mathfrak{e}_{1p} Y_{Lm} = \sum_{J=L,\, L\pm 1} (1 L m p \,|\, J, m+p)\, \mathfrak{Y}_{JL,\, m+p}. \qquad \text{(A 1.4.2)}$$

Die Vektorkugelfunktionen hängen von den Polarwinkeln ϑ, φ ab. Bei einer Drehung des Koordinatensystems transformieren sie sich nach einer irreduziblen Darstellung der dreidimensionalen Drehungsgruppe, d. h. nach der Darstellung $D^J_{mk}(\alpha, \beta, \gamma)$, sind somit keine Vektoren, sondern irreduzible Tensoren des Grades J mit der Parität $(-1)^{+1}$. Jedem Wert $J \geqq 1$ entsprechen drei linear unabhängige Tensoren J-ten Grades:

$$\mathfrak{Y}_{JJm}, \qquad \mathfrak{Y}_{J,\, J+1,\, m}, \qquad \mathfrak{Y}_{J,\, J-1,\, m}.$$

Die Parität des ersten der 3 Tensoren ist der Parität der übrigen beiden entgegengesetzt. Für $J = 0$ gibt es nur einen Tensor nullten Grades: $\mathfrak{Y}_{010} = -(4\pi)^{-1/2}\, \mathfrak{e}_r$, wobei $\mathfrak{e}_r$ der Einheitsvektor in Richtung des Radiusvektors ist.

Die Vektorkugelfunktionen sind Eigenfunktionen der Operatoren $\hat{\mathfrak{J}}^2 \equiv (\hat{\mathfrak{L}} + \hat{\mathfrak{S}})^2$ und $\hat{J}_z$ und genügen den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \hat{\mathfrak{J}}^2\, \mathfrak{Y}_{JLm} &= J(J+1)\, \mathfrak{Y}_{JLm}, \\ \hat{J}_z\, \mathfrak{Y}_{JLm} &= m\, \mathfrak{Y}_{JLm}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(A 1.4.3)}$$

Die Vektorkugelfunktionen bilden ein vollständiges Orthonormalsystem:

$$\int \mathfrak{Y}^{+}_{JLm}\, \mathfrak{Y}_{J'L'm'}\, d\Omega = \delta_{mm'}\, \delta_{JJ'}\, \delta_{LL'}. \qquad \text{(A 1.4.4)}$$

Deshalb kann ein beliebiges Vektorfeld $\mathfrak{B}(\mathfrak{r})$ in eine Reihe nach Vektorkugelfunktionen entwickelt werden:

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{r}) = \sum_{J,\, L,\, m} f_{JLm}(r)\, \mathfrak{Y}_{JLm}(\vartheta, \varphi). \qquad \text{(A 1.4.5)}$$

Die Koeffizienten der Reihe (A 1.4.5) besitzen wegen (A 1.4.4) die Form

$$f_{JLm}(r) = \int \mathfrak{B}(\mathfrak{r})\, \mathfrak{Y}^{+}_{JLm}\, d\Omega. \qquad \text{(A 1.4.6)}$$

Ein transversales ($\operatorname{div} \mathfrak{A} = 0$) Vektorpotential $\mathfrak{A}(\mathfrak{r})$ kann z. B. als Summe von magnetischen und elektrischen Multipolpotentialen dargestellt werden:

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{r}) = \mathfrak{u}_p\, e^{i\mathfrak{k}\mathfrak{r}} = \pi \sum_{J=1}^{\infty} \sum_{m} i^J \sqrt{(2J+1)}\, D^J_{mp}(R)\, \{\mathfrak{A}_M(J\, m) + i\, p\, \mathfrak{A}_E(J\, m)\}. \qquad \text{(A 1.4.7)}$$

Hierbei bestimmt $p = 1, -1$ die Zirkularpolarisation des Feldes; $D^J_{mp}(R)$ entspricht der Drehung der Vektoren $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{u}_p$ in die Richtung der Einheits-

vektoren des Koordinatensystems, in dem das Vektorpotential betrachtet wird:

$$\mathfrak{A}_M(J\,m) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, j_J(k\,r)\, \mathfrak{Y}_{J\,J\,m}, \tag{A 1.4.8}$$

$$\mathfrak{A}_E(J\,m) = \sqrt{\frac{2J}{\pi(2J+1)}}\, j_{J+1}(k\,r)\, \mathfrak{Y}_{J,\,J+1,\,m} - \sqrt{\frac{2(J+1)}{\pi(2J+1)}}\, j_{J-1}(k\,r)\, \mathfrak{Y}_{J,\,J-1,\,m}. \tag{A 1.4.9}$$

Hierbei wird mit $j_J(k\,r)$ die sphärische Bessel-Funktion bezeichnet.

Wird die Gl. (A 1.1.18) für den Operator $\hat{\mathfrak{L}} = -i\,[\mathfrak{r}\,\nabla]$ berücksichtigt, so erhält man

$$\hat{\mathfrak{L}}\, Y_{Jm} = \sqrt{J(J+1)} \sum_{p=0,\,\pm 1} (1\,J,\, m+p,\, -p \mid J\,m)\, Y_{J,\,m+p}\, \mathfrak{e}_{-p}. \tag{A 1.4.10}$$

Jetzt können die Vektorkugelfunktionen mit Hilfe von (A 1.4.1) durch die Y_{Jm} ausgedrückt werden:

$$\mathfrak{Y}_{J\,J\,m} = \frac{\hat{\mathfrak{L}}}{\sqrt{J(J+1)}}\, Y_{Jm}. \tag{A 1.4.11}$$

Unter Benutzung von (A 1.4.11) schreiben wir das magnetische Multipolpotential in der Operatorform:

$$\mathfrak{A}_M(J\,m) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, j_J(k\,r)\, \frac{\hat{\mathfrak{L}}}{\sqrt{J(J+1)}}\, Y_{Jm}. \tag{A 1.4.12}$$

Da das elektrische Multipolpotential $\mathfrak{A}_E(J\,m)$ mit dem magnetischen Multipolpotential durch die Beziehung

$$\mathfrak{A}_E(J\,m) = \frac{1}{ik}\, \mathrm{rot}\, \mathfrak{A}_M(J\,m) \tag{A 1.4.13}$$

verknüpft ist, erhält man für das elektrische Multipolpotential

$$\mathfrak{A}_E(J\,m) = \frac{1}{i\,k} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\mathrm{rot}\, \hat{\mathfrak{L}}}{\sqrt{J(J+1)}}\, j_J(k\,r)\, Y_{Jm}. \tag{A 1.4.14}$$

Die Potentiale (A 1.4.12) und (A 1.4.13) genügen den Gleichungen

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\, \mathfrak{A}_\lambda(J\,m) = k^2\, \mathfrak{A}_\lambda(J\,m), \qquad \mathrm{div}\, \mathfrak{A}_\lambda(J\,m) = 0, \qquad \lambda = E,\, M. \tag{A 1.4.15}$$

Dem Potential $\mathfrak{A}_M(J\,m)$ entspricht eine *magnetische Multipolstrahlung*. Die elektrischen und magnetischen Feldstärken dieser Strahlung sind

$$\mathfrak{E}_M(J\,m) = i\,k\, \mathfrak{A}_M(J\,m), \qquad \mathfrak{H}_M(J\,m) = \mathrm{rot}\, \mathfrak{A}_M(J\,m). \tag{A 1.4.16}$$

Das elektrische Feld steht senkrecht zum Radiusvektor:

$$\mathfrak{r}\, \mathfrak{E}_M(J\,m) = 0.$$

Dem Potential $\mathfrak{A}_E(J\,m)$ entspricht eine *elektrische Multipolstrahlung*. Die elektrischen und magnetischen Feldstärken sind

$$\mathfrak{E}_E(J\,m) = i\,k\, \mathfrak{A}_E(J\,m), \qquad \mathfrak{H}_E(J\,m) = \mathrm{rot}\, \mathfrak{A}_E(J\,m). \tag{A 1.4.17}$$

Unter Berücksichtigung von (A 1.4.13), (A 1.4.15) und (A 1.4.16) haben wir

$$\mathfrak{E}_E(J\,m) = \mathfrak{H}_M(J\,m) = \operatorname{rot} \mathfrak{A}_M(J\,m), \qquad \mathfrak{E}_M(J\,m) = -\mathfrak{H}_E(J\,m) = i\,k\,\mathfrak{A}_M(J\,m).$$

Bei der elektrischen Multipolstrahlung ist die magnetische Feldstärke senkrecht zum Radiusvektor gerichtet:

$$\mathfrak{r}\,\mathfrak{H}_E = 0.$$

1.5. Rotation eines starren Körpers und die Eigenfunktionen des symmetrischen Kreisels

Die Orientierung eines starren Körpers im Raum wird durch die 3 Eulerschen Winkel α, β, γ festgelegt, welche die Lage der drei fest mit dem Körper verbundenen senkrecht aufeinanderstehenden Achsen ξ, η, ζ fixieren. Der Übergang vom ruhenden Koordinatensystem x, y, z zu dem mit dem Körper verbundenen System ξ, η, ζ wird durch die Drehungsoperation $R(\alpha, \beta, \gamma)$ verwirklicht, die als Produkt von drei aufeinanderfolgenden Drehungen $R(\gamma)$, $R(\beta)$, $R(\alpha)$ dargestellt werden kann: Durch $R(\alpha)$ wird die x-Achse um den Winkel α (um die z-Achse) in Richtung zur y-Achse gedreht; danach wird von $R(\beta)$ eine Drehung um die neue Lage der y-Achse um den Winkel β durchgeführt; die Operation $R(\gamma)$ bewirkt schließlich eine Drehung mit dem Winkel γ um die neue Lage der z-Achse.

Die Operatoren $R(\alpha)$, $R(\beta)$ und $R(\gamma)$ werden durch folgende Matrizen dargestellt:

$$R(\alpha) \equiv \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R(\beta) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & \sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix},$$

$$R(\gamma) \equiv \begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Der Rotationszustand eines starren Körpers als Ganzes wird in der Quantenmechanik durch Wellenfunktionen beschrieben, die von den 3 Eulerschen Winkeln abhängen. Ein starrer Körper mit axialer Symmetrie (symmetrischer Kreisel) kann sich in Rotationszuständen mit dem Drehimpuls J und der Projektion $J_z = M$ auf die unbewegliche Raumachse $0\,z$ und der Projektion $J_\zeta = K$ auf die Symmetrieachse des Kreisels befinden. Diese Zustände werden durch Wellenfunktionen $D^J_{MK}(\alpha, \beta, \gamma)$ charakterisiert, welche folgendem Gleichungssystem genügen:

$$\hat{\mathfrak{J}}^2 D^J_{MK} = J(J+1)\, D^J_{MK}, \qquad \hat{J}_z D^J_{MK} = M\, D^J_{MK}, \qquad \hat{J}_\zeta D^J_{MK} = K\, D^J_{MK}. \tag{A 1.5.1}$$

Die Zahl J nimmt hierbei ganz- oder halbzahlige Werte an, die Zahlen M und K die Werte $\pm J$, $\pm(J-1)$, ... Die Operatoren der Projektionen der

Drehimpulse auf die Achsen des ruhenden Koordinatensystems können in der Form

$$\left.\begin{aligned}\hat{J}_x &= -i\left(\sin\alpha\frac{\partial}{\partial\beta} + \cot\beta\cos\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\beta}\frac{\partial}{\partial\gamma}\right),\\ \hat{J}_y &= -i\left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial\beta} - \cot\beta\sin\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\frac{\partial}{\partial\gamma}\right),\\ \hat{J}_z &= -i\frac{\partial}{\partial\alpha}\end{aligned}\right\} \tag{A 1.5.2}$$

dargestellt werden, so daß wir für den Operator des Quadrats des Drehimpulses $\hat{\mathfrak{J}}^2 = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2$ erhalten

$$\hat{\mathfrak{J}}^2 = -\left\{\frac{1}{\sin\beta}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\sin\beta\frac{\partial}{\partial\beta}\right) + \frac{1}{\sin^2\beta}\left[\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + 2\cos\beta\frac{\partial^2}{\partial\alpha\,\partial\gamma} + \frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}\right]\right\}. \tag{A 1.5.3}$$

Der Operator für die Projektion des Drehimpulses auf die ζ-Achse ist

$$\hat{J}_\zeta = -i\frac{\partial}{\partial\gamma}.$$

Die Wellenfunktionen D^J_{MK}, die dem Gleichungssystem (A 1.5.1) genügen, können in der Form

$$D^J_{MK}(\alpha,\beta,\gamma) = \langle J K\,|\,e^{i\gamma\hat{J}_z}e^{i\beta\hat{J}_y}e^{i\alpha\hat{J}_z}\,|\,J M\rangle = e^{iM\alpha}\,d^J_{MK}(\beta)\,e^{iK\gamma} \tag{A 1.5.4}$$

geschrieben werden, wobei

$$d^J_{MK}(\beta) \equiv \sum_\varkappa (-1)^\varkappa \times$$
$$\times\left\{\frac{(J+M)!\,(J-M)!\,(J+K)!\,(J-K)!}{(J-M-\varkappa)!\,(J+K-\varkappa)!\,\varkappa!\,(\varkappa+M-K)!}\right\}^{1/2}\left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^{2J+K-M-2\varkappa}\left(\sin\frac{\beta}{2}\right)^{2\varkappa+M-K}$$

ist. Die Summe über $\varkappa$ läuft über alle ganzen Zahlen von der größeren der Zahlen 0, $K - M$ bis zur kleineren der Zahlen $J - M$, $J + K$. Bei $M = J$ und $M = -J$ bleibt in der Summe über $\varkappa$ nur das eine Glied mit $\varkappa = 0$ im ersten Fall und $\varkappa = J + K$ im zweiten Fall stehen. Die Funktionen D^J_{MK} nehmen dann eine besonders einfache Form an:

$$D^J_{JK} = \left\{\frac{(2J)!}{(J+K)!\,(J-K)!}\right\}^{1/2} e^{iJ\alpha}\left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^{J+K}\left(\sin\frac{\beta}{2}\right)^{J-K} e^{iK\gamma};$$
$$D^J_{-JK} = \left\{\frac{(2J)!}{(J+K)!\,(J-K)!}\right\}^{1/2} e^{-iJ\alpha}\left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^{J-K}\left(\sin\frac{\beta}{2}\right)^{J+K} e^{iK\gamma}.$$

Die Eigenfunktionen der Operatoren $\hat{\mathfrak{J}}^2$, $\hat{J}_z$ und $\hat{\mathfrak{J}}_\zeta$

$$\varphi^J_{MK}(\alpha,\beta,\gamma) = \sqrt{\frac{2J+1}{8\pi^2}}\,D^J_{MK}(\alpha,\beta,\gamma), \tag{A 1.5.5}$$

die folgendermaßen normiert sind:

$$\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi^{*J}_{MK}\,\varphi^{J'}_{M'K'}\sin\beta\,d\beta\,d\alpha\,d\gamma = \delta_{JJ'}\,\delta_{MM'}\,\delta_{KK'},$$

werden wir *Eigenfunktionen des symmetrischen Kreisels* nennen.

Die Funktionen D^J_{MK}, die zuerst von WIGNER [A, 7] eingeführt wurden, werden manchmal als *verallgemeinerte Kugelfunktionen* bezeichnet [A, 2]. Sie bilden eine irreduzible unitäre Darstellung der dreidimensionalen Drehungsgruppe und genügen den Orthogonalitätsrelationen

$$(D^J_{MK}, D^{J'}_{M'K'}) \equiv \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} D^{J*}_{MK} D^{J'}_{M'K'} \sin\beta \, d\beta \, d\alpha \, d\gamma = \frac{8\pi^2}{2J+1} \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \delta_{KK'}. \tag{A 1.5.6}$$

Wenn J ganzzahlige Werte annimmt, so ist die Darstellung der Drehungsgruppe eindeutig, d. h., jeder Drehung um die Winkel α, β, γ entspricht nur eine Matrix $D^J_{MK}(\alpha, \beta, \gamma)$. Wenn J halbzahlige Werte annimmt, so wird die Darstellung der Drehung zweideutig, da zu jeder Drehung, die durch die EULERschen Winkel α, β, γ bestimmt wird, die beiden Matrizen $\pm D^J_{MK}$ gehören, die sich durch das Vorzeichen unterscheiden.

Bei ganzzahligem $J = L$ und $M = 0$ oder $K = 0$ fallen die Funktionen D^J_{MK} bis auf einen konstanten Faktor mit Kugelfunktionen zusammen:

$$\left.\begin{aligned} D^L_{M0} &= \sqrt{\frac{4\pi}{2L+1}}\, Y_{LM}(\alpha, \beta), \\ D^L_{0K} &= (-1)^K \sqrt{\frac{4\pi}{2L+1}}\, Y_{LK}(\gamma, \beta). \end{aligned}\right\} \tag{A 1.5.7}$$

Wir betrachten als Beispiel die verallgemeinerten Kugelfunktionen (WIGNER-Funktionen) der Ordnung $^1/_2$ und 1:

$$D^{1/2}(\alpha, \beta, \gamma) = \pm \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\alpha}{2}} \cos\frac{\beta}{2}\, e^{-i\frac{\gamma}{2}} & -e^{-i\frac{\alpha}{2}} \sin\frac{\beta}{2}\, e^{i\frac{\gamma}{2}} \\ e^{i\frac{\alpha}{2}} \sin\frac{\beta}{2}\, e^{-i\frac{\gamma}{2}} & e^{i\frac{\alpha}{2}} \cos\frac{\beta}{2}\, e^{i\frac{\gamma}{2}} \end{pmatrix},$$

$$D^1(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} e^{-i\alpha} \frac{1+\cos\beta}{2} e^{-i\gamma} & e^{-i\alpha} \frac{\sin\beta}{\sqrt{2}} & e^{-i\alpha} \frac{1-\cos\beta}{\sqrt{2}} e^{i\gamma} \\ \frac{\sin\beta}{\sqrt{2}} e^{-i\gamma} & \cos\beta & -\frac{\sin\beta}{\sqrt{2}} e^{i\gamma} \\ e^{i\alpha} \frac{1-\cos\beta}{2} e^{-i\gamma} & e^{i\alpha} \frac{\sin\beta}{\sqrt{2}} & e^{i\alpha} \frac{1+\cos\beta}{2} e^{i\gamma} \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe der eindeutigen Darstellung der dreidimensionalen Drehungsgruppe $D^L_{MK}(\alpha, \beta, \gamma)$ lassen sich die Komponenten von Tensoren L-ten Grades aus einem Koordinatensystem in andere transformieren. Wenn α, β, γ die Winkel sind, welche die Drehung $R(\alpha, \beta, \gamma)$ des alten Koordinatensystems in das neue Koordinatensystem bestimmen, so werden die Komponenten eines Vektors A'_M und eines Tensors T'_{LM} im neuen Koordinatensystem als Linearkombinationen der Komponenten im alten System folgendermaßen dargestellt:

$$\left.\begin{aligned} A'_M &= \sum_K D^{1*}_{MK} A_K, \\ T'_{LM} &= \sum_K D^{L*}_{MK}(\alpha, \beta, \gamma)\, T_{LK}. \end{aligned}\right\} \tag{A 1.5.8}$$

Die Komponenten des Vektors A_{-1}, A_0, A_1 hängen mit seinen Komponenten im kartesischen Koordinatensystem über die Beziehungen

$$A_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_x - i\,A_y), \qquad A_0 = A_z, \qquad A_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(A_x + i\,A_y)$$

zusammen. Die Transformationsmatrix D^L_{MK} ist unitär, d. h., es gilt

$$\sum_M D^{L*}_{MK} D^L_{MK'} = \delta_{KK'} \tag{A 1.5.9}$$

oder in der Kurzform $(D^L)^+ D^L = 1$.

Wird diese Eigenschaft der Matrix D^L_{MK} benutzt, so kann man aus (A 1.5.8) die inverse Transformation erhalten:

$$A_K = \sum_M D^1_{MK} A'_M. \tag{A 1.5.8a}$$

Aus (A 1.5.9) folgt u. a. unmittelbar, daß die zu D^L reziproke Matrix mit der hermitesch konjugierten von D^L zusammenfällt:

$$(D^L)^{-1} = (D^L)^+.$$

In verschiedenen physikalischen Anwendungen muß das Produkt mehrerer verallgemeinerter Kugelfunktionen berechnet werden. Solche Produkte lassen sich immer durch die Vektoradditionskoeffizienten und Linearkombinationen der verallgemeinerten Kugelfunktionen darstellen, wenn man die Gleichung

$$D^{j_1}_{m_1 k_1} D^{j_2}_{m_2 k_2} = \sum_{J=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} (j_1 j_2 m_1 m_2 \,|\, J, m_1 + m_2)\,(j_1 j_2 k_1 k_2 \,|\, J, k_1 + k_2)\, D^J_{m_1+m_2,\, k_1+k_2} \tag{A 1.5.10}$$

benutzt. Berücksichtigt man (A 1.5.10) und (A 1.5.6), so läßt sich leicht folgende Beziehung beweisen:

$$(D^J_{MK}, D^{j_1}_{m_1 k_1} D^{j_2}_{m_2 k_2}) = \frac{8\pi^2}{2J+1} (j_1 j_2 m_1 m_2 \,|\, J M)\,(j_1 j_2 k_1 k_2 \,|\, J K). \tag{A 1.5.11}$$

Wir wollen noch einige Eigenschaften der Funktionen D^J anführen:

$$D^J_{MM'}(0, 0, 0) = \delta_{MM'}, \qquad D^J_{M'M} = (-1)^{M-M'} D^{J*}_{-M', -M}.$$

Bezeichnen wir mit R und R' zwei Drehungen, die durch die EULERschen Winkel α, β, γ und α', β', γ' definiert sind, dann gilt die Beziehung

$$\sum_K D^J_{MK}(R')\, D^J_{KM'}(R) = D^J_{MM'}(R' R).$$

Sie besagt, daß die Matrizen D^J_{MK} eine Darstellung der Drehungsgruppe bilden.

Wir wollen annehmen, daß der Zustand des Teilchensystems durch die Wellenfunktion $\psi_{JM}(\ldots, x_i, \ldots)$ beschrieben wird, die bestimmten Werten des Gesamtdrehimpulses und seiner Projektion auf die z-Achse entspricht. In diesem Fall gestattet die Beziehung

$$\psi_{JK}(\ldots, q_i, \ldots) = \sum_M D^{J*}_{KM}(R)\, \psi_{JM}(\ldots, x_i, \ldots), \tag{A 1.5.12}$$

mit Hilfe der verallgemeinerten Kugelfunktionen (WIGNER-Funktionen) zu den neuen Funktionen $\psi_{JK}(\ldots, q_i, \ldots)$ überzugehen, die von den Koordinaten q_i abhängen. Die q_i erhält man aus den alten Koordinaten durch die Drehung R. Die Quantenzahl K bestimmt dabei die Projektion des Gesamtdrehimpulses auf die ζ-Achse, während die Koordinaten q_i die Teilchenkoordinaten bezüglich des ξ, η, ζ-Systems sind, das aus dem alten System x, y, z durch die Drehung R erhalten wurde.

Die zu (A 1.5.12) inverse Transformation besitzt die Form

$$\psi_{JM}(\ldots, x_i, \ldots) = \sum_K D^J_{KM}(R)\, \psi_{JK}(\ldots, q_i, \ldots). \qquad \text{(A 1.5.13)}$$

Bei der Betrachtung der Bewegung von vielen untereinander in Wechselwirkung stehenden Teilchen gestattet diese Transformation in dem Koordinatensystem, das mit dem Trägheitszentrum aller Teilchen verbunden ist, eine Abtrennung der Rotation des Systems als Ganzem.

1.6. Einige Transformationen der LAPLACEschen Kugelfunktionen

Da die LAPLACEschen Kugelfunktionen ein vollständiges Orthogonalsystem bilden, kann man das Produkt einer beliebigen Anzahl von Kugelfunktionen, die von ein und denselben Winkelvariablen abhängen, als Linearkombination von Kugelfunktionen derselben Variablen darstellen. So kann man z. B. das Produkt von 2 Kugelfunktionen folgendermaßen ausdrücken:

$$Y_{j_1 m_1}(\vartheta, \varphi)\, Y_{j_2 m_2}(\vartheta, \varphi) = \sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} A_{j,\, m_1+m_2}(j_1 m_1 j_2 m_2)\, Y_{j,\, m_1+m_2}(\vartheta, \varphi). \qquad \text{(A 1.6.1)}$$

Die Koeffizienten der Linearkombination (A 1.6.1) hängen mit den Vektoradditionskoeffizienten zusammen:

$$A_{jm}(j_1 m_1 j_2 m_2) \equiv \left\{\frac{(2j_1+1)(2j_2+1)}{4\pi(2j+1)}\right\}^{1/2} (j_1 j_2 0 0 \mid j 0)\, (j_1 j_2 m_1 m_2 \mid j m). \qquad \text{(A 1.6.2)}$$

Wird die Gl. (A 1.6.1) mehrmals angewendet, so kann man das Produkt einer beliebigen Anzahl von Kugelfunktionen als Linearkombination von Kugelfunktionen darstellen.

Unter Benutzung von (A 1.6.1) läßt sich z. B. zeigen, daß

$$\int Y_{l' m'}(\vartheta, \varphi)\, P_k(\cos\vartheta)\, Y_{lm}(\vartheta, \varphi)\, d\Omega = C_k(l\, m, l'\, m') \qquad \text{(A 1.6.3)}$$

ist, wobei die Koeffizienten $C_k(l\, m, l'\, m')$ durch die Vektoradditionskoeffizienten ausgedrückt werden:

$$C_k(l m, l' m') = (-1)^m \frac{\sqrt{(2l+1)(2l'+1)}}{2k+1} (l l' 0 0 \mid k 0)\, (l l', m, -m' \mid k, m-m'). \qquad \text{(A 1.6.3a)}$$

Analog kann man unter Berücksichtigung der Orthogonalität der Kugelfunktionen zeigen, daß

$$\int Y^*_{jm} Y_{j_1 m_1} Y_{j_2 m_2}\, d\Omega = \left\{\frac{(2j_1+1)(2j_2+1)}{4\pi(2j+1)}\right\}^{1/2} (j_1 j_2 0 0 \mid j 0)\, (j_1 j_2 m_1 m_2 \mid j m) \qquad \text{(A 1.6.4)}$$

gilt. Aus den Eigenschaften der Vektoradditionskoeffizienten folgt, daß der Ausdruck (A 1.6.4) nur bei Erfüllung der Dreiecksregel $\Delta(j_1\, j_2\, j)$ und der Bedingung $j_1 + j_2 + j =$ gerade Zahl verschieden von Null ist. Die erste der Bedingungen drückt die Erhaltung des Drehimpulses aus, die zweite die Paritätserhaltung.

Mit Hilfe der WIGNER-Funktionen D^L_{MK} kann man die LAPLACEschen Kugelfunktionen aus einem Koordinatensystem in ein anderes transformieren:

$$Y_{LM}(\vartheta, \varphi) = \sum_K D^L_{MK}(\alpha, \beta, \gamma)\, Y_{LK}(\vartheta', \varphi'); \qquad \text{(A 1.6.5)}$$

ϑ, φ sind die Winkel im x, y, z-System, ϑ', φ' die Winkel im ξ, η, ζ-System.

Gegenüber dem Koordinatensystem x, y, z wird die Lage des ξ, η, ζ-Systems durch die EULERschen Winkel α, β, γ charakterisiert. Die zu (A 1.6.5) inverse Transformation hat die Form

$$Y_{LK}(\vartheta', \varphi') = \sum_M D^{L*}_{MK}(\alpha, \beta, \gamma)\; Y_{LM}(\vartheta, \varphi). \qquad \text{(A 1.6.6)}$$

Wird $K = 0$ gesetzt und (A 1.5.7) berücksichtigt, so erhalten wir das Additionstheorem der Kugelfunktionen

$$Y_{L0}(\vartheta') = \sqrt{\frac{4\pi}{2L+1}} \sum_M Y^*_{LM}(\alpha, \beta)\; Y_{LM}(\vartheta, \varphi) \qquad \text{(A 1.6.7)}$$

oder

$$P_l(\mathfrak{n}\,\mathfrak{n}') = \frac{4\pi}{2L+1} \sum_M Y^*_{LM}(\mathfrak{n})\; Y_{LM}(\mathfrak{n}). \qquad \text{(A 1.6.8)}$$

Die Einheitsvektoren $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{n}'$ werden durch die Winkel α, β und ϑ, φ bestimmt.

Für einige Anwendungen ist es zweckmäßig, die Kugelfunktionen als Produkt zu schreiben:

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \overline{P}_{lm}(\cos\vartheta)\, \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}}. \qquad \text{(A 1.6.9)}$$

Hierbei ist $\overline{P}_{lm}(\cos\vartheta)$ die normierte adjungierte LEGENDRE-Funktion erster Art:

$$\int_{-1}^{+1} \overline{P}_{lm}(x)\, \overline{P}_{l'm'}(x)\, dx = 1, \qquad \overline{P}_{lm}(-x) = (-1)^{l-m}\, \overline{P}_{l,m}(x).$$

Wir wollen noch einige Beziehungen angeben, die bei Rechnungen mit Kugelfunktionen nützlich sind:

$$\cos\vartheta\, \overline{P}_{lm} = \sqrt{\frac{(l+m+1)(l-m+1)}{(2l+1)(2l+3)}}\, \overline{P}_{l+1,m} + \sqrt{\frac{(l+m)(l-m)}{(2l+1)(2l-1)}}\, \overline{P}_{l-1,m},$$

$$\sin\vartheta\, \overline{P}_{lm} = \sqrt{\frac{(l+m+1)(l+m+2)}{(2l+1)(2l+3)}}\, \overline{P}_{l+1,m+1} - \sqrt{\frac{(l-m)(l-m-1)}{(2l+1)(2l-1)}}\, \overline{P}_{l-1,m+1},$$

$$\sin\vartheta\, \overline{P}_{lm} = -\sqrt{\frac{(l-m+1)(l-m+2)}{(2l+1)(2l+3)}}\, \overline{P}_{l+1,m-1} + \sqrt{\frac{(l+m)(l+m-1)}{(2l+1)(2l-1)}}\, \overline{P}_{l-1,m-1}.$$

(A 1.6.10)

Die Ableitungen der Funktionen $\overline{P}_{lm}$ nach ϑ kann man durch die Gleichungen

$$\frac{d\overline{P}_{lm}}{d\vartheta} = \mp \sqrt{(l \pm m + 1)(l \mp m)}\, \overline{P}_{l,m\pm 1} \pm m \cot\vartheta\, \overline{P}_{l,m} \qquad \text{(A 1.6.11)}$$

ausdrücken, aus der sich zwei nützliche Beziehungen ergeben:

$$2\frac{d\overline{P}_{lm}}{d\vartheta} = \sqrt{(l+m+1)(l-m)}\, \overline{P}_{l,m+1} - \sqrt{(l-m+1)(l+m)}\, \overline{P}_{l,m-1},$$

$$2m\cot\vartheta\, \overline{P}_{lm} = \sqrt{(l+m+1)(l-m)}\, \overline{P}_{l,m+1} + \sqrt{(l-m+1)(l+m)}\, \overline{P}_{l,m-1}.$$

1.7. Matrixelemente von Tensoroperatoren. Die invarianten TAMMschen Operatoren

Beziehungen vom Typ (A 1.1.13) sind nicht nur für die Kugelfunktionen gültig, sondern auch für beliebige andere Funktionen, die Eigenfunktionen der Drehimpulsoperatoren eines beliebigen Teilchensystems sind. Mit Hilfe dieser Beziehungen lassen sich die Matrixelemente der Operatoren entsprechender physikalischer Größen berechnen.

Wir wollen annehmen, daß die Operatoren $F_{\lambda\mu}$ eine Gesamtheit von $(2\lambda + 1)$ Größen bilden, die sich bei Drehungen des Koordinatensystems ebenso transformieren wie die Komponenten einer Wellenfunktion, die dem Drehimpuls λ entspricht. Mit anderen Worten, die Größen $F_{\lambda\mu}$ sollen bezüglich der Drehimpulsoperatoren (A 1.1.12) den gleichen Vertauschungsrelationen gehorchen wie die Wellenfunktionen dieser Operatoren (wenn diese als Operatoren betrachtet werden), d. h., es soll gelten

$$\left.\begin{aligned} [(\hat{J}_x \pm i\hat{J}_y), F_{\lambda\mu}] &= \mp\sqrt{(\lambda \mp \mu)(\lambda \pm \mu + 1)}\, F_{\lambda,\mu\pm 1}, \\ [\hat{J}_z, F_{\lambda\mu}] &= \mu F_{\lambda\mu}, \\ F^{+}_{\lambda\mu} &= (-1)^{\mu} F_{\lambda,-\mu}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(A 1.7.1)}$$

Die Tensoroperatoren $F_{\lambda\mu}$ hängen von den Variablen ab, auf die die Operatoren $\hat{J}_x$, $\hat{J}_y$, $\hat{J}_z$ wirken, sowie von beliebigen anderen Variablen. Beispiele für die Tensoroperatoren $F_{\lambda\mu}$ sind alle Operatoren, die Kugelfunktionen enthalten. Im allgemeinen Fall können die Indizes λ, μ der Tensoroperatoren formale Bedeutung haben und keinerlei Beziehungen zu einem realen Drehimpuls besitzen. So ist für einen Vektor $\lambda = 1$, für einen symmetrischen Tensor zweiten Grades $\lambda = 2$ usw.

Betrachten wir nun die Matrixelemente der Tensoroperatoren $F_{\lambda\mu}$ in Zuständen mit den Wellenfunktionen $\psi_{\alpha_1 j_1 m_1}$ und $\psi_{\alpha_2 j_2 m_2}$, die von den Koordinaten und den Spins des Teilchensystems abhängen:

$$(\alpha_1 j_1 m_1 | F_{\lambda\mu} | \alpha_2 j_2 m_2) \equiv (\psi_{\alpha_1 j_1 m_1}, F_{\lambda\mu}\, \psi_{\alpha_2 j_2 m_2}). \qquad \text{(A 1.7.2)}$$

Die Wirkung des Operators $F_{\lambda\mu}$ auf die Funktion $\psi_{\alpha j m}$ kann man in der Form

$$F_{\lambda\mu}\, \psi_{\alpha_2 j_2 m_2} = \sum_{j=|j_2-\lambda|}^{j_2+\lambda} (\lambda j_2 \mu m_2 | j m)\, W_{jm}(\alpha_2 j_2) \qquad \text{(A 1.7.3)}$$

schreiben, wobei sich die W_{jm} ebenso transformieren wie die Eigenfunktionen des Drehimpulsoperators des Systems. Berücksichtigt man die Transformationseigenschaften von W_{jm}, so erhält man

$$(\psi_{\alpha_1 j_1 m_1}, W_{jm}(\alpha_2 j_2)) = \delta_{m_1 m}\, \delta_{j_1 j} (\alpha_1 j_1 \,||F_\lambda||\, \alpha_2 j_2), \qquad \text{(A 1.7.4)}$$

wobei $(\alpha_1 j_1 \,||F_\lambda||\, \alpha_2 j_2)$ Matrixelemente der Tensoroperatoren $F_{\lambda\mu}$ sind, die nicht von den magnetischen Quantenzahlen abhängen.

Setzt man (A 1.7.3) in (A 1.7.2) ein und berücksichtigt (A 1.7.4), so erhält man

$$(\alpha_1 j_1 m_1 \,|F_{\lambda\mu}|\, \alpha_2 j_2 m_2) = (\lambda j_2 \mu m_2 \,|\, j_1 m_1)\, (\alpha_1 j_1 \,||F_\lambda||\, \alpha_2 j_2). \qquad \text{(A 1.7.5)}$$

Die Beziehung (A 1.7.5) gestattet somit, in expliziter Form die Abhängigkeit der Matrixelemente (A 1.7.2) von den magnetischen Quantenzahlen abzutrennen. Die Gl. (A 1.7.5) wurde in allgemeiner Form von WIGNER [A, 7] mit gruppentheoretischen Methoden und von RACAH [A, 8] ohne Benutzung der Gruppentheorie bewiesen.

Neben der Gl. (A 1.7.5) kann man zur Vereinfachung von Rechnungen, die mit der Zerlegung physikalischer Größen nach den Eigenfunktionen des Gesamtdrehimpulses zusammenhängen, die invarianten Operatoren L benutzen, die in mehreren Arbeiten von TAMM und Mitarb. [A, 9—A, 12] eingeführt wurden. Wir werden sie im weiteren kurz *TAMMsche Operatoren* nennen. Die TAMMschen Operatoren sind gegenüber Drehungen und Spiegelungen im Koordinatenraum invariant. Sie sind Funktionen der Winkel- und Spinvariablen des Teilchensystems.

Wir betrachten die TAMMschen Operatoren für den Fall eines Teilchens mit Spin. Wenn die Richtung im Raum durch den Einheitsvektor $\mathfrak{n}$ und die Spinorientierung durch den Vektor $\vec{\sigma}$ gekennzeichnet wird, so wird der Zustand des Nukleons mit dem Drehimpuls j und dessen Projektion m auf eine ausgezeichnete Richtung (Quantelungsachse) durch die Spin-Bahn-Funktion

$$\Phi_{lsjm}(\mathfrak{n}, \vec{\sigma}) = \sum_{m_s} (l\, s,\, m - m_s,\, m_s \,|\, j\, m)\, Y_{l,\, m-m_s}(\mathfrak{n})\, \chi_{s m_s}(\vec{\sigma}) \qquad \text{(A 1.7.6)}$$

bestimmt. Einem Wert des Gesamtdrehimpulses j und des Spins s entsprechen mehrere Funktionen vom Typ (A 1.7.6), die sich durch die Werte des Bahndrehimpulses l mit

$$|j - s| \leqq l \leqq j + s$$

unterscheiden. Wir numerieren diese Funktionen mit dem Index μ und führen die Kurzbezeichnung

$$\psi^{\mu}_{jm}(\mathfrak{n}, \vec{\sigma}) \equiv \sum_{m_s} (l\, s,\, m - m_s,\, m_s \,|\, j\, m)\, Y_{l,\, m-m_s}(\mathfrak{n})\, \chi_{s m_s}(\vec{\sigma}) \qquad \text{(A 1.7.7)}$$

ein. Die Funktionen (A 1.7.7) bilden ein vollständiges Orthonormalsystem von Eigenfunktionen der Operatoren $\hat{\mathfrak{j}}^2$ und $\hat{j}_z$, d. h., es gilt

$$\sum_{\sigma} \int \psi^{\mu *}_{jm}(\mathfrak{n}, \vec{\sigma})\, \psi^{\mu'}_{j'm'}(\mathfrak{n}, \vec{\sigma})\, d\Omega = \delta_{jj'}\, \delta_{mm'}\, \delta_{\mu\mu'}, \qquad \text{(A 1.7.8)}$$

$$\sum_{j,m,\mu} \psi^{\mu *}_{jm}(\mathfrak{n}, \vec{\sigma})\, \psi^{\mu}_{jm}(\mathfrak{n}', \vec{\sigma}) = \delta(\mathfrak{n} - \mathfrak{n}')\, \delta_{\sigma\sigma'}. \qquad \text{(A 1.7.9)}$$

Mit Hilfe der Funktionen (A 1.7.7) lassen sich die TAMMschen Operatoren durch die Gleichungen

$$L_j^{\mu\mu'}(\mathfrak{n}\,\vec{\sigma};\,\mathfrak{n}'\,\vec{\sigma}') \equiv \sum_{m=-j}^{j} \psi_{jm}^{\mu *}(\mathfrak{n},\vec{\sigma})\,\psi_{jm}^{\mu'}(\mathfrak{n}',\vec{\sigma}') \qquad \text{(A 1.7.10)}$$

definieren.

Zum Unterschied von den Funktionen (A 1.7.7), die die magnetischen Quantenzahlen m enthalten, durch die die Projektion des Gesamtdrehimpulses auf die Quantelungsachse z bestimmt wird, hängen die TAMMschen Operatoren nicht von m und folglich auch nicht von der Wahl der Quantelungsachse ab.

Benutzt man die Definition (A 1.7.10) und die Orthogonalitätsbedingungen (A 1.7.8), so läßt sich zeigen, daß die TAMMschen Operatoren hermitesch und orthogonal sind:

$$\{L_j^{\mu\mu'}(\mathfrak{n}\,\vec{\sigma};\,\mathfrak{n}'\,\vec{\sigma}')\}^+ = L_j^{\mu'\mu}(\mathfrak{n}'\,\vec{\sigma}';\,\mathfrak{n}\,\vec{\sigma}), \qquad \text{(A 1.7.11)}$$

$$\sum_{\sigma'} \int L_j^{\mu\mu'}(\mathfrak{n}\,\vec{\sigma};\,\mathfrak{n}'\,\vec{\sigma}')\,L_{j'}^{\mu''\mu_1}(\mathfrak{n}'\,\vec{\sigma}';\,\mathfrak{n}_1\,\sigma_1)\,d\Omega' = \delta_{jj'}\,\delta_{\mu'\mu''}\,L_j^{\mu\mu_1}(\mathfrak{n}\,\vec{\sigma};\,\mathfrak{n}_1\,\vec{\sigma}_1). \qquad \text{(A 1.7.12)}$$

Außerdem folgt aus (A 1.7.9) die Beziehung

$$\sum_{j;\mu} L_j^{\mu\mu}(\mathfrak{n}\,\vec{\sigma};\,\mathfrak{n}'\,\vec{\sigma}') = \delta(\mathfrak{n}-\mathfrak{n}')\,\delta_{\sigma\sigma'}. \qquad \text{(A 1.7.13)}$$

Wenn die Teilchen keinen Spin besitzen, so nimmt μ nur einen Wert an, und die Funktionen ψ_{jm}^{μ} fallen mit den Kugelfunktionen zusammen: $\psi_{jm}^{\mu} \to Y_{lm}(\mathfrak{n})$. In diesem Fall stimmen die TAMMschen Operatoren bis auf einen Faktor mit den LEGENDREschen Polynomen überein:

$$L_l(\mathfrak{n},\mathfrak{n}') = \sum_m Y_{lm}^*(\mathfrak{n})\,Y_{lm}(\mathfrak{n}') = \frac{2l+1}{4\pi}\,P_l(\mathfrak{n}\,\mathfrak{n}'), \qquad \mathfrak{n}\,\mathfrak{n}' = \cos\vartheta.$$

Besitzen die Teilchen den Spin $^1/_2$, so nimmt μ zwei Werte an (entsprechend den beiden Möglichkeiten $l = j \pm {}^1/_2$). Wegen der Invarianz der Operatoren L gegen Drehungen und Spiegelungen des Koordinatensystems müssen sie die Form

$$L_j^{\mu\mu'}(\mathfrak{n}\,\vec{\sigma};\,\mathfrak{n}'\,\vec{\sigma}') = A_j^{\mu\mu'}(\cos\vartheta) + \vec{\sigma}\,[\mathfrak{n}\,\mathfrak{n}']\,B_j^{\mu\mu'}(\cos\vartheta) \qquad \text{(A 1.7.14)}$$

besitzen. Insbesondere gilt bei $\mu = \mu' = l = j - {}^1/_2$

$$L_j^{\mu\mu}(\mathfrak{n}\,\vec{\sigma};\,\mathfrak{n}'\,\vec{\sigma}') = \left(j+\frac{1}{2}\right)P_{j-1/2}(\cos\vartheta) - i\,\vec{\sigma}\,[\mathfrak{n}\,\mathfrak{n}']\sin\vartheta\,\frac{dP_{j-1/2}}{d\cos\vartheta}. \qquad \text{(A 1.7.15)}$$

Bei $\mu = \mu' = l = j + {}^1/_2$ gilt

$$L_j^{\mu\mu}(\mathfrak{n}\,\vec{\sigma};\,\mathfrak{n}'\,\vec{\sigma}') = \left(j+\frac{1}{2}\right)P_{j+1/2}(\cos\vartheta) + i\,\vec{\sigma}\,[\mathfrak{n}\,\mathfrak{n}']\sin\vartheta\,\frac{dP_{j+1/2}}{d\cos\vartheta}. \qquad \text{(A 1.7.16)}$$

Die TAMMschen Operatoren können auch für Systeme gebildet werden, die aus mehreren verschiedenen oder gleichen Teilchen bestehen. Die explizite Form einiger TAMMscher Operatoren dieser Art ist in den Arbeiten [A, 10] bis [A, 12] angegeben.

1.8. Ableitungen der verallgemeinerten Kugelfunktionen nach den EULERschen Winkeln

Nach Gl. (A 1.5.4) werden die Elemente D^J_{MK} der Matrix für endliche Drehungen durch die Gleichungen

$$D^J_{MK}(\alpha, \beta, \gamma) = (J\,K \,|\, e^{i\gamma \hat{J}_z} e^{i\beta \hat{J}_y} e^{i\alpha \hat{J}_z} \,|\, J\,M)$$

bestimmt. Wir wollen die Wirkung der Projektionen des Drehimpulses auf diese Matrixelemente ableiten.

$\hat{J}_x$, $\hat{J}_y$ und $\hat{J}_z$ seien die Projektionen des Operators des Drehimpulses auf die Koordinatenachsen im Laborsystem. Die explizite Form dieser Operatoren ist in (A 1.5.2) bestimmt worden. Wir bilden die sphärischen Projektionen des Drehimpulsoperators mit Hilfe der Gleichungen

$$\hat{J}_0 = \hat{J}_z, \; \hat{J}_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{J}_x + i\,\hat{J}_y), \qquad \hat{J}_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{J}_x - i\,\hat{J}_y).$$

Man kann dann zeigen, daß folgende Beziehungen gelten:

$$\begin{aligned} \hat{J}_0\, D^J_{MK} &= M\, D^J_{MK}, \\ \hat{J}_1\, D^J_{MK} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(J-M)(J+M+1)}\, D^J_{M+1,K}, \\ \hat{J}_{-1}\, D^J_{MK} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(J+M)(J-M+1)}\, D^J_{M-1,K}. \end{aligned}$$

Wenn $\hat{J}_\xi$, $\hat{J}_\eta$ und $\hat{J}_\zeta$ die Projektionen des Drehimpulsoperators auf die Achsen des mit dem Kern verbundenen Koordinatensystems sind, so ergibt sich die Wirkung der sphärischen Projektionen

$$\hat{L}_0 = \hat{J}_\zeta, \qquad \hat{L}_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{J}_\xi + i\,\hat{J}_\eta), \qquad \hat{L}_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{J}_\xi - i\,\hat{J}_\eta)$$

auf die Funktionen D^J_{MK} durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \hat{L}_0\, D^J_{MK} &= K\, D^J_{MK}, \\ \hat{L}_1\, D^J_{MK} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(J+K)(J-K+1)}\, D^J_{M,K-1}, \\ \hat{L}_{-1}\, D^J_{MK} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(J-K)(J+K+1)}\, D^J_{M,K+1}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe von Gl. (A 1.5.4) folgt hieraus

$$\hat{L}_1 \hat{L}_{-1} D^J_{MK} = -\frac{1}{2}[(J-K)(J+K+1)] D^J_{MK},$$

$$\hat{L}_{-1} \hat{L}_1 D^J_{MK} = -\frac{1}{2}[(J+K)(J-K+1)] D^J_{MK}$$

und damit

$$[\hat{L}_1, \hat{L}_{-1}] D^J_{MK} = K D^J_{MK}.$$

Unter Benutzung von (A 1.5.4) kann diese Gleichung durch die Operatorengleichung

$$[\hat{L}_1, \hat{L}_{-1}] = \hat{L}_\zeta$$

ersetzt werden. Setzt man hier die Werte aus (A 1.5.3) ein, so erhält man die Vertauschungsrelationen für die Projektionen des Drehimpulses auf die Achsen des mit dem Kern verbundenen Koordinatensystems:

$$[\hat{L}_\xi, \hat{L}_\eta] = -i \hat{L}_\zeta.$$

Aus (A 1.5.3) folgt weiter

$$\hat{L}^2_\xi + \hat{L}^2_\eta = -(\hat{L}_1 \hat{L}_{-1} + \hat{L}_{-1} \hat{L}_1).$$

Mit Hilfe von (A 1.5.5) ergibt sich dann

$$(\hat{L}^2_\xi + \hat{L}^2_\eta) D^J_{MK} = [J(J+1) - K^2] D^J_{MK}$$

und damit

$$\hat{\mathfrak{L}}^2 D^J_{MK} = J(J+1) D^J_{MK}.$$

1.9. Racah-Koeffizienten

Die Summe von Produkten aus drei und mehr Vektoradditionskoeffizienten über die magnetischen Quantenzahlen kann nach der Racah-Methode [A, 8] gebildet werden. Sie läßt sich durch die Racah-Koeffizienten $W(a\,b\,c\,d;\ e\,f)$ ausdrücken, die von den sechs ganz- oder halbzahligen Drehimpulsquantenzahlen abhängen.

Am häufigsten benutzt man die Gleichung

$$\sum_{m_2, m_3, m, m'} (j_1 j_2 m_1 m_2 \mid j m)(j j_3 m m_3 \mid J M)(j_2 j_3 m_2 m_3 \mid j' m')(j_1 j' m_1 m' \mid J M) = \\ = \sqrt{(2j+1)(2j'+1)}\, W(j_1 j_2 J j_3;\ j j') \qquad (A\ 1.9.1)$$

oder die äquivalente Beziehung

$$\sum_{m_2} (j_1 j_2 m_1 m_2 \mid j_3 m_3)(j_3 j_4 m_3 m_4 \mid j_5 m_5)(j_2 j_4 m_2 m_4 \mid j_6 m_6) = \\ = \sqrt{(2j_3+1)(2j_6+1)}\,(j_1 j_6 m_1 m_6 \mid j_5 m_5)\, W(j_1 j_2 j_5 j_4;\ j_3 j_6). \qquad (A\ 1.9.1a)$$

Wird die rechte und die linke Seite von (A 1.9.1) mit

$$(j_2\, j_3\, m_2\, m_3 \,|\, j'\, m)\; (j_1\, j'\, m_1\, m' \,|\, J M)$$

multipliziert und über j' summiert, so erhalten wir die sehr nützliche Beziehung

$$(j_1\, j_2\, m_1\, m_2 \,|\, j\, m)\; (j\, j_3\, m\, m_3 \,|\, J M) = \sum_{j'} \sqrt{(2j+1)\,(2j'+1)} \times$$

$$\times\; (j_2\, j_3\, m_2\, m_3 \,|\, j', m_2 + m_3)\; (j\, j'\, m_1, m_2 + m_3 \,|\, J M)\; W(j_1\, j_2\, J\, j_3;\, j\, j')\,. \qquad \text{(A 1.9.2)}$$

Die RACAH-Koeffizienten finden häufig bei der Untersuchung der Winkelkorrelationen zwischen aufeinanderfolgenden Strahlungen, der Winkelverteilung bei der Streuung, der Winkelverteilung von Kernreaktionen usw. Anwendung. Sie verknüpfen die beiden für die Addition von 3 Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{d}$ möglichen Wege:

1. $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{e}$ und danach $\mathfrak{e} + \mathfrak{d} = \mathfrak{c}$,
2. $\mathfrak{b} + \mathfrak{d} = \mathfrak{f}$ und danach $\mathfrak{a} + \mathfrak{f} = \mathfrak{c}$.

Die Grundeigenschaften und die Zahlenwerte der RACAH-Koeffizienten kann man in der Übersichtsarbeit von BIEDENHARN, BLATT und ROSE [A, 13] finden. Nachstehend führen wir einige Eigenschaften dieser Koeffizienten an, die wir in unserem Buch benutzt haben.

Die RACAH-Koeffizienten sind nur dann verschieden von Null, wenn die Dreiecksregeln

$$\Delta(a\,b\,e), \quad \Delta(c\,d\,e), \quad \Delta(a\,c\,f), \quad \Delta(b\,d\,f)$$

erfüllt sind.

Die RACAH-Koeffizienten besitzen die Symmetrieeigenschaften

$$W(a\,b\,c\,d;\, e\,f) = W(b\,a\,d\,c;\, e\,f) = W(a\,c\,b\,d;\, f\,e) = W(c\,d\,a\,b;\, e\,f) =$$

$$= (-1)^{e+f-a-d}\, W(e\,b\,c\,f;\, a\,d) = (-1)^{e+f-b-c}\, W(a\,e\,f\,d;\, b\,c) \qquad \text{(A 1.9.3)}$$

und gehorchen den Summenregeln

$$\sum_e (2e+1)\,(2f+1)\, W(a\,b\,c\,d;\, e\,f)\, W(a\,b\,c\,d;\, e\,g) = \delta_{fg}, \qquad \text{(A 1.9.3a)}$$

$$\sum_e (-1)^{a+b-c}\,(2e+1)\, W(a\,b\,c\,d;\, e\,f)\, W(b\,a\,c\,d;\, e\,g) = W(a\,g\,f\,b;\, c\,d)\,. \qquad \text{(A 1.9.3b)}$$

Wenn einer der 6 Parameter der RACAH-Koeffizienten Null ist, so kann dieser Koeffizient mit Hilfe von (A 1.9.3) auf folgenden Koeffizienten zurückgeführt werden:

$$W(a\,b\,c\,d;\, 0\,f) = (-1)^{b+c-f}\, \frac{\delta_{ab}\, \delta_{cd}}{\sqrt{(2b+1)(2c+1)}}\,. \qquad \text{(A 1.9.4)}$$

In zahlreichen Anwendungen treten RACAH-Koeffizienten auf, in denen einer der Parameter gleich $^1/_2$ ist. Die Werte solcher Koeffizienten sind in der Tab. 36 angeführt.

Tabelle 36
Die Koeffizienten $W(a\,b\,c\,d;\,{}^1\!/_2\,f)$

	$a=b+{}^1\!/_2,\quad \lambda=b+d-f$	$a=b-{}^1\!/_2,\quad \lambda=b+d-f$
$c=d+{}^1\!/_2$	$(-1)^\lambda\left\{\frac{(b+d+f+2)(b+d-f+1)}{(2b+1)(2b+2)(2d+1)(2d+2)}\right\}^{1/2}$	$(-1)^\lambda\left\{\frac{(f-b+d+1)(f+b-d)}{2b(2b+1)(2d+1)(2d+2)}\right\}^{1/2}$
$c=d-{}^1\!/_2$	$(-1)^\lambda\left\{\frac{(f+b-d+1)(f-b+d)}{(2b+1)(2b+2)\cdot 2d(2d+1)}\right\}^{1/2}$	$(-1)^{\lambda+1}\left\{\frac{(b+d+f+1)(b+d-f)}{2b(2b+1)\cdot 2d(2d+1)}\right\}^{1/2}$

Als Beispiel für die Anwendung der RACAH-Koeffizienten bei der Berechnung von Summen aus Produkten der Vektoradditionskoeffizienten über die magnetischen Quantenzahlen berechnen wir den Ausdruck

$$S(J_1\,J\,J_2) = 4\pi \sum_{M,\,M_1} |(\Phi_{J_1M_1},\ Y_{JM}\,\Phi_{J_2M_2})|^2, \tag{A 1.9.5}$$

wobei die

$$\Phi_{jm} = \sum_\lambda \left(L\,\frac{1}{2},\ m-\lambda,\lambda\,|\,j\,m\right) Y_{L,\,m-\lambda}\,\chi_{1/_2\,\lambda} \tag{A 1.9.6}$$

Eigenfunktionen der Operatoren $\hat{\mathfrak{j}}^2$, $\hat{j}_z$ und $\hat{\mathfrak{L}}^2$ mit den Eigenwerten $j(j+1)$, m und $L(L+1)$ sind. Wird (A 1.9.6) in das Matrixelement (A 1.9.5) eingesetzt, so erhalten wir nach der Summation über die Spinvariablen

$$(\Phi_{J_1M_1},\ Y_{JM}\,\Phi_{J_2M_2}) = \sum_\lambda \left(L_1\frac{1}{2},\ M_1-\lambda,\ \lambda\,|\,J_1\,M_1\right)\times$$
$$\times\left(L_2\frac{1}{2},\ M_2-\lambda,\ \lambda\,|\,J_2\,M_2\right)(Y_{L_1,M_1-\lambda},\ Y_{JM}\,Y_{L_2,M_2-\lambda}).$$

Wird (A 1.6.4) benutzt, so erhält man

$$(\Phi_{J_1M_1},\ Y_{JM}\,\Phi_{J_2M_2}) = \sqrt{\frac{(2J+1)(2L_2+1)}{4\pi(2L_1+1)}}\times$$
$$\times(L_2\,J\,0\,0\,|\,L_1\,0)\sum_\lambda(L_2\,J,M_2-\lambda,M\,|\,L_1,M_1-\lambda)\left(L_1\frac{1}{2},M_1-\lambda,\lambda\,|\,J_1M_1\right)\times$$
$$\times\left(L_2\frac{1}{2},\ M_2-\lambda,\ \lambda\,|\,J_2\,M_2\right). \tag{A.1.9.7}$$

Aus den Eigenschaften der Vektoradditionskoeffizienten folgt, daß in (A 1.9.7) $M = M_1 - M_2$ ist. Unter Benutzung der Symmetrieeigenschaften der Vektoradditionskoeffizienten kann man dann schreiben:

$$(L_2\,J,\ M_2-\lambda,\ M_1-M_2\,|L_1,\ M_1-\lambda)\left(L_1\frac{1}{2},\ M_1-\lambda,\ \lambda\,|\,J_1\,M_1\right) =$$
$$= (-1)^{L_1-M_1+\lambda}\left(\frac{2J_1+1}{2}\right)^{1/2}(L_2\,J,\ M_2-\lambda,\ M_1-M_2\,|\,L_1,\ M_1-\lambda)\times$$
$$\times\left(L_1\,J_1,\ M_1-\lambda,\ -M_1\,\Big|\,\frac{1}{2},\ -\lambda\right) = (-1)^{L_1-M_1+\lambda}\left(\frac{2J_1+1}{2}\right)^{1/2}\times$$
$$\times\sum_j\sqrt{(2j+1)(2L_1+1)}\,(J\,J_1,\ M_1-M_2,\ -M_1\,|\,j,-M_2)\times$$
$$\times\left(L_2\,j,\ M_2-\lambda,\ -M_2\,\Big|\,\frac{1}{2},\ -\lambda\right)W\!\left(L_2\,J\,\frac{1}{2}\,J_1;\ L_1\,j\right). \tag{A 1.9.8}$$

Setzt man (A 1.9.8) in (A 1.9.7) ein und benutzt (A 1.9.2) sowie die Symmetrieeigenschaften und die Orthogonalität der Vektoradditionskoeffizienten, so erhält man

$$(\Phi_{J_1 M_1},\ Y_{JM}\,\Phi_{J_2 M_2}) = \frac{(-1)^{L_1+L_2-M_1-M_2}}{\sqrt{4\pi}} \sqrt{(2J+1)(2L_2+1)(2J_1+1)}\ \times$$
$$\times\ (L_2\,J\,0\,0\,|\,L_1\,0)\,(J\,J_1,\ M_1-M_2,\ -M_1\,|\,J_2,\ -M_2)\,W\left(L_2\,J\,\tfrac{1}{2}\,J_1;\ L_1\,J_2\right). \tag{A 1.9.9}$$

Wird (A 1.9.9) in (A 1.9.5) eingesetzt und die Symmetrie der RACAH-Koeffizienten berücksichtigt, so ergibt sich endgültig

$$S(J_1\,J\,J_2) = (2J+1)(2L_2+1)(2J_1+1)\,|(L_2\,J\,0\,0\,|\,L_1\,0)|^2\ \times$$
$$\times\ W^2\left(L_2\,J\,\tfrac{1}{2}\,J_1;\ L_1\,J_2\right) = (2J+1)(2L_2+1)(2J_1+1)\ \times$$
$$\times\ |(L_2\,J\,0\,0\,|\,L_1\,0)|^2\,W^2\left(L_2\,J_2\,L_1\,J_1;\ \tfrac{1}{2}\,J\right). \tag{A 1.9.10}$$

In vielen Arbeiten wird die Funktion $Z(a\,b\,c\,d;\ e\,f)$ benutzt, die eine Kombination von RACAH-Koeffizienten und Vektoradditionskoeffizienten darstellt:

$$Z(a\,b\,c\,d;\ e\,f) \equiv i^{f-a+c}[(2a+1)(2b+1)(2c+1)(2d+1)]^{1/2}\ \times$$
$$\times\ (a\,c\,0\,0\,|\,f\,0)\,W(a\,b\,c\,d;\ e\,f). \tag{A 1.9.11}$$

Unter Benutzung der Funktion $Z(a\,b\,c\,d;\ e\,f)$ kann man (A 1.9.10) kürzer schreiben:

$$S(J_1\,J\,J_2) = \frac{Z^2\left(L_2\,J_2\,L_1\,J_1;\ \tfrac{1}{2}\,J\right)}{2J_2+1}. \tag{A 1.9.12}$$

Tabellen der Z-Funktionen und Angaben über ihre Grundeigenschaften sind in der Arbeit [A, 13] angeführt. Hier wollen wir nur auf einige Eigenschaften hinweisen:

Die Z-Funktionen genügen der Symmetriebedingung

$$Z(a\,b\,c\,d;\ e\,f) = (-1)^f\,Z(c\,d\,a\,b;\ e\,f)$$

und der Summenregel

$$\sum_b Z(a\,b\,c\,d;\ e\,f)\,Z(a\,b\,c'\,d;\ e\,f) = \delta_{cc'}(2a+1)(2d+1)\,|(a\,c\,0\,0\,|\,f\,0)|^2.$$

Weiterhin ist

$$Z(a\,b\,c\,d;\ e\,f) = 0, \quad \text{wenn} \quad a+c+f \text{ ungerade ist;}$$
$$Z(a\,b\,c\,d;\ e\,0) = \delta_{ac}\,\delta_{bc}(-1)^{b-e}\,(2b+1)^{1/2},$$
$$Z(a\,b\,c\,d;\ 0\,f) = \delta_{ab}\,\delta_{cd}(-1)^{2f}\,(a\,c\,0\,0\,|\,f\,0)\sqrt{(2a+1)(2c+1)}.$$

Da die Funktionen $Z(a\,b\,c\,d;\ e\,f)$ RACAH-Koeffizienten enthalten, sind sie verschieden von Null, wenn die folgenden Dreiecksregeln gleichzeitig erfüllt sind:

$$\Delta(a\,b\,e), \quad \Delta(c\,d\,e), \quad \Delta(a\,c\,f), \quad \Delta(b\,d\,f).$$

2. DIE ELEKTRISCHEN MULTIPOLMOMENTE EINES TEILCHENSYSTEMS

2.1. Das elektrische Quadrupolmoment eines Kerns in adiabatischer Näherung

Für ein System von A Teilchen läßt sich der Operator des elektrischen Multipolmoments mit der Multipolordnung λ in der Koordinatendarstellung folgendermaßen schreiben:

$$\hat{Q}_\lambda = \frac{2}{e} \sqrt{\frac{4\pi}{2\lambda+1}} \sum_{i=1}^{A} e_i r_i^\lambda Y_{\lambda 0}(\vartheta_i).$$

Hierbei bedeuten e die positive elektrische Elementarladung, e_i die elektrische Ladung des i-ten Teilchens und r_i, ϑ_i, φ_i dessen Polarkoordinaten. Angewandt auf einen Kern mit Z Protonen, erhält man

$$\hat{Q}_\lambda = 2 \sqrt{\frac{4\pi}{2\lambda+1}} \sum_{i=1}^{Z} r_i^\lambda Y_{\lambda 0}(\vartheta_i). \tag{A 2.1.1}$$

Hieraus folgt unmittelbar, daß die Parität des elektrischen Multipolmoments $(-1)^\lambda$ beträgt.

Um das elektrische Multipolmoment des Kerns durch das mit den Hauptachsen ξ, η, ζ des Teilchensystems verknüpfte Multipolmoment auszudrücken, gehen wir von den Koordinaten r_i, ϑ_i, φ_i zu den EULERschen Winkeln α, β, γ, die die Lage des Koordinatensystems ξ, η, ζ bestimmen, und den „inneren Koordinaten" r_i', φ_i', ϑ_i' über, die den Ort der Teilchen im Koordinatensystem ξ, η, ζ bestimmen. Bei dieser Transformation gilt $r_i' = r_i$, und die Kugelfunktionen transformieren sich nach Gl. (A 1.5.5) des Anhangs 1 folgendermaßen:

$$Y_{\lambda 0}(\vartheta_i, \varphi_i) = \sum_\nu D_{0\nu}^\lambda(\alpha, \beta, \gamma)\, Y_{\lambda\nu}(\vartheta', \varphi'). \tag{A 2.1.2}$$

Setzt man (A 2.1.2) in (A 2.1.1) ein, so findet man den Zusammenhang zwischen dem Operator des Multipolmoments (A 2.1.1) und dem Operator des inneren (inhärenten) Multipolmoments $\hat{Q}_{\lambda\nu}^0$:

$$\hat{Q}_\lambda = \sum_\nu D_{0\nu}^\lambda(\alpha, \beta, \gamma)\, \hat{Q}_{\lambda\nu}^0, \tag{A 2.1.3}$$

wobei

$$\hat{Q}_{\lambda\nu}^0 = 2 \sqrt{\frac{4\pi}{2\lambda+1}} \sum_{i=1}^{Z} r_i^\lambda Y_{\lambda\nu}(\vartheta_i', \varphi_i')$$

ist.

Um den Mittelwert des Multipolmoments in einem Zustand mit der Wellenfunktion ψ berechnen zu können, muß das Integral

$$\langle \hat{Q}_\lambda \rangle \equiv (\psi, \hat{Q}_\lambda \psi) \tag{A 2.1.4}$$

ausgewertet werden.

Der Zustand eines axialsymmetrischen Kerns wird in der adiabatischen Näherung (s. Kap. 4, Abschn. 4.5. und 4.6.) durch die Wellenfunktion

$$\psi_{JMK} = \varphi_{MK}^J(\alpha, \beta, \gamma)\, \Phi_K(\ldots, \mathfrak{r}_i, \ldots) \tag{A 2.1.5}$$

beschrieben. Hierbei ist $\varphi^J_{MK} = \sqrt{\frac{2J+1}{8\pi^2}}\, D^J_{MK}(\alpha, \beta, \gamma)$ die Eigenfunktion des symmetrischen Kreisels (s. Anhang 1, Abschn. 1.4.), die die Rotation des Kerns mit dem Gesamtdrehimpuls J und den Projektionen M und K beschreibt. Die Wellenfunktion $\Phi_K(\ldots, \mathfrak{r}_i, \ldots)$ beschreibt die innere Bewegung der Nukleonen im Kern mit dem Spin K.

Setzt man (A 2.1.5) und (A 2.1.3) in (A 2.1.4) ein, so erhält man

$$\langle Q_\lambda \rangle_{JMK} = \sum_\nu \langle D^\lambda_{0\nu} \rangle_{JMK} \langle Q^0_{\lambda\nu} \rangle_K \tag{A 2.1.6}$$

mit

$$\langle Q^0_{\lambda\nu} \rangle_K \equiv (\Phi_K, \hat{Q}^0_{\lambda\nu}\, \Phi_K)$$

als innerem (inhärentem) elektrischem Multipolmoment des Kerns im Zustand Φ_K und dem Matrixelement

$$\langle D^\lambda_{0\nu} \rangle_{JMK} = (\varphi^J_{MK}, D^\lambda_{0\nu}\, \varphi^J_{MK}).$$

Setzt man hier (A 2.1.5) ein und berücksichtigt die Gl. (A 1.4.11) des Anhangs 1, so wird

$$\langle D^\lambda_{0\nu} \rangle_{JMK} = (\lambda\, J\, 0\, M \mid J\, M)\, (\lambda\, J\, 0\, K \mid J\, K)\, \delta_{0\nu}.$$

Der Ausdruck (A 2.1.6) für den Mittelwert des elektrischen Multipolmoments im Zustand J, M, K nimmt damit die Form

$$\langle \hat{Q}_\lambda \rangle_{JMK} = (\lambda\, J\, 0\, M \mid J\, M)\, (\lambda\, J\, 0\, K \mid J\, K)\, \langle Q^0_{\lambda 0} \rangle_K$$

an. Da alle Kerne im Grundzustand ein Symmetriezentrum besitzen, verschwindet das innere elektrische Dipolmoment $\langle Q^0_{10} \rangle_K$.

Ist der Kern nicht kugelsymmetrisch, so ist das elektrische Quadrupolmoment $Q_0 \equiv \langle Q^0_{20} \rangle_K$ bei axialer Symmetrie im Eigensystem des Kerns von Null verschieden. Dabei gilt

$$\langle \hat{Q}_{20} \rangle_{JMK} = (2 J\, 0\, M \mid J\, M)\, (2 J\, 0\, K \mid J\, K)\, Q_0. \tag{A 2.1.7}$$

Meist versteht man unter dem Begriff Quadrupolmoment eines Kerns den Wert von (A 2.1.7) im Zustand mit $M = J$:

$$Q \equiv \langle \hat{Q}_{20} \rangle_{JJK} = (2 J\, 0\, J \mid J\, J)\, (2 J\, 0\, K \mid J\, K)\, Q_0.$$

Unter Benutzung der Tabelle für die Vektoradditionskoeffizienten erhält man endgültig folgenden Ausdruck:

$$Q = \frac{3K^2 - J(J+1)}{(J+1)(2J+3)}\, Q_0. \tag{A 2.1.8}$$

Im Grundzustand des Kerns gilt $K = J$. Daher ist das elektrische Quadrupolmoment im Grundzustand J ($M = K = J$) mit dem inneren Quadrupolmoment Q_0 durch eine einfache Beziehung verknüpft:

$$Q = \frac{J(2J-1)}{(J+1)(2J+3)}\, Q_0. \tag{A 2.1.9}$$

Das innere Quadrupolmoment Q_0 charakterisiert die Abweichung der Ladungsverteilung im Kern von der kugelsymmetrischen.

2.2. Das von einem Proton induzierte elektrische Quadrupolmoment

Wir berechnen das von einem Proton induzierte elektrische Quadrupolmoment, wenn sich das Proton in einem Zustand mit der Wellenfunktion

$$R(r)\,\Phi_{l^{1}/_{2}jm}(\vartheta,\varphi,s_z) \tag{A 2.2.1}$$

befindet. Hierbei bedeutet $R(r)$ die Radialwellenfunktion und $\Phi_{l^{1}/_{2}jm}$ die Spin-Bahn-Funktion:

$$\Phi_{l^{1}/_{2}jm} = \sum_{m_s=\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} \left(l\frac{1}{2}, m-m_s, m_s \middle| j\, m\right) Y_{l,m-m_s}\,\chi_{^{1}/_{2}m_s}. \tag{A 2.2.2}$$

Der Operator des elektrischen Quadrupolmoments eines Teilchens mit positiver Elementarladung lautet

$$\hat{Q} = r^2(3\cos^2\vartheta - 1) = 2\sqrt{\frac{4\pi}{5}}\,r^2\,Y_{20}(\vartheta,\varphi).$$

Der Mittelwert dieses Operators im Zustand (A 2.2.1) bei $m = j$ wird als elektrisches Quadrupolmoment des Protons bezeichnet:

$$Q_j = \langle\hat{Q}\rangle_{jj} = \langle r^2\rangle\cdot 4\sqrt{\frac{\pi}{5}}\sum_{s_z}\int \Phi^*_{l^{1}/_{2}jj}\,Y_{20}\,\Phi_{l^{1}/_{2}jj}\,d\Omega. \tag{A 2.2.3}$$

Hierbei bedeutet $\langle r^2\rangle$ den Mittelwert des Quadrats vom Radiusvektor des Protons im betrachteten Zustand.

Setzt man (A 2.2.2) in (A 2.2.3) ein und berücksichtigt die Orthonormalitätseigenschaften der Funktionen χ, so erhält man

$$Q_j = \langle r^2\rangle\cdot 4\sqrt{\frac{\pi}{5}}\sum_{m_s}\left(l\frac{1}{2}, j-m_s, m_s \middle| j\,j\right)^2 \int Y^*_{l,j-m_s}\,Y_{20}\,Y_{l,j-m_s}\,d\Omega.$$

Wir transformieren das Produkt der letzten beiden Kugelfunktionen im Integral nach Gl. (A 1.5.2):

$$Y_{20}\,Y_{l,j-m_s} = \sum_{L,M}\sqrt{\frac{5(2l+1)}{4\pi(2L+1)}}\,(l\,2\,0\,0|L\,0)\,(l\,2, j-m_s, 0|L\,M)\,Y_{LM}.$$

Dann gilt unter Berücksichtigung der Orthogonalität der Laplaceschen Kugelfunktionen

$$Q_j = 2\,\langle r^2\rangle(l\,2\,0\,0|l\,0)\sum_{m_s}\left(l\frac{1}{2}, j-m_s, m_s \middle| j\,j\right)^2 (l\,2, j-m_s, 0|l, j-m_s).$$

Berücksichtigt man noch die Relationen

$$(l\,2\,0\,0|l\,0) = -\frac{l(l+1)}{\sqrt{(2l-1)l(l+1)(l+3)}},$$

$$\left(l\frac{1}{2}l\frac{1}{2}\middle| l+\frac{1}{2}, l+\frac{1}{2}\right)^2 = 1,$$

$$(l\,2\,l\,0|l\,l) = \frac{l(2l-1)}{\sqrt{(2l-1)l(l+1)(l+3)}},$$

so erhält man für $j = l + {}^1/_2$

$$Q_j = Q_{l+{}^1/_2} = -\langle r^2\rangle \frac{2l}{2l+3} = -\frac{2j-1}{2j+2}\langle r^2\rangle .$$

Wegen

$$\left(l\frac{1}{2}, l-1, \frac{1}{2}\middle| l-\frac{1}{2}, l-\frac{1}{2}\right)^2 = (2l+1)^{-1},$$

$$\left(l\frac{1}{2}l, -\frac{1}{2}\middle| l-\frac{1}{2}, l-\frac{1}{2}\right)^2 = 2l(2l+1)^{-1},$$

$$(l\,2, l-1, 0\,|\,l, l-1) = \frac{3(l-1)^2 - l(l+1)}{\sqrt{(2l-1)(l+1)l(2l+3)}}$$

wird auch für $j = l - {}^1/_2$

$$Q_j = Q_{l-{}^1/_2} = -\frac{2(l-1)}{2l+1}\langle r^2\rangle = -\frac{2j-1}{2j+2}\langle r^2\rangle .$$

In beiden Fällen $j = l \pm {}^1/_2$ wird also das Quadrupolmoment des Protons durch den gleichen Ausdruck

$$Q_j = -\frac{2j-1}{2j+2}\langle r^2\rangle$$

gegeben.

3. WELLENFELDER, DIE DURCH DIE DIRAC-GLEICHUNG BESCHRIEBEN WERDEN

3.1. Freie Bewegung eines Teilchens mit dem Spin $^1/_2$

Das Wellenfeld eines Teilchens mit dem Spin $^1/_2$ wird durch die Dirac-Gleichung beschrieben, die man in der Form

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H_D\psi \tag{A 3.1.1}$$

schreiben kann, wobei der Hamilton-Operator die Gestalt

$$H_D = c\vec{\alpha}\,\hat{\mathfrak{p}} + mc^2\beta, \quad \hat{\mathfrak{p}} = -i\hbar\nabla \tag{A 3.1.2}$$

besitzt. Die vierreihigen hermiteschen Dirac-Matrizen lassen sich durch die zweireihigen Pauli-Matrizen

$$\sigma_x = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

und die zweireihige Einheitsmatrix $I = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ darstellen:

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix}0 & \vec{\sigma}\\ \vec{\sigma} & 0\end{pmatrix}, \quad \beta = \gamma_4 = \begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & -I\end{pmatrix}. \tag{A 3.1.3}$$

Die vierkomponentige Wellenfunktion ψ wird als Spalte geschrieben:

$$\psi = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix},$$

und die zu ihr hermitesch konjugierte Funktion ψ^+ als Zeile:

$$\psi^+ = (\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*).$$

Aus den Wellenfunktionen ψ^+, ψ und den DIRAC-Matrizen kann man Größen bilden, die bestimmte Tensoreigenschaften besitzen. So ist z. B. die bilineare Funktionenkombination $\psi^+ \beta \psi$ ein Skalar. Führt man die 3 Matrizen $\gamma_k = -i \beta \alpha_k$ $(k = 1, 2, 3)$ und die Matrix $\gamma_4 = \beta$ ein, so kann man die bilinearen Kombinationen $\psi^+ \beta \gamma_\mu \psi$ $(\mu = 1, 2, 3, 4)$ bilden, die sich wie die Komponenten eines vierdimensionalen Vektors transformieren (vgl. Abschn. 3.3. des Anhangs). Die Größen

$$\psi^+ \beta \gamma_\mu \gamma_\nu \psi \qquad (\mu \neq \nu)$$

bilden einen Tensor zweiten Grades. Die Größe $\psi^+ \beta \gamma_\mu \gamma_5 \psi$ transformiert sich wie ein Pseudovektor, die Größe $\psi^+ \beta \gamma_5 \psi$ wie ein Pseudoskalar $(\gamma_5 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4)$.

Für viele Anwendungen ist es zweckmäßig, die vierkomponentige Funktion durch zwei zweikomponentige Funktionen φ und χ auszudrücken:

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}. \qquad \text{(A 3.1.4)}$$

Dann geht die Gl. (A 3.1.1) für stationäre Zustände mit der Energie ε in ein Gleichungssystem über:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon \varphi &= c \vec{\sigma} \hat{\mathfrak{p}} \chi + m c^2 \varphi, \\ \varepsilon \chi &= c \vec{\sigma} \hat{\mathfrak{p}} \varphi - m c^2 \chi. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(A 3.1.5)}$$

Für Zustände mit definiertem Impuls fällt der Impulsoperator mit dem Impulsvektor zusammen, und das Gleichungssystem (A 3.1.5) geht in

$$\left.\begin{aligned} (m c^2 - \varepsilon) \varphi + c \vec{\sigma} \mathfrak{p} \chi &= 0, \\ c \vec{\sigma} \mathfrak{p} \varphi - (m c^2 + \varepsilon) \chi &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(A 3.1.5a)}$$

über. Damit (A 3.1.5a) lösbar ist, muß seine Koeffizientendeterminante verschwinden. Berücksichtigt man die Operatoridentität

$$(\vec{\sigma} \mathfrak{A}) (\vec{\sigma} \mathfrak{B}) = \mathfrak{A} \mathfrak{B} + i \vec{\sigma} [\mathfrak{A} \mathfrak{B}]$$

für die beiden beliebigen Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, die mit $\vec{\sigma}$ kommutativ seien, so erhält man

$$\begin{vmatrix} m c^2 - \varepsilon & c \vec{\sigma} \mathfrak{p} \\ c \vec{\sigma} \mathfrak{p} & m c^2 + \varepsilon \end{vmatrix} = m^2 c^4 - \varepsilon^2 - c^2 p^2 = 0$$

und daraus die Beziehung

$$\varepsilon = \pm \sqrt{\mathfrak{p}^2 + m^2 c^2}, \qquad \text{(A 3.1.6)}$$

die Energie und Impuls des Teilchens verknüpft. Den beiden Energiewerten (A 3.1.6) entsprechen zwei verschiedene Lösungstypen der DIRAC-Gleichung. Wir werden sie als Lösungen bezeichnen, die zur positiven bzw. zur negativen Energie gehören.

Aus (A 3.1.5a) erhalten wir

$$\chi = \frac{c\,\vec{\sigma}\,\mathfrak{p}}{m\,c^2 + \varepsilon}\,\varphi, \tag{A 3.1.7}$$

wobei ε durch (A 3.1.6) bestimmt wird.

Aus (A 3.1.7) folgt, daß jeweils eine der zweikomponentigen Funktionen φ und χ durch die andere ausgedrückt werden kann. Man kann somit an Stelle von (A 3.1.4) schreiben

$$\psi = N \begin{pmatrix} u \\ \dfrac{c\,\vec{\sigma}\,\mathfrak{p}}{m\,c^2 + \varepsilon}\,u \end{pmatrix} f(r), \tag{A 3.1.4a}$$

wobei $\varphi = u\,f(r)$ gesetzt ist; $f(r)$ stellt eine Funktion dar, die nicht von den Spinvariablen abhängt.

Wir wählen nun die Normierungskonstante N in (A 3.1.4a) so, daß die Beziehung

$$\psi^+\,\psi = |f(r)|^2 \tag{A 3.1.8}$$

gilt. Wenn die zweikomponentigen Spinfunktionen u durch die Beziehung

$$u^+\,u = 1 \tag{A 3.1.8a}$$

normiert sind, so ist leicht zu sehen, daß die im Sinn von (A 3.1.8) normierte Funktion ψ folgende Form besitzt:

$$\psi = \left(\frac{2\varepsilon}{m\,c^2 + \varepsilon}\right)^{-1/2} \begin{pmatrix} u \\ \dfrac{c\,\vec{\sigma}\,\mathfrak{p}}{m\,c^2 + \varepsilon}\,u \end{pmatrix} f(r). \tag{A 3.1.9}$$

Durch Rechnung kann man unmittelbar nachprüfen, daß die Matrix

$$\begin{pmatrix} \vec{\sigma}\,\mathfrak{p} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma}\,\mathfrak{p} \end{pmatrix}$$

in Zuständen mit definiertem Impuls und der HAMILTON-Operator H_D der DIRAC-Gleichung für das freie Teilchen kommutativ sind. Die Größe $\vec{\sigma}\,\mathfrak{p}$ stellt folglich ein Bewegungsintegral dar. Da in diesem Fall $\mathfrak{p}$ ein Bewegungsintegral ist, so ist auch die Spinprojektion auf die Richtung des Teilchenimpulses ein Bewegungsintegral.

Wenn die Quantelungsachse in Impulsrichtung gelegt wird, so wird die Spinkomponente des Teilchens in dieser Richtung durch den Operator $\frac{1}{2}\hbar\,\sigma_z$ ausgedrückt. Die Eigenfunktionen

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dieses Operators stellen Zustände mit definierter Polarisation des Teilchens dar, die einer Orientierung des Teilchenspins in oder entgegen der Impulsrichtung entsprechen. Die anderen Polarisationszustände des Teilchens sind Linearkombinationen der durch die Funktionen u_1 und u_2 beschriebenen Zustände.

Besitzt das Teilchen die Ruhemasse Null, wie es z. B. beim Neutrino der Fall ist, so geht das Gleichungssystem (A 3.1.5a) in das System

$$\varphi = \vec{\sigma}\,\mathfrak{n}\,\chi, \tag{A 3.1.10a}$$

$$\chi = \vec{\sigma}\,\mathfrak{n}\,\varphi \tag{A 1.3.10b}$$

über, wobei $\mathfrak{n} = c\,\mathfrak{p}/\varepsilon$ ein Einheitsvektor ist, der für Zustände mit positiver Energie mit der Impulsrichtung zusammenfällt und für Zustände mit negativer Energie der Impulsrichtung entgegengesetzt ist. Die Wellenfunktion (A 3.1.9) nimmt in diesem Fall die Form

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} u \\ \vec{\sigma}\,\mathfrak{n}\,u \end{pmatrix} f(r) \tag{A 3.1.11}$$

an.

Bilden wir nun die Summe der Funktionen φ und χ, dann folgt aus (A 3.1.10b), daß man

$$\Phi = \varphi + \chi \tag{A 3.1.12}$$

durch die Funktion φ ausdrücken kann:

$$\Phi = (1 + \vec{\sigma}\,\mathfrak{n})\,\varphi. \tag{A 3.1.12a}$$

Addiert man (A 3.1.10a) und (A 3.1.10b), so ist leicht zu sehen, daß die Funktion Φ der Gleichung

$$\Phi = \vec{\sigma}\,\mathfrak{n}\,\Phi \tag{A 3.1.13}$$

genügt. Die Funktion $\Phi = \varphi + \chi$ ist somit Eigenfunktion des Operators der Spinprojektion auf die Impulsrichtung. Die Gl. (A 3.1.13) besitzt nur den Eigenwert 1. Die Funktion Φ genügt somit der DIRAC-Gleichung für die freie Bewegung eines Teilchens mit der Ruhemasse Null und longitudinaler Polarisation.

Wenn sich ein Teilchen mit der Ruhemasse Null in Zuständen mit der Wellenfunktion Φ befindet, so besitzt es damit einen bestimmten Polarisationszustand. Ist die Teilchenenergie positiv, so zeigt die Spinprojektion in Richtung des Impulses; ist sie negativ, so ist die Spinprojektion des Teilchens der Impulsrichtung entgegengesetzt.

Bildet man aus φ und χ die Funktion

$$F = \varphi - \chi, \tag{A 3.1.14}$$

so ist leicht zu sehen, daß sie der Gleichung

$$F = -\vec{\sigma}\,\mathfrak{n}\,F \tag{A 3.1.15}$$

genügt.

Die Funktion F beschreibt folglich ebenfalls Zustände mit longitudinaler Polarisation. In diesem Fall gehören jedoch zu Zuständen mit positiver Energie Spinprojektionen, die der Impulsrichtung entgegengesetzt sind, und zu Zuständen mit negativer Energie Spinprojektionen in Impulsrichtung.

3.2. Matrixelemente einiger DIRAC-Operatoren

In der Theorie des β-Zerfalls müssen Matrixelemente von DIRAC-Operatoren berechnet werden, die die Wellenfunktionen des Elektrons ψ_e und des Neutrinos ψ_ν enthalten. Betrachten wir einige dieser Matrixelemente.

Die skalare Wechselwirkung des erlaubten β-Zerfalls enthält das Matrixelement

$$(\psi_e^+ \beta \psi_\nu). \tag{A 3.2.1}$$

Werden mit Hilfe von (A 3.1.9) und (A 3.1.11) die vierkomponentigen Funktionen durch zweikomponentige ausgedrückt:

$$\psi_e = \left(\frac{2\varepsilon}{mc^2+\varepsilon}\right)^{-1/2} \begin{pmatrix} \varphi_e \\ \dfrac{c\vec{\sigma}\mathfrak{p}}{mc^2+\varepsilon}\varphi_e \end{pmatrix}, \qquad \psi_\nu = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \varphi_\nu \\ \vec{\sigma}\mathfrak{n}\varphi_\nu \end{pmatrix},$$

so nimmt das Matrixelement (A 3.2.1) die Form

$$(\psi_e^+ \beta \psi_\nu) = \left(\frac{4\varepsilon}{mc^2+\varepsilon}\right)^{-1/2} \left(\varphi_e^+ \left[1 - \frac{c(\vec{\sigma}\mathfrak{p})(\vec{\sigma}\mathfrak{n})}{mc^2+\varepsilon}\right] \varphi_\nu\right) \tag{A 3.2.2}$$

an. Werden die erlaubten β-Übergänge ohne Berücksichtigung des COULOMB-Feldes des Kerns beschrieben, so kann man die koordinatenabhängigen Anteile der Funktionen φ_e und φ_ν gleich 1 setzen. Es wird dann

$$\varphi_e^+ \varphi_e = \varphi_\nu^+ \varphi_\nu = 1,$$

und das Quadrat des Betrags des Matrixelements (A 3.2.2) ist nach Mittelung über die Spinzustände

$$2\langle|(\psi_e^+ \beta \psi_\nu)|^2\rangle_{\text{spin}} = 1 - \frac{pc}{\varepsilon}\cos\vartheta = 1 - \frac{v}{c}\cos\vartheta. \tag{A 3.2.3}$$

Hierbei ist ϑ der Winkel zwischen den Emissionsrichtungen von Elektron und Neutrino. Bei der Ableitung von (A 3.2.3) wurde der Zusammenhang zwischen Impuls und Teilchengeschwindigkeit berücksichtigt:

$$\frac{p}{\varepsilon} = \frac{v}{c^2}.$$

Analog kann man zeigen, daß bei der Vektorwechselwirkung die Korrelation zwischen der Emissionsrichtung von Elektron und Neutrino durch den Ausdruck

$$2\langle|(\psi_e^+ \psi_\nu)|^2\rangle_{\text{spin}} = 1 + \frac{v}{c}\cos\vartheta \tag{A 3.2.4}$$

beschrieben wird.

Die Gln. (A 3.2.3) und (A 3.2.4) zeigen, daß sich die Winkelkorrelation bei Verkleinerung der Elektronengeschwindigkeit vermindert und bei $v = 0$ vollständig verschwindet. Die Korrelation erreicht ihr Maximum bei $v/c \to 1$. Weiterhin folgt aus (A 3.2.3) und (A 3.2.4), daß das Elektron und das Neutrino bei der skalaren Wechselwirkung vorwiegend in entgegengesetzten Richtungen emittiert werden; bei der Vektorwechselwirkung fliegen die Teilchen vorwiegend in der gleichen Richtung. Da die Winkelkorrelation

proportional dem Kosinus des Winkels zwischen den Emissionsrichtungen der Teilchen ist, verschwindet sie bei Mittelung über alle Emissionsrichtungen des Neutrinos. Wenn man also die Richtung des Rückstoßkerns nicht festhält, so ist die Winkelverteilung der Elektronen bei den erlaubten Übergängen isotrop.

Will man die Winkelkorrelation zwischen den Emissionsrichtungen für die pseudovektorielle Variante bestimmen, so hat man das Matrixelement

$$(\psi_e^+ \vec{\sigma} \psi_\nu)$$

zu berechnen. Nach dem Übergang zu den zweikomponentigen Wellenfunktionen erhält man

$$(\psi_e^+ \vec{\sigma} \psi_\nu) = \left(\frac{4\varepsilon}{m c^2 + \varepsilon}\right)^{-1/2} \left(\varphi_e^+ \left[\vec{\sigma} + \frac{c(\vec{\sigma}\,\mathfrak{p})\,\vec{\sigma}\,(\vec{\sigma}\,\mathfrak{n})}{m c^2 + \varepsilon}\right] \varphi_\nu\right).$$

Das Quadrat des Absolutbetrages dieses Matrixelements nimmt nach der Mittelung über die Spinzustände von Elektron und Neutrino die Form

$$2 \langle |(\psi_e^+ \vec{\sigma} \psi_\nu)|^2 \rangle_{\text{spin}} = 1 - \frac{v}{3c} \cos\vartheta \tag{A 3.2.5}$$

an. Bei der Ableitung von (A 3.2.5) benutzten wir die Gleichung

$$2 \langle (\vec{\sigma}\,\mathfrak{p})\,(\vec{\sigma}^*\,\mathfrak{n}) \rangle_{\text{spin}} = \frac{1}{3} (\mathfrak{p}\,\mathfrak{n}).$$

Analog kann man zeigen, daß für die Tensorvariante folgende Beziehung gilt:

$$2 \langle |(\psi_e^+ \beta \sigma \psi_\nu)|^2 \rangle_{\text{spin}} = 1 + \frac{v}{3c} \cos\vartheta. \tag{A 3.2.6}$$

3.3. Einige Transformationen der DIRACschen Wellenfunktionen

Zur Untersuchung der Transformationseigenschaften der DIRACschen Wellenfunktionen und der Bilinearkombinationen, die man aus diesen Funktionen und den Operatoren γ_μ bilden kann, schreibt man die DIRAC-Gleichung (A 3.1.1) vorteilhaft in einer symmetrischen Form. Wir führen dazu die 4 Koordinaten x_μ ($\mu = 1, 2, 3, 4$) ein, die so gewählt werden, daß die ersten drei (x_1, x_2, x_3) die Komponenten des Radiusvektors sind und $x_4 = i c t$ ist. Die Gl. (A 3.1.1) läßt sich dann in die Form

$$\left(i \sum_\mu \gamma_\mu p_\mu + m c\right) \psi = 0, \qquad p_\mu = -i \hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu} \tag{A 3.3.1}$$

bringen. Die Matrizen γ_μ wurden im vorigen Abschnitt definiert. Sie sind hermitesch und genügen den Beziehungen

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}, \qquad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4.$$

Die zu (A 3.3.1) hermitesch konjugierte Gleichung lautet

$$-i p_4 \psi^+ \gamma_4 + i \sum_\varkappa p_\varkappa \psi^+ \gamma_\varkappa - m c \psi^+ = 0.$$

Wird diese Gleichung von rechts mit der Matrix γ_4 multipliziert und die Funktion

$$\overline{\psi} = \psi^+ \gamma_4 \tag{A 3.3.2}$$

eingeführt, so erhalten wir die Gleichung

$$i \sum_{\mu} p_\mu \overline{\psi} \gamma_\mu - m c \overline{\psi} = 0. \tag{A 3.3.3}$$

Die Funktion $\overline{\psi}$ heißt *adjungiert* zur Funktion ψ, die Gl. (A 3.3.3) ist die zur Gl. (A 3.3.1) „*adjungierte*" *Gleichung.*

Die DIRAC-Gleichung ist bekanntlich [A, 14] invariant gegen die orthogonalen Koordinatentransformationen

$$x'_\mu = \sum_{\nu} a_{\mu\nu} x_\nu \quad \text{mit} \quad \sum_{\mu} a_{\mu\nu} a_{\mu\nu'} = \delta_{\nu\nu'}. \tag{A 3.3.4}$$

Der Koordinatentransformation (A 3.3.4) entspricht folgende Transformation der DIRACschen Wellenfunktionen:

$$\psi' = S \psi, \quad \overline{\psi}' = \overline{\psi} S^{-1}, \tag{A 3.3.5}$$

wobei die Transformationsmatrix S durch die Koeffizienten $a_{\mu\nu}$ der Koordinatentransformation (A 3.3.4) bestimmt wird:

$$S^{-1} \gamma_\mu S = \sum_{\nu} a_{\mu\nu} \gamma_\nu. \tag{A 3.3.6}$$

Die Matrix S ist (da die vierte Koordinate x_4 imaginär ist) im allgemeinen nicht unitär, sondern es gilt $S^+ = \gamma_4 S^{-1} \gamma_4$.

Ein Spezialfall der Transformation (A 3.3.4) ist die eigentliche LORENTZ-Transformation. So entspricht z. B. dem Übergang vom Koordinatensystem x_μ zum System x'_μ, das sich gegenüber dem ersten mit der Geschwindigkeit v in Richtung der x-Achse bewegt, die Transformationsmatrix

$$(a_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{-1/2} & 0 & 0 & i\frac{v}{c}\left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{-1/2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\frac{v}{c}\left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{-1/2} & 0 & 0 & \left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{-1/2} \end{pmatrix}.$$

Die Inversion der Ortskoordinaten wird durch die Transformationsmatrix

$$(a_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{A 3.3.7}$$

erzeugt. Wird (A 3.3.4) benutzt, so ist zu sehen, daß der Inversion (A 3.3.7) die Matrix $S = \gamma_4$ entspricht. Bei einer Inversion der räumlichen Koordinaten werden also die DIRACschen Wellenfunktionen folgendermaßen transformiert:

$$\psi' = \gamma_4 \psi, \quad \overline{\psi}' = \overline{\psi} \gamma_4^{-1} = \overline{\psi} \gamma_4.$$

Werden die Gln. (A 3.3.5) und (A 3.3.6) benutzt, so lassen sich die im Abschn. 3.1. des Anhangs angeführten Transformationseigenschaften der Bilinearkombinationen von DIRAC-Funktionen leicht beweisen. In der Tat gilt nach (A 3.3.5)

$$\bar{\psi}' \psi' = \bar{\psi} S^{-1} S \psi = \bar{\psi} \psi .$$

Die Größe $\bar{\psi} \psi \equiv \psi^+ \gamma_4 \psi$ besitzt also die Transformationseigenschaften eines Skalars. Nach (A 3.3.5) und (A 3.3.6) haben wir weiterhin

$$\bar{\psi}' \gamma_\mu \psi' = \bar{\psi} S^{-1} \gamma_\mu S \psi = \sum_\nu a_{\mu\nu} \bar{\psi} \gamma_\nu \psi .$$

Die Größen $\bar{\psi} \gamma_\mu \psi = \psi^+ \gamma_4 \gamma_\mu \psi$ bilden folglich die Komponenten eines Vierervektors. Analog lassen sich auch die Eigenschaften der anderen Bilinearkombinationen, die im Abschn. 3.1. des Anhangs angegeben wurden, beweisen.

Betrachten wir nun die unitäre Matrix C, die die hermiteschen DIRAC-Matrizen γ_μ in die transponierten Matrizen überführt:

$$\gamma_\mu^{\mathrm{T}} = -C \gamma_\mu C^{-1}. \tag{A 3.3.8}$$

Die Matrix C ist nicht hermitesch, da

$$C^+ = -C^* \quad \text{oder} \quad C^{\mathrm{T}} = -C \tag{A 3.3.9}$$

ist. Wählt man eine spezielle Darstellung der Matrizen γ_μ, in der $\gamma_4 = \beta$ diagonal ist, so hat man

$$\gamma_4 = \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma_k = -i \beta \alpha_k = i \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, 3, \tag{A 3.3.10}$$

und die Matrix C, die durch Gl. (A 3.3.8) definiert wurde, besitzt die Form

$$C = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{A 3.3.11}$$

Wir führen nun die Wellenfunktionen ψ^c und $\bar{\psi}^c$ ein:

$$\psi^c = C^{-1} \bar{\psi}^{\mathrm{T}}, \quad \bar{\psi}^c = \psi^{\mathrm{T}} C. \tag{A 3.3.12}$$

Die Funktionen ψ^c und $\bar{\psi}^c$ bezeichnet man als *ladungskonjugierte Wellenfunktionen*.

Man kann leicht zeigen, daß der vierdimensionale Vektor der Stromdichte und der Ladung unter der Ladungskonjugation (A 3.3.12) sein Vorzeichen ändert. In der Tat erhält man nach (A 3.3.12) und (A 3.3.8) aus dem Viererstrom

$$j_4 \equiv \bar{\psi} \gamma_4 \psi \tag{A 3.3.13}$$

die Beziehung

$$j_4^c \equiv \bar{\psi}^c \gamma_4 \psi^c = \psi^{\mathrm{T}} C \gamma_4 C^{-1} \bar{\psi}^{\mathrm{T}} = -\psi^{\mathrm{T}} \gamma_4^{\mathrm{T}} \bar{\psi}^{\mathrm{T}} = -\bar{\psi} \gamma_4 \psi \equiv -j_4 . \tag{A 3.3.14}$$

Für ein Teilchen, das sich in einem magnetischen Feld mit dem Viererpotential A_μ ($A_1 = A_x$, $A_2 = A_y$, $A_3 = A_z$, $A_4 = i \varphi$) bewegt, kann man die DIRAC-Gleichung durch eine formale Substitution aus (A 3.3.1) erhalten:

$$p_\mu \to p_\mu - \frac{e}{c} A_\mu ;$$

e ist die Ladung des Teilchens. Bei Anwesenheit eines elektromagnetischen Feldes lautet folglich die DIRAC-Gleichung

$$\left[i \sum_\mu \gamma_\mu \left(p_\mu - \frac{e}{c} A_\mu\right) + m\,c\right] \psi = 0. \qquad \text{(A 3.3.15)}$$

Die Funktion $\overline{\psi} = \psi^+ \gamma_4$ genügt dabei der Gleichung

$$i \sum_\mu \left(p_\mu + \frac{e}{c} A_\mu\right) \overline{\psi}\, \gamma_\mu - m\,c\,\overline{\psi} = 0. \qquad \text{(A 3.3.16)}$$

Setzt man $C\,\psi^c = \overline{\psi}$ ein und berücksichtigt (A 3.3.12) sowie (A 3.3.16), so erhält man

$$\left[i \sum_\mu \gamma_\mu^{\mathrm{T}} \left(p_\mu + \frac{e}{c} A_\mu\right) - m\,c\right] C\,\psi^c = 0.$$

Wird diese Gleichung von links mit C^{-1} multipliziert und die aus (A 3.3.8) folgende Gleichung

$$C^{-1}\,\gamma_\mu^{\mathrm{T}} = -\,\gamma_\mu\,C^{-1}$$

berücksichtigt, so erhalten wir eine Gleichung, die den ladungskonjugierten Zustand beschreibt:

$$\left[i \sum_\mu \gamma_\mu \left(p_\mu + \frac{e}{c} A_\mu\right) + m\,c\right] \psi^c = 0. \qquad \text{(A 3.3.17)}$$

Vergleicht man die Gl. (A 3.3.17) mit (A 3.3.15), so sieht man, daß die Funktion ψ^c ein Teilchen beschreibt, dessen Ladung entgegengesetzt zur Ladung des Teilchens ist, das der Gl. (A 3.3.15) gehorcht.

3.4. Spin-Bahn-Wechselwirkung und die DIRAC-Gleichungen

Die freie Bewegung von Teilchen mit dem Spin $^1/_2$ wird durch die DIRAC-Gleichung

$$\left(i \sum_{\mu=1}^{4} \gamma_\mu\, p_\mu + m\,c\right) \psi = 0, \qquad p_\mu = -i \frac{\partial}{\partial x_\mu} \qquad \text{(A 3.4.1)}$$

beschrieben. Die Bewegung eines Teilchens in einem äußeren Feld gehorcht der Gleichung

$$\left(i \sum_\mu \gamma_\mu\, p_\mu + m\,c\right) \psi = \sum_i Q_i\, \psi, \qquad \text{(A 3.4.2)}$$

wobei die Q_i durch die möglichen Varianten der Wechselwirkung des Teilchens mit äußeren Feldern bestimmt werden. Von diesen Wechselwirkungen werden wir nur zwei betrachten:

a) die Wechselwirkung mit einem äußeren skalaren Feld, das einer Anziehung entspricht:

$$Q_S = -\frac{1}{c} V; \qquad \text{(A 3.4.3)}$$

b) die Wechselwirkung mit einem äußeren Vektorfeld:

$$Q_V = \frac{i}{c} \gamma_\mu\, B_\mu. \qquad \text{(A 3.4.4)}$$

Ein Spezialfall der Wechselwirkung (A 3.4.4) ist die Wechselwirkung mit einem elektromagnetischen Feld, das durch das Viererpotential $A_\mu = (\mathfrak{A}, i A_0)$ beschrieben wird. Hierbei ist $B_\mu = e A_\mu$.

Wird (A 3.4.3) und (A 3.4.4) in (A 3.4.2) eingesetzt, so folgt

$$i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left\{c \vec{\alpha} \left(\mathfrak{p} - \frac{1}{c} \mathfrak{B}\right) + \beta (m c^2 + V) + B_0\right\} \psi. \qquad \text{(A 3.4.5)}$$

Im weiteren setzen wir der Einfachheit halber $\mathfrak{B} = 0$. Im Falle der Wechselwirkung mit dem elektromagnetischen Feld entspricht das einer Bewegung in einem Feld mit skalarem Potential.

Die stationäre Lösung von (A 3.4.5) kann man in der Form

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \exp\left(- i \frac{m c^2 + \varepsilon}{\hbar} t\right) \qquad \text{(A 3.4.6)}$$

ansetzen, wobei φ und χ zweikomponentige Funktionen sind. Werden die Matrizen $\vec{\alpha}$ und β durch die zweireihigen Matrizen $\vec{\sigma}$ und I ausgedrückt:

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix},$$

und setzt man (A 3.4.6) in (A 3.4.5) ein, so erhält man für $\mathfrak{B} = 0$:

$$(\varepsilon - B_0 - V) \varphi = c \vec{\sigma} \mathfrak{p} \chi, \qquad \text{(A 3.4.7a)}$$

$$(\varepsilon + 2m c^2 - B_0 + V) \chi = c \vec{\sigma} \mathfrak{p} \varphi. \qquad \text{(A 3.4.7b)}$$

Wir benutzen die Gl. (A 3.4.7b) und drücken χ durch die Funktion φ aus:

$$\chi = \left(1 + \frac{\varepsilon - B_0 + V}{2m c^2}\right)^{-1} \frac{\vec{\sigma} \mathfrak{p}}{2m c} \varphi. \qquad \text{(A 3.4.8)}$$

Wenn die Ungleichung

$$\varepsilon - B_0 - V \ll 2m c^2 \qquad \text{(A 3.4.9)}$$

erfüllt ist, so gilt

$$\chi \approx \left(1 - \frac{\varepsilon - B_0 + V}{2m c^2}\right) \frac{\vec{\sigma} \mathfrak{p}}{2m c} \varphi. \qquad \text{(A 3.4.10)}$$

Setzen wir dies in (A 3.4.7a) ein, so erhalten wir eine Näherungsgleichung, die in nichtrelativistischer Näherung die Funktion φ bestimmt:

$$(\varepsilon - V - B_0) \varphi = \frac{1}{2m} \vec{\sigma} \mathfrak{p} \left(1 - \frac{\varepsilon - B_0 + V}{2m c^2}\right) \vec{\sigma} \mathfrak{p} \varphi. \qquad \text{(A 3.4.11)}$$

Werden die Gleichungen

$$(\vec{\sigma} \mathfrak{p}) (\vec{\sigma} \mathfrak{p}) = \mathfrak{p}^2,$$

$$(\vec{\sigma} \mathfrak{p}) f(r) (\vec{\sigma} \mathfrak{p}) = f(r) (\vec{\sigma} \mathfrak{p}) (\vec{\sigma} \mathfrak{p}) - i \hbar (\vec{\sigma} \operatorname{grad} f) (\vec{\sigma} \mathfrak{p}) =$$

$$= f(r) \mathfrak{p}^2 - i \hbar \{(\operatorname{grad} f) \mathfrak{p} + i \vec{\sigma} [(\operatorname{grad} f) \mathfrak{p}]\}$$

benutzt, in denen $f(r)$ eine beliebige Koordinatenfunktion bedeutet, so kann man (A 3.4.11) in folgende Form bringen:[1])

$$\varepsilon \varphi = \Big\{ V + B_0 + \left(1 - \frac{\varepsilon - B_0 + V}{2 m c^2}\right) \frac{\mathfrak{p}^2}{2m} - \\ - \frac{\hbar \vec{\sigma}}{4 m^2 c^2} [\mathfrak{p} \operatorname{grad}(B_0 - V)] - \frac{i \hbar\, \mathfrak{p} \operatorname{grad}(B_0 - V)}{4 m^2 c^2} \Big\} \varphi. \quad \text{(A 3.4.12)}$$

Wenn die Näherungsbeziehung

$$\varepsilon - B_0 + V \approx \frac{\mathfrak{p}^2}{2m}$$

und die Ungleichung (A 3.4.9) erfüllt sind, so kann man schreiben

$$\left(1 - \frac{\varepsilon - B_0 + V}{2 m c^2}\right) \frac{\mathfrak{p}^2}{2m} \approx \left(1 - \frac{\mathfrak{p}^2}{4 m^2 c^2}\right) \frac{\mathfrak{p}^2}{2m} \approx c \sqrt{\mathfrak{p}^2 + m^2 c^2} - m c^2.$$

Wir benutzen diese Näherungsbeziehung und schreiben (A 3.4.12) in der Form

$$\varepsilon \varphi = \Big\{ V + B_0 + \varepsilon_0 - \frac{\hbar \vec{\sigma}}{4 m^2 c^2} [\mathfrak{p} \operatorname{grad} B_0] + \frac{\hbar \vec{\sigma}}{4 m^2 c^2} [\mathfrak{p} \operatorname{grad} V] - \\ - \frac{i \hbar}{4 m^2 c^2} \mathfrak{p} \operatorname{grad}(B_0 - V) \Big\} \varphi. \quad \text{(A 3.4.13)}$$

Hierbei ist $\varepsilon_0 = c\sqrt{\mathfrak{p}^2 + m^2 c^2} - m c^2$ die kinetische Energie des Teilchens, das sich mit dem Impuls $\mathfrak{p}$ bewegt. Das letzte Glied auf der rechten Seite von (A 3.4.13) führt zu einer geringen Änderung der Energie des Teilchens, die nicht von der Spinorientierung abhängt. Die Glieder

$$W = - \frac{\hbar \vec{\sigma}}{4 m^2 c^2} [\mathfrak{p} \operatorname{grad} B_0] + \frac{\hbar \vec{\sigma}}{4 m^2 c^2} [\mathfrak{p} \operatorname{grad} V] \quad \text{(A 3.4.14)}$$

auf der rechten Seite der Gl. (A 3.4.13) bestimmen die Energie der Spin-Bahn-Wechselwirkung des Teilchens mit dem skalaren Feld V und der vierten Komponente des Vektorfeldes $B_4 = i B_0$.

---

[1]) Die Gl. (A 3.4.12) ist für eine nichtnormierte Funktion aufgestellt. Sie enthält deshalb den nichthermiteschen Operator $\frac{i \hbar\, \mathfrak{p} \operatorname{grad}(B_0 - V)}{4 m^2 c^2}$. Führt man an Stelle von φ die neue Wellenfunktion $\Phi = L \varphi$ ein und wählt den Operator L so, daß die Normierungsbedingung

$$1 = \int (\varphi^+ \varphi + \chi^+ \chi)\, d\tau \approx \int \Phi^+ \Phi\, d\tau$$

mit der geforderten Genauigkeit erfüllt ist, so enthält der neue HAMILTON-Operator $H' = L H L^{-1}$ nur hermitesche Glieder. Wir werden diese Transformation jedoch hier nicht durchführen, da sie die Glieder der Spin-Bahn-Wechselwirkung nicht verändert. Eingehender ist die Frage der richtigen Funktionennormierung beim Übergang von der DIRAC-Gleichung zur nichtrelativistischen Näherung von ACHIJESER und BERESTEZKI [A, 15] erläutert (s. auch FOLDY, WOUTHUYSEN, KURSUNOGLU und SUCHER [A, 16]).

Betrachten wir nun, wie der Ausdruck für die Energie der Spin-Bahn-Wechselwirkung (A 3.4.14) auf den Fall von Nukleonen angewendet werden kann. Wie bekannt, kann das Verhalten der Nukleonen im elektromagnetischen Feld wegen ihrer starken Wechselwirkung mit dem Mesonenfeld nicht durch die DIRAC-Gleichung beschrieben werden. In der nichtrelativistischen Näherung erhält man richtige Resultate, wenn in der betreffenden Gleichung die Substitution

$$\frac{e\hbar}{2Mc} \to \mu \frac{e\hbar}{2Mc} \tag{A 3.4.15}$$

durchgeführt wird, wobei

$$\mu = \begin{cases} 2{,}7929 \text{ für Protonen,} \\ -1{,}9131 \text{ für Neutronen} \end{cases} \tag{A 3.4.16}$$

und M die Nukleonenmasse sind.

Wird $B_0 = e A_0$ gesetzt und (A 3.4.15) berücksichtigt, so erhalten wir für die Spin-Bahn-Wechselwirkung von Nukleonen mit dem elektrostatischen Feld A_0 folgenden Ausdruck:

$$W_{\text{em}} = -\frac{e\hbar\mu}{4M^2c^2}\vec{\sigma}\,[\mathfrak{p}\,\operatorname{grad} A_0]. \tag{A 3.4.17]}$$

Dabei bedeutet μ das magnetische Moment der Nukleonen in Kernmagnetonen.

Zur Bestimmung der Spin-Bahn-Wechselwirkung von Nukleonen, die sich im Feld anderer Nukleonen bewegen, muß in (A 3.4.14) $m = M$ gesetzt und $V = \sum V_i$ angenommen werden. Mit V_i wird dabei die potentielle Energie der Paarwechselwirkung des gegebenen Nukleons mit dem i-ten Nukleon des Kerns bezeichnet. Da jedoch die Größe und die Radialabhängigkeit des tatsächlichen Potentials nicht bekannt sind, muß man bei der Untersuchung der Spin-Bahn-Wechselwirkung an Stelle von V das Potential des optischen Modells V_{opt} benutzen. Dieses Potential ändert sich stetig im Kern. Es gibt eine recht gute Beschreibung der elastischen Streuung an Kernen, fällt jedoch nicht mit dem tatsächlichen Potential zusammen, das innerhalb des Kerns auf die Nukleonen wirkt (vgl. Kap. 13). V_{opt} ändert sich möglicherweise innerhalb kleiner Gebiete sehr stark. Für die Spin-Bahn-Wechselwirkung muß man also den Ausdruck

$$W_{\text{K}} = b\,\frac{\hbar}{4M^2c^2}\vec{\sigma}\,[\mathfrak{p}\,\operatorname{grad} V_{\text{opt}}] \tag{A 3.4.18}$$

annehmen, wobei die Konstante b wesentlich davon abhängt, auf welche Weise das Potential V_{opt} von den Koordinaten abhängt.

Das Potential V_{opt} ist zentralsymmetrisch:

$$[\mathfrak{p}\,\operatorname{grad} V_{\text{opt}}] = -\hbar\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial V_{\text{opt}}}{\partial r}\,\mathfrak{l}.$$

Die Energie der Spin-Bahn-Wechselwirkung kann deshalb in der Form

$$W_{\text{K}} = -b\,\frac{\hbar^2}{4M^2c^2}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial V_{\text{opt}}}{\partial r}\,(\vec{\sigma}\,\mathfrak{l}) = -\beta\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial V_{\text{opt}}}{\partial r}\,(\vec{\sigma}\,\mathfrak{l}) \tag{A 3.4.19}$$

geschrieben werden. Der Wert des Parameters β hängt davon ab, welche r-Abhängigkeit des Potentials V_{opt} angenommen wird. In einer Arbeit von SACK, BIEDENHARN und BREIT [A, 17] wird gezeigt, daß ein Potential mit der Spin-Bahn-Wechselwirkung

$$V_{\text{opt}}(r) = -V_0\left(1 - \beta\frac{1}{r}(\vec{\sigma}\,\mathfrak{l})\frac{\partial}{\partial r}\right)\exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right)$$

bei $V_0 = 47{,}32$ MeV, $\beta = 7{,}4\,(\hbar/M\,c)^2$, $a = 2{,}3\cdot 10^{-13}$ die experimentell bestimmte Energieabhängigkeit der Phasenverschiebungen im Gebiet $1\cdots 15$ MeV gut wiedergibt ($p_{1/2}$- und $p_{3/2}$-Zustände). Recht befriedigende Ergebnisse liefert in diesem Fall auch der Potentialtopf

$$V_{\text{opt}}(r) = \begin{cases} -D - \beta(\vec{\sigma}\,\mathfrak{l})\dfrac{1}{R_0}\,\delta(r - R_0) & \text{für} \quad r < R_0, \\ 0 & \text{für} \quad r > R_0, \end{cases}$$

wenn man folgende Zahlenwerte benutzt:

$$\beta = 12{,}2\left(\frac{\hbar}{M\,c}\right)^2, \qquad R_0 = 3{,}21\cdot 10^{-13}\,\text{cm}, \qquad D = 19{,}65\,\text{MeV}.$$

Will man die gleichen experimentellen Ergebnisse mit einem Potential beschreiben, das exponentiell vom Abstand abhängt:

$$V_{\text{opt}}(r) = -V_0\left(1 - \beta(\vec{\sigma}\,\mathfrak{l})\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\exp\left(-\frac{2r}{b}\right),$$

so muß man die Werte

$$V_0 = 155{,}5\,\text{MeV}, \qquad b = 1{,}924\cdot 10^{-13}\,\text{cm}, \qquad \beta = 5\left(\frac{\hbar}{M\,c}\right)^2$$

benutzen.

Der Ausdruck (A 3.4.18) kann somit nur zur Beschreibung der Spin-Bahn-Wechselwirkung von Nukleonen im Kern benutzt werden, wenn man einen entsprechenden Wert für den Koeffizienten b wählt, der indirekt den Unterschied des Potentials V_{opt} zum tatsächlichen Potential und die Mängel bei der Beschreibung von Nukleonen mit der DIRAC-Gleichung berücksichtigt.

4. ENERGIE DER KLASSISCHEN OBERFLÄCHENSCHWINGUNGEN EINES KERNS IN HYDRODYNAMISCHER NÄHERUNG

Wir nehmen an, daß die kollektiven Schwingungen der Nukleonen im Kern als wirbelfreie Bewegung einer Flüssigkeit aufgefaßt werden können. Dabei soll diese Flüssigkeit die konstante Dichte ϱ besitzen. Wir entwickeln die Abweichung der Kernoberfläche von der Kugelform nach Kugelfunktionen:

$$\Delta R = R(\vartheta, \varphi) - R_0 = R_0 \sum_{\lambda,\mu} \alpha_{\lambda\mu}\, Y_{\lambda\mu}(\vartheta, \varphi). \qquad \text{(A 4.1)}$$

Wir nehmen weiterhin an, daß die Formänderung des Kerns durch wirbelfreie Bewegungen der Kernmaterie hervorgerufen wird. Dann läßt sich der Geschwindigkeitsvektor dieser Bewegung durch ein Geschwindigkeitspotential Φ über die Beziehung

$$\mathfrak{v} = \operatorname{grad} \Phi$$

definieren.

Bei konstanter Dichte der Kernmaterie gilt

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = \nabla^2 \Phi = 0 .$$

Die Lösung dieser Gleichung läßt sich in der Form

$$\Phi = \sum_{\lambda, \mu} A_{\lambda \mu} \left(\frac{r}{R_0}\right)^{\lambda} Y_{\lambda \mu}(\vartheta, \varphi)$$

darstellen, wenn man die bei $r = 0$ endliche Lösung wählt. Hierbei bedeuten r, ϑ, φ die Kugelkoordinaten eines beliebigen Punktes der Kernmaterie. Die Beziehung zwischen den Koeffizienten $A_{\lambda \mu}$ in der Entwicklung des Geschwindigkeitspotentials und den Koeffizienten $\alpha_{\lambda \mu}$, die die Oberflächenform des Kerns bestimmen, läßt sich aus der Bedingung

$$\frac{d R(\vartheta, \varphi)}{d t} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{r = R_0}$$

finden. Es wird

$$R_0^2 \, \dot{\alpha}_{\lambda \mu} = \lambda \, A_{\lambda \mu} . \tag{A 4.2}$$

Die kinetische Energie der Schwingungen wird durch den Ausdruck

$$E_{\text{kin}} = \frac{\varrho}{2} \int |\operatorname{grad} \Phi|^2 \, d\tau$$

gegeben.[1]) Dabei ist über das Kernvolumen zu integrieren. Berücksichtigt man

$$\operatorname{grad}_r \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad \operatorname{grad}_\vartheta \Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta}, \quad \operatorname{grad}_\varphi \Phi = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}$$

und benutzt den Abschn. 1.5. des Anhangs, so kann man schreiben

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= \frac{\varrho}{2} \sum A_{\lambda \mu}^{*} A_{\lambda' \mu'} \int_0^{R_0} d r \left(\frac{r}{R_0}\right)^{\lambda + \lambda'} \times \\ &\quad \times \int d\Omega \left\{ \lambda \lambda' Y_{\lambda \mu}^{*} Y_{\lambda' \mu'} + \frac{\partial Y_{\lambda \mu}^{*}}{\partial \vartheta} \frac{\partial Y_{\lambda' \mu'}}{\partial \vartheta} + \frac{\mu \mu'}{\sin^2 \vartheta} Y_{\lambda \mu}^{*} Y_{\lambda' \mu'} \right\} = \\ &= \frac{R_0 \varrho}{2} \sum_{\lambda, \mu} \lambda \, |A_{\lambda \mu}|^2 . \end{aligned}$$

Setzt man hierin (A 4.2) ein, so erhält man endgültig für die kinetische Energie der Oberflächenschwingungen

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda, \mu} B_\lambda \, |\dot{\alpha}_{\lambda \mu}|^2$$

---

[1]) Das Geschwindigkeitspotential und die Abweichung ΔR sind infolge der Bedingungen $\alpha_{\lambda \mu}^{*} = (-1)^\mu \alpha_{\lambda, -\mu}$ für die Koeffizienten $\alpha_{\lambda \mu}$ reelle Größen. Aus formalen Gründen ist es jedoch zweckmäßig, die Quadrate dieser Größen als Quadrate der Absolutbeträge zu schreiben.

mit

$$B_\lambda = \varrho\, R_0^5\, \lambda^{-1}.$$

Die potentielle Energie, die mit der Abweichung des Kerns von der kugelsymmetrischen Form verknüpft ist, läßt sich als Summe zweier Glieder schreiben:

$$V = V_\sigma + V_e. \tag{A 4.3}$$

Hierbei ist

$$V_\sigma = \sigma \Delta S;$$

σ bedeutet die Oberflächenspannung, ΔS die Veränderung der Kernoberfläche und V_e die Veränderung der elektrostatischen Energie bei der Kerndeformation.

Bei einer Veränderung der Kernform ($R_0 \to R_0 + \Delta R$) ändert sich die Oberfläche des Kerns um die Größe

$$\Delta S = \frac{1}{2} \int \left\{ \left| \frac{\partial (\Delta R)}{\partial \vartheta} \right|^2 + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \left| \frac{\partial (\Delta R)}{\partial \varphi} \right|^2 + 2 |\Delta R|^2 \right\} d\Omega =$$

$$= \frac{R_0^2}{2} \sum_{\lambda, \mu} (\lambda - 1)(\lambda + 2) |\alpha_{\lambda\mu}|^2.$$

Man erhält also

$$V_\sigma = \frac{R_0^2 \sigma}{2} \sum_{\lambda, \mu} (\lambda - 1)(\lambda + 2) |\alpha_{\lambda\mu}|^2. \tag{A 4.4}$$

Die Änderung der elektrostatischen Energie des Kerns bei der Deformation läßt sich folgendermaßen schreiben:

$$V_e = \frac{1}{2} \int q \Delta \varphi \, d\tau + \frac{1}{2} \int \varphi \Delta q^* \, d\tau + \frac{1}{2} \int \Delta \varphi \Delta q^* \, d\tau,$$

wobei φ das skalare Potential und q die elektrische Ladungsdichte bedeuten. Ist die elektrische Ladungsdichte in Kernen mit Kugelform

$$q_0 = \frac{3 Z e}{4 \pi R_0^3}$$

konstant und außerhalb des Kerns gleich Null, so ist die Änderung der Ladungsdichte bei einer Veränderung der Kernform (in erster Näherung) dem Auftreten einer elektrischen Ladung mit der Oberflächendichte $q_0 R_0 \zeta$ äquivalent. Es gilt also

$$\Delta q = q_0 R_0 \zeta \, \delta(r - R_0) \tag{A 4.5}$$

mit $\zeta = \Delta R / R_0$. Dabei gilt $\int \Delta q \, d\tau = 0$.

Zur Berechnung des zusätzlichen Potentials $\Delta \varphi$ entwickeln wir dieses nach Kugelfunktionen:

$$\Delta \varphi = \begin{cases} \sum\limits_{\lambda, \mu} Q_{\lambda\mu} \dfrac{r^\lambda}{R_0^{\lambda+1}} Y_{\lambda\mu} & \text{für} \quad r \leqq R_0, \\ \sum\limits_{\lambda, \mu} Q_{\lambda\mu} \dfrac{R_0^\lambda}{r^{\lambda+1}} Y_{\lambda\mu} & \text{für} \quad r \geqq R_0; \end{cases} \tag{A 4.6}$$

dann lassen sich die Entwicklungskoeffizienten $Q_{\lambda\mu}$ aus der Bedingung

$$\left[\frac{\partial(\Delta\varphi)}{\partial r}\right]_{r=R_0-0} - \left[\frac{\partial(\Delta\varphi)}{\partial r}\right]_{r=R_0+0} = 4\pi q_0 R_0 \zeta$$

bestimmen. Setzt man hier (A 4.6) und (A 4.1) ein, so findet man

$$Q_{\lambda\mu} = \frac{4\pi q_0 R_0^3}{2\lambda+1}\alpha_{\lambda\mu}. \tag{A 4.7}$$

Benutzt man (A 4.1) und (A 4.5) bis (A 4.7), so erhält man in der hier betrachteten Näherung

$$\frac{1}{2}\int q\Delta\varphi d\tau = 0,$$

$$\frac{1}{2}\int \Delta\varphi\Delta q^* d\tau = \frac{q Z^2 e^2}{3\pi R_0}\sum_{\lambda,\mu}\frac{|\alpha_{\lambda\mu}|^2}{2\lambda+1}. \tag{A 4.8}$$

Zur Berechnung des Integrals $^1/_2\int \varphi\Delta q^* d\tau$ stellen wir das Potential φ in einer dünnen Oberflächenschicht (bei $\Delta q \neq 0$) durch die genäherte Beziehung

$$\varphi = \frac{eZ}{R_0(1+\zeta)} \approx \frac{eZ}{R_0}(1-\zeta)$$

dar. Dann wird

$$\frac{1}{2}\int \varphi\Delta q^* d\tau = -\frac{3e^2Z^2}{8\pi R_0}\sum_{\lambda,\mu}|\alpha_{\lambda\mu}|^2. \tag{A 4.9}$$

Addiert man (A 4.8) und (A 4.9), so erhält man

$$V_e = -\frac{3e^2Z^2}{4\pi R_0}\sum_{\lambda,\mu}\frac{(\lambda-1)}{(2\lambda+1)}|\alpha_{\lambda\mu}|^2. \tag{A 4.10}$$

Setzt man noch (A 4.4) und (A 4.10) in (A 4.3) ein, so erhält man einen expliziten Ausdruck für die potentielle Energie der Oberflächenschwingungen durch die Koeffizienten $\alpha_{\lambda\mu}$:

$$V = \frac{1}{2}\sum_{\lambda,\mu} C_\lambda |\alpha_{\lambda\mu}|^2$$

mit

$$C_\lambda = (\lambda-1)\left\{(\lambda+2)R_0^2\sigma - \frac{3e^2Z^2}{2\pi(2\lambda+1)R_0}\right\}.$$

LITERATURVERZEICHNIS

Kapitel 1

[1,1] IVANENKO, D. D.: Nature (London) **129** (1932) 798; HEISENBERG, W.: Z. Phys. **77** (1932) 1.

[1,2] SHAPIRO, A. M.: Rev. mod. Phys. **28** (1956) 164.

[1,3] CHAMBERLAIN, O., E. SEGRÉ, C. WIEGAND und T. YPSILANTIS: Phys. Rev. **100** (1955) 947; Usp. fiz. Nauk **58** (1956) 685 (Russ.).

[1,4] HOFSTÄDTER, R., H. R. FECHTER und J. A. MCINTYRE: Phys. Rev. **91** (1953) 422; **92** (1953) 978; YENNIE, D. R., D. C. RAVEHALL und R. N. WILSON, Phys. Rev. **95** (1954) 500; HOFSTÄDTER, R., B. HAHN, A. KNUDSEN und J. MCINTYRE: Phys. Rev. **95** (1954) 512.

[1,5] JOHNSON, M. H., und E. TELLER: Phys. Rev. **93** (1954) 357.

[1,6] BERG, R., und L. WILETS: Phys. Rev. **101** (1956) 201; WILETS, L.: Phys. Rev. **101** (1956) 1805; ROSS, A., H. MARK und R. LAUSON: Phys. Rev. **102** (1956) 1613.

Kapitel 2

[2,1] SCHAPIRO, I. S.: Usp. fiz. Nauk **53** (1954) 7 (Russ.).

Kapitel 3

[3,1] SMORODINSKI, J. A.: Dokl. Akad. Nauk SSSR **60** (1948) 217 (Russ.).

[3,2] HADLEY, J., E. L. KELLY et al.: Phys. Rev. **75** (1949) 351.

[3,3] BRUECKNER, K. A.: Phys. Rev. **97** (1955) 1353.

[3,4] BETHE, H. A.: Phys. Rev. **103** (1956) 1353.

[3,5] DREEL, S. D., und K. HUANG: Phys. Rev. **91** (1953) 1527.

[3,6] BRUECKNER, K. A., C. A. LEVINSON und H. MAHMOUND: Phys. Rev. **95** (1954) 217.

[3,7] LÉVY, M. M.: Phys. Rev. **88** (1952) 725.

[3,8] YUKAWA, H.: Proc. phys.-math. Soc. Japan **17** (1935) 48.

[3,9] SALZER, H. E.: Usp. fiz. Nauk **53** (1954) 455 (Russ.).

[3,10] BAS, A. I., und J. A. SMORODINSKI: Usp. fiz. Nauk **55** (1955) 215 (Russ.); AJZENBERG, F., und T. LAURITSEN: Rev. mod. Phys. **24** (1952) 321; BOCKENBERG, C. K., C. P. BROWNE et al.: Phys. Rev. **92** (1953) 664.

Kapitel 4

[4,1] RAINWATER, L. J.: Phys. Rev. **79** (1950) 432.

[4,2] HEISENBERG, W.: Theorie des Atomkerns, Vorlesung von W. HEISENBERG, ausgearbeitet von W. MACKE. Max-Planck-Institut, Göttingen 1951.

[4,3] LEVINTOV, I. I.: Physica **XXII** (1956) 1178; J. eksp. teor. Fiz. **30** (1956) 987 (Russ.).

[4,4] ELLIOT, J. P., und B. H. FLOWERS: Proc. roy. Soc. (London) A **229** (1955) 536.

[4,5] KLINKENBERG, P. F. A.: Rev. mod. Phys. **26** (1952) 63.

[4,6] ELLIOT, J. P., und T. H. R. SKYRME: Proc. roy. Soc. (London) A **232** (1955) 561; GARTENHAUS, S., und C. SCHWARTZ: Phys. Rev. **108** (1957) 482.

[4,7] Ландау, Л. Д., и Е. М. Лифшиц: Квантовая механика. Гостехиздат, Москва 1948 (Landau, L. D., und J. M. Lifschiz: Quantenmechanik. Gostechisdat, Moskau 1948).
[4,8] Flowers, B. H.: Proc. roy. Soc. (London) **A 212** (1952) 248; Edmonds, A. R., und B. H. Flowers: Proc. roy. Soc. (London) **A 214** (1952) 515; **A 215** (1952) 120.
[4,9] Неудачин, В.: К вопросу о квантовых числах и вычислительных методах теории ядерных оболочек. МГУ, диссертация 1954 (Neudatschin, W.: Zur Frage der Quantenzahlen und der Rechenmethoden in der Theorie der Kernschalen, Diss. an der Staatlichen Universität Moskau, 1954).
[4,10] Bloch, F.: Phys. Rev. **83** (1951) 839; de Shalit, A.: Helv. phys. Acta **24** (1951) 296.
[4,11] Miyazawa, M.: Progr. theor. Phys. **6** (1951) 801.
[4,12] Blin-Stoyle, R. J., und M. Perkis: Proc. phys. Soc. (London) **A 66** (1953) 1158; **A 67** (1954) 885; Arima, A., und H. Horie: Progr. theor. Phys. **11** (1954) 509.
[4,13] Feenberg, E.: Phys. Rev. **76** (1949) 1275.
[4,14] Inglis, D. R.: Phys. Rev. **87** (1952) 915; Rev. mod. Phys. **25** (1953) 390; Tauber, G. E., und Ta-You Wu: Phys. Rev. **93** (1954) 295; Lyons, D. H.: Phys. Rev. **105** (1957) 937.
[4,15] Mayer, M. G.: Phys. Rev. **75** (1949) 1969; **78** (1950) 16; **78** (1950) 22.
[4,16] Nordheim, L. W.: Phys. Rev. **75** (1949) 1894; Feenberg, E., K. C. Hammack und L. W. Nordheim: Phys. Rev. **75** (1949) 1968.
[4,17] Hill, R. D.: Phys. Rev. **76** (1949) 998; Townes, C. H., H. M. Foley und W. Low: Phys. Rev. **76** (1949) 1415; Welles, S. B.: Phys. Rev. **62** (1942) 197.
[4,18] Blin-Stoyle, R. J.: Rev. mod. Phys. **28** (1956) 75.
[4,19] Nilson, S. G.: Kgl. Danske Videnskab. Selsk., Mat.-fys. Medd. **29** (1955) No. 16.
[4,20] von Weizsäcker, C. F.: Z. Phys. **96** (1935) 431.
[4,21] Green, A. E. S.: Phys. Rev. **95** (1954) 1006.
[4,22] Bohr, N.: Nature (London) **137** (1936) 344 und 350; **141** (1938) 326; Usp. fiz. Nauk **16** (1936) 425 (Russ.); Bohr, N., und F. Kalckar: Kgl. Danske Videnskab. Selsk., Mat.-fys. Medd. **14** (1937) No. 10; Usp. fiz. Nauk **20** (1958) 1 (Russ.).
[4,23] Bohr, A.: Kgl. Danske Videnskab. Selsk., Mat.-fys. Medd. **26** (1952) No. 14.
[4,24] Flügge, S.: Ann. Phys. **39** (1941) 373.
[4,25] Frenkel, J. I.: J. eksp. teor. Fiz. **9** (1939) 641 (Russ.).
[4,26] Marumori, T., S. Suecane und A. Yamamoto: Progr. theor. Phys. **16** (1956) 320.
[4,27] Bohr, A., und B. Mottelson: Kgl. Danske Videnskab. Selsk., Mat.-fys. Medd. **27** (1953) No. 16.
[4,28] van Wageningen, R.: Physica **19** (1953) 1004; van Wageningen, R., und J. de Boer: Physica **18** (1952) 369.
[4,29] Ландау, Л. Д., и Я. А. Смородинский: Лекции по теории атомного ядра. Гостехиздат, Москва 1955 (Landau, L. D., und J. A. Smorodinski: Vorlesungen über die Theorie des Atomkerns. Gostechisdat, Moskau 1955).
[4,30] Ford, K. W.: Phys. Rev. **90** (1953) 29.
[4,31] Davidson, W. L., und E. Feenberg: Phys. Rev. **89** (1953) 856.
[4,32] Klein, O.: Z. Phys. **58** (1929) 730.
[4,33] Wigner, E. P.: Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atomspektren. Braunschweig 1931.
[4,34] McClelland, C., H. Mark und C. Goodman: Phys. Rev. **97** (1955) 1191.
[4,35] Heydenburg, N. P., und G. Temmer: Phys. Rev. **100** (1955) 150.
[4,36] Dawydow, A. S., und G. F. Filippow: J. eksp. teor. Fiz. **32** (1957) 826 (Russ.).

[4,37] TAMURA, T.: Nuovo Cim. **4** (1956) 713; NATAF, R.: Compt. rend. **240** (1955) 2510; **241** (1955) 31; LIPKIN, H. J., A. DE SHALIT und I. TALMI: Nuovo Cim. **11** (1955) 773.
[4,38] INGLIS, D. R.: Phys. Rev. **96** (1954) 1059; **103** (1956) 1786.
[4,39] BOHR, A., und B. MOTTELSON: Kgl. Danske Videnskab. Selsk., Mat.-fys. Medd. **30** (1955) No. 1.
[4,40] DAWYDOW, A. S., und G. F. FILIPPOW: J. eksp. teor. Fiz. **32** (1957) 945 (Russ.).
[4,41] MOSZKOWSKI, S. A., und C. TOWNES: Phys. Rev. **93** (1954) 306.
[4,42] PRESENT, R. D., und J. K. KNIPP: Phys. Rev. **57** (1940) 751.
[4,43] DAVIS, R. H., A. S. DAVIATA et al.: Phys. Rev. **103** (1956) 1801.
[4,44] ALDER, K., A. BOHR et al.: Rev. mod. Phys. **28** (1956) 432.
[4,45] SLURS, V., und J. McNALLY: J. opt. Soc. Amer. **44** (1954) 87.
[4,46] MURAKAMA, K., und T. KAMEI: Phys. Rev. **105** (1957) 671.
[4,47] SEGRÈ, E., ed.: Experimental Nuclear Physics, Vol. 1, Nuclear Moments. New York 1953.
[4,48] HUUS, T., et al.: Kgl. Danske Videnskab. Selsk., Mat.-fys. Medd. **30** (1956) No. 17.
[4,49] SUNYAR, A. W.: Phys. Rev. **98** (1955) 653.
[4,50] HUUS, T., und C. ZUPANCIC: Kgl. Danske Videnskab. Selsk., Mat.-fys. Medd. **28** (1953) No. 1.
[4,51] WAY, K.: Phys. Rev. **55** (1950) 963.
[4,52] STELSON, P., und F. K. McGOWAN: Phys. Rev. **99** (1955) 112.
[4,53] SLIW, L. A., und L. K. PEKER: Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. fiz. **17** (1953) 411 (Russ.).
[4,54] WILLAND, H., J. BAIR et al.: Phys. Rev. **101** (1956) 765.
[4,55] AJZENBERG, A., und T. LAURITSEN: Rev. mod. Phys. **27** (1955) 77.
[4,56] TAUBER, G.: Phys. Rev. **99** (1955) 176.
[4,57] PRYCE, M. H. L.: Proc. phys. Soc. (London) **A 65** (1952) 773.
[4,58] GOLDHABER, M., und A. W. SUNYAR: Phys. Rev. **83** (1951) 906; MOSZKOWSKI, S. A.: Phys. Rev. **83** (1951) 1071.
[4,59] STEPHENS, F., F. ASARO und I. PERLMAN: Phys. Rev. **96** (1954) 1568; **100** (1955) 1543.
[4,60] SCHARFF-GOLDHABER, G., und J. WENESER: Phys. Rev. **98** (1955) 212.
[4,61] DAWYDOW, A. S., und G. F. FILIPPOW: J. eksp. teor. Fiz. **33** (1957) 723 (Russ.).
[4,62] PAULI, W.: Die allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik, in: Handbuch der Physik, Bd. 24.1, Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1933, S. 83.
[4,63] Лебедев, Н. Н.: Специальные функции и их применения. Гостехиздат, Москва 1953 (LEBEDEW, N. N.: Spezielle Funktionen und ihre Anwendung. Gostechisdat, Moskau 1953).
[4,64] DAWYDOW, A. S., und A. A. TSCHABAN: J. eksp. teor. Fiz. **33** (1957) 547 (Russ.).
[4,65] MURRAY, J., F. BOEHM et al.: Phys. Rev. **97** (1955) 1007.
[4,66] Джелепов, Б. С., и Л. К. Пекер: Схемы распада радиоактивных изотопов. Изд-во АН СССР, Москва 1957 (DSHELEPOW, B. S., und L. K. PEKER: Zerfallsschemata radioaktiver Nuklide. Verlag der Akad. d. Wiss. der UdSSR, Moskau 1957).
[4,67] LANDAU, L. D.: J. eksp. teor. Fiz. **7** (1937) 819 (Russ.).
[4,68] FRENKEL, J. I.: Sowj. Phys. **9** (1936) 533.
[4,69] FRIEDMAN, J. I., und V. F. WEISSKOPF: Usp. fiz. Nauk **61** (1957) 399 (Russ.).
[4,70] BETHE, H. A.: Elementary Nuclear Theory. J. Wiley & Sons, New York 1947.
[4,71] HEIDMAN, J., und H. A. BETHE: Phys. Rev. **84** (1951) 275.
[4,72] WEISSKOPF, V. F.: Phys. Rev. **52** (1937) 295.
[4,73] GUGELOT, P. C.: Phys. Rev. **93** (1954) 425.

[4,74] GUGELOT, P. C.: Phys. Rev. **81** (1951) 51; STETSON, P., und C. GOODMAN: Phys. Rev. **82** (1951) 69; WHITMORE, B., und G. DENNIS: Phys. Rev. **84** (1951) 296; GRAVES, E., und L. ROSEN: Phys. Rev. **89** (1953) 343.

[4,75] PAUL, E. B., und R. L. CLARKE: Canad. J. Phys. **31** (1953) 267; HIRZEL, O., und H. WÄFFLER: Helv. phys. Acta **20** (1947) 373.

Kapitel 5

[5,1] BOHR, N., und J. A. WHEELER: Phys. Rev. **56** (1939) 426.

[5,2] PETRSHAK, K. A., und G. I. FLJOROW: J. eksp. teor. Fiz. **10** (1940) 1013 (Russ.); Usp. fiz. Nauk **25** (1941) 178 (Russ.); Phys. Rev. **58** (1940) 89.

[5,3] GLASSTONE, S., und M. C. EDLUND: The Elements of Nuclear Reactor Theory. New York 1955.

[5,4] Галанин, А. Д.: Теория ядерных реакторов на тепловых нейтронах. Атомиздат, Москва 1957 (Deutsche Übersetzung: GALANIN, A. D.: Theorie der thermischen Kernreaktoren. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1959).

[5,5] GAMOW, G.: Z. Phys. **51** (1928) 204; **52** (1929) 496.

[5,6] GURNEY, R. W., und E. U. CONDON: Nature (London) **122** (1928) 439; CONDON, E. U., und R. W. GURNEY: Phys. Rev. **33** (1929) 127.

[5,7] SEXL, TH.: Z. Phys. **81** (1933) 163.

[5,8] PRESTON, M. A.: Phys. Rev. **71** (1947) 865.

[5,9] LANDAU, L. D.: Phys. Z. Sowj. **11** (1937) 556.

[5,10] Ландау, Л. Д., и Я. С. Смородинский: Лекции по теории атомного ядра. Гостехиздат, Москва 1955 (LANDAU, L. D., und J. S. SMORODINSKI: Vorlesungen über die Theorie des Atomkerns. Gostechisdat, Moskau 1955).

[5,11] AMBROSINO, G., und H. PIATIER: Compt. rend. **232** (1951) 400; DEVANEY, J.: Phys. Rev. **91** (1953) 597.

[5,12] ERMA, V. A.: Phys. Rev. **105** (1957) 1785.

[5,13] BOHR, A., P. FRÖMAN und B. MOTTELSON: Kgl. Danske Videnskab. Selsk., Mat.-fys. Medd. **29** (1955) No. 10.

[5,14] PERLMAN, I., A. GHIORSO und G. T. SEABORG: Phys. Rev. **77** (1950) 26.

[5,15] GHIORSO, A., S. THOMPSON et al.: Phys. Rev. **95** (1954) 293.

[5,16] GOLDIN, L. L., G. I. NOVIKOVA (NOWIKOWA) und E. F. TRETYAKOV (TRETJAKOW): Phys. Rev. **103** (1956) 1004.

[5,17] GOLDIN, L. L., L. K. PEKER und G. N. NOWIKOWA: Usp. fiz. Nauk **59** (1956) 459 (Russ.).

[5,18] LANDAU, L. D.: Vortrag auf der 6. Unionskonferenz über Kernspektroskopie, 1956.

[5,19] NOSSOW, W. G.: J. eksp. teor. Fiz. **33** (1957) 226 (Russ.).

[5,20] STRUTINSKI, W. M.: J. eksp. teor. Fiz. **30** (1956) 411 (Russ.).

[5,21] RASMUSSEN, J. O., und B. SEGALL: Phys. Rev. **103** (1956) 1298.

[5,22] ADELSON-WELSKI, G. M., A. P. BRISGAL u. a.: Vortrag auf der 7. Unionskonferenz über Kernspektroskopie, 1957; J. eksp. teor. Fiz. **35** (1958) 184 (Russ.).

[5,23] PERLMAN, I., und A. ASARO: Annu. Rev. nucl. Sci. **4** (1954) 157.

[5,24] WHEELER, J. A.: Proc. Internat. Conf. of Nuclear and Meson Physics, Glasgow 1954.

[5,25] FRENKEL, J. I.: J. eksp. teor. Fiz. **9** (1939) 641 (Russ.).

[5,26] FRENKEL, J. I.: J. Phys. USSR **10** (1946) 533; Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. fiz. **10** (1946) 415 (Russ.).

[5,27] Френкель, Я. И.: Принципы теории атомных ядер. Изд-во АН СССР, Москва 1945 (FRENKEL, J. I.: Prinzipien der theoretischen Kernphysik. Verlag der Akad. d. Wiss. der UdSSR, Moskau 1945).

[5,28] SEABORG, G. T.: Phys. Rev. **85** (1952) 157.
[5,29] WHITEHOUSE, W. J., und W. GOLBRAITH: Nature (London) **169** (1952) 494.
[5,30] SELDOWITSCH, J. B., und J. B. CHARITON: Usp. fiz. Nauk **25** (1941) 381 (Russ.).
[5,31] PIELDS, P., M. STUDIER et al.: Nature (London) **174** (1954) 265.
[5,32] KOLESNIKOW, N. N., und S. I. LARIN: J. eksp. teor. Fiz. **28** (1955) 244 (Russ.).
[5,33] HUIZENGA, J. R.: Phys. Rev. **94** (1954) 158.
[5,34] Мехедов, В. Н.: Физика деления атомных ядер. Атомиздат. Москва 1957, стр. 181 (MECHEDOW, W. N.: in: Physik der Spaltung der Atomkerne. Atomisdat, Moskau 1957, S. 181).
[5,35] STUDIER, M., und J. R. HUIZENGA: Phys. Rev. **96** (1954) 545.
[5,36] PRESENT, R. D., und J. K. KNIPP: Phys. Rev. **57** (1940) 1188; PRESENT, R. D., F. PEINES und J. K. KNIPP: Phys. Rev. **70** (1946) 557.
[5,37] FRANKEL, S., und M. METROPOLIS: Phys. Rev. **72** (1947) 914.
[5,38] WHITEHOUSE, W. J.: Progr. nucl. Phys. **2** (1952) 134.
[5,39] FRANK, I. M.: in: loc. cit. [5,34], S. 58.
[5,40] SWIATECKI, W. J.: Phys. Rev. **100** (1955) 936.
[5,41] NOSSOW, W. G.: in: loc. cit. [5,34], S. 52.
[5,42] BUSINARO, U. L., und S. GALLONE: Nuovo Cim. **1** (1955) 629.
[5,43] SWIATECKI, W. J.: Phys. Rev. **101** (1956) 651.
[5,44] MAYER, M. G.: Phys. Rev. **74** (1948) 235.
[5,45] HILL, D. I.: Phys. Rev. **98** (1955) 1272.
[5,46] CURIE, D.: J. Phys. Radium **15** (1954) 733; NEWTON, T. D.: Phys. Rev. **87** (1952) 187; FONG, P.: Phys. Rev. **89** (1953) 332.
[5,47] WLADIMIRSKI, W. W.: J. eksp. teor. Fiz. **32** (1957) 822 (Russ.).
[5,48] JACKSON, J. D.: in: Proc. Symp. of the Physics of Fission, Ontario 1956, S. 125.
[5,49] CAMERON, A. G. W.: in: Proc. Symp. of the Physics of Fission, Ontario 1956, S. 189.
[5,50] NOSSOW, W. G.: J. eksp. teor. Fiz. **29** (1955) 880; **31** (1956) 335 (Russ.).
[5,51] KOCH, H. W., J. MCELHINNEY und E. L. GASTEIGER: Phys. Rev. **77** (1950) 329.
[5,52] BALDWIN, G. C., und G. S. KLAIBER: Phys. Rev. **71** (1947) 3; OGLE, W., und J. MCELHINNEY: Phys. Rev. **81** (1951) 344.
[5,53] DUFFIELD, R. B., und J. R. HUIZENGA: Phys. Rev. **89** (1953) 1042.
[5,54] Лазарева, Л. Е., Б. И. Гаврилов и др.: Сессия АН СССР по мирному использованию атомной энергии (заседание отделения физ.-матем. наук). Изд-во АН СССР, Москва 1955, стр. 306 (LASAREWA, L. E., B. I. GAWRILOW u. a.: Deutsche Übersetzung in: Atomenergie, Bd. II, Phys.-Math. Akademie-Verlag, Berlin 1957, S. 251).
[5,55] LASAREWA, L. E., und N. W. NIKITINA: in: loc. cit. [5,34], S. 189.
[5,56] KATZ, J. J., T. KAVANAGH et al.: Phys. Rev. **99** (1955) 98; SCHMITT, R., und N. SUGARMAN: Phys. Rev. **89** (1953) 1155; **95** (1954) 1260; RICHTER, H. G., und C. CORYELL: Phys. Rev. **95** (1954) 1550; HILLER, D., und D. MURTIN: Phys. Rev. **90** (1953) 581; TURKEVICH, A., et al.: Phys. Rev. **89** (1953) 552.
[5,57] SAMJATIN, J. S.: in: loc. cit. [5,34], S. 27.
[5,58] PERLMAN, I., R. GOECKERMAN et al.: Phys. Rev. **72** (1947) 352.
[5,59] O'CONNOR, P., und G. T. SEABORG: Phys. Rev. **74** (1948) 1189.
[5,60] GOECKERMAN, R., und I. PERLMAN: Phys. Rev. **76** (1949) 628.
[5,61] GOLDANSKI, W. I., W. S. PENKIN und E. S. TARUMOW: J. eksp. teor. Fiz. **29** (1955) 778 (Russ.); SCHAMOW, W. P.: in: loc. cit. [5,34], S. 129.
[5,62] IWANOWA, N. S.: in: loc. cit. [5,34], S. 115.
[5,63] PERFILOW, N. A.: in: loc. cit. [5,34], S. 98.
[5,64] LEACHMAN, R. B.: Phys. Rev. **101** (1956) 1005.

[5,65] FRASER, J. S.: Phys. Rev. **88** (1954) 536.
[5,66] WINHOLD, E. J., P. T. DEMOS und I. HALPERN: Phys. Rev. **87** (1952) 1139.
[5,67] Лазарева, Л. Е., и Н. В. Никитина: Приложение № I к журналу „Атомная энергия" 1957, стр. 189 (LASAREWA, L. J., und N. W. NIKITINA: in: Beiheft Nr. 1 zu „Atomn. Energ." 1957, S. 189).
[5,68] FAIRHALL, A. W., I. HALPERN und E. J. WINHOLD: Phys. Rev. **94** (1954) 733.
[5,69] STRUTINSKI, W. M.: J. eksp. teor. Fiz. **30** (1956) 603 (Russ.).
[5,70] BOHR, A., und B. MOTTELSON: Probl. sovr. Fiz. **1** (1956) 205 (Russ.).
[5,71] WHEELER, J. A.: in: W. PAULI: Niels Bohr and the Development of Physics. London 1955, S. 163.

Kapitel 6

[6,1] FERMI, E.: Z. Phys. **88** (1934) 161.
[6,2] WU, C. S.: Usp. fiz. Nauk **44** (1951) 558 (Russ.); SELDOWITSCH, J. B.: Usp. fiz. Nauk **56** (1955) 165 (Russ.); SKYRME, T. H. R.: Progr. nucl. Phys. **1** (1950) 115; KONOPINSKI, E. J., und L. LANGER: Annu. Rev. nucl. Phys. **2** (1953) 261; ROSE, M. E., in: Beta- and Gamma-Ray Spectroscopy. Amsterdam 1955.
[6,3] KONOPINSKI, E. J., und G. E. UHLENBECK: Phys. Rev. **48** (1935) 7.
[6,4] KONOPINSKI, E. J.: Rev. mod. Phys. **15** (1943) 209.
[6,5] MARSHAK, R. E.: Phys. Rev. **61** (1942) 388 und 431; BETHE, H. A., und R. F. BACHER: Rev. mod. Phys. **8** (1936) 193.
[6,6] MAHMOUND, H., und E. J. KONOPINSKI: Phys. Rev. **88** (1952) 1266; DAVIDSON, J. P., und D. C. PEASLEE: Phys. Rev. **91** (1953) 442; **91** (1953) 1332; **92** (1953) 1584; KOFOED-HAUSEN, O., und A. WINTER: Phys. Rev. **89** (1953) 526; SHERR, R., und R. H. MILLER: Phys. Rev. **93** (1954) 1076; KREGER, W. E.: Phys. Rev. **96** (1954) 1154.
[6,7] FIERZ, M.: Z. Phys. **104** (1937) 557.
[6,8] GERHART, J. B., und R. SHERR: Bull. Amer. Soc. Ser. II **1** (1956) 195.
[6,9] MICHEL, L.: Rev. mod. Phys. **29** (1957) 223.
[6,10] RUSTAD, B., und S. RUBY: Phys. Rev. **89** (1953) 880; **97** (1955) 991; ALLEN, A., und W. JENTSCHKE: Phys. Rev. **89** (1953) 902.
[6,11] WU, C. S., B. RUSTAD et al.: Phys. Rev. **87** (1952) 1140.
[6,12] ALFORD, W. P., und D. R. HAMILTON: Phys. Rev. **95** (1954) 1351.
[6,13] MAXSON, D., J. S. ALLEN und W. JENTSCHKE: Phys. Rev. **97** (1955) 109.
[6,14] ALFORD, W. P., und D. R. HAMILTON: Phys. Rev. **105** (1957) 673.
[6,15] GOOD, M. L., und E. J. LAUER: Phys. Rev. **105** (1957) 213.
[6,16] SHERR, R., H. R. MUETHER und M. G. WHITE: Phys. Rev. **75** (1949) 282.
[6,17] GERHART, J. B.: Phys. Rev. **95** (1954) 288.
[6,18] SHERR, R., und J. B. GERHART: Phys. Rev. **86** (1952) 619; ARBER, W., und P. STÄHELIN: Helv. phys. Acta **26** (1953) 433; KAVANACH, R. W., W. R. MILLS und R. SHERR: Phys. Rev. **97** (1955) 248.
[6,19] WIGNER, E. P.: Phys. Rev. **56** (1939) 519.
[6,20] ROBSON, J. M.: Phys. Rev. **83** (1951) 349.
[6,21] FINKELSTEIN, R., und S. A. MOSZKOWSKI: Phys. Rev. **95** (1954) 1695.
[6,22] SMORODINSKI, J. A.: Usp. fiz. Nauk **56** (1955) 201 (Russ.).
[6,23] MAYER, M. G., S. A. MOSZKOWSKI und L. W. NORDHEIM: Rev. mod. Phys. **23** (1951) 315; NORDHEIM, L. W.: Rev. mod. Phys. **23** (1951) 315; GOEPPERT-MAYER, M., M. GOLDBERGER und A. W. SUNYAR: in: Beta- and Gamma-Ray Spectroscopy. Amsterdam 1955, S. 432.
[6,24] KONOPINSKI, E. J.: in: Beta- and Gamma-Ray Spectroscopy. Amsterdam 1955, S. 292.

[6,25] PETSCHEK, A. G., und R. E. MARSHAK: Phys. Rev. **85** (1952) 698.
[6,26] PLASSMANN, E., und L. LANGER: Phys. Rev. **96** (1954) 1593; YAMADA, M.: Progr. theor. Phys. **10** (1953) 252.
[6,27] LÜDERS, G.: Kgl. Danske Videnskab. Selsk., Mat.-fys. Medd. **28** (1954) No. 5.
[6,28] PAULI, W.: Niels Bohr and the Development of Physics. London 1955.
[6,29] LEE, T. D., und C. N. YANG: Phys. Rev. **104** (1956) 254.
[6,30] BIEDENHARN, L. C., und M. E. ROSE: Phys. Rev. **83** (1951) 459; TOLHOEK, H. A., und S. R. DE GROOT: Phys. Rev. **84** (1951) 151.
[6,31] WU, C. S., E. AMBLER et al.: Phys. Rev. **105** (1957) 1413.
[6,32] LANDAU, L. D.: J. eksp. teor. Fiz. **32** (1957) 405 (Russ.).
[6,33] BETHE, H. A., und R. PEIERLS: Nature (London) **133** (1934) 532.
[6,34] REINES, F., und C. COWAN: Phys. Rev. **90** (1953) 492; **92** (1953) 830.
[6,35] COWAN, C., F. HARRISON et al.: Nuovo Cim. **3** (1956) 649; Science (Washington) **124** (1956) 103.
[6,36] MUEHLHAUSE, C. O., und S. OLEKSA: Phys. Rev. **105** (1957) 1332.
[6,37] DAVIS, R.: Phys. Rev. **97** (1955) 766; Bull. Amer. phys. Soc. **2** (1956) 219.
[6,38] GOEPPERT-MAYER, M.: Phys. Rev. **48** (1935) 512.
[6,39] SELDOWITSCH, J. B., S. J. LUKJANOW und J. A. SMORODINSKI: Usp. fiz. Nauk **65** (1954) 361 (Russ.).
[6,40] AWSCHALLOM, M.: Phys. Rev. **101** (1956) 41.
[6,41] LANDAU, L. D.: J. eksp. teor. Fiz. **32** (1957) 407 (Russ.); Nucl. Phys. **3** (1957) 127.
[6,42] SALAM, A.: Nuovo Cim. **5** (1957) 299.
[6,43] LEE, T. D., und C. N. YANG: Phys. Rev. **105** (1957) 1671.
[6,44] POSTMA, H., W. HUISKAMP et al.: Physica **23** (1957) 259; AMBER, A., R. W. HAYWARD et al.: Phys. Rev. **106** (1957) 1361.
[6,45] GARWIN, R. L., L. M. LEDERMAN und M. WEINRICH: Phys. Rev. **105** (1957) 1415.
[6,46] FRIEDMAN, J. I., und V. TELEGDI: Phys. Rev. **105** (1957) 1681.
[6,47] SCHMUSCHKEWITSCH, I. M.: J. eksp. teor. Fiz. **33** (1957) 1477 (Russ.).

Kapitel 7

[7,1] PUSIKOW, L., R. RYNDIN und J. A. SMORODINSKI: J. eksp. teor. Fiz. **32** (1957) 592 (Russ.).
[7,2] BLATT, J. M., und J. D. JACKSON: Phys. Rev. **76** (1949) 18.
[7,3] HUBER, P., und E. BALDINGER: Helv. phys. Acta **25** (1952) 435.
[7,4] WOLFENSTEIN, L., und J. ASHKIN: Phys. Rev. **85** (1952) 947.
[7,5] LANDAU, L. D., und J. A. SMORODINSKI: J. eksp. teor. Fiz. **14** (1944) 269 (Russ.).
[7,6] BETHE, H. A.: Phys. Rev. **76** (1949) 38.
[7,7] MELKONIAN, E.: Phys. Rev. **76** (1949) 1744.
[7,8] LAMPI, E. E., G. D. FREIER und J. H. WILLIAMS: Phys. Rev. **80** (1950) 853.
✓ [7,9] MOTT, N. F., und H. S. W. MASSEY: The Theory of Atomic Collisions. Clarendon Press, Oxford 1933.
✓ [7,10] WHITTAKER, E. T., und G. N. WATSON: Modern Analysis. Cambridge University Press, London 1950.
[7,11] JACKSON, J. D., und J. M. BLATT: Rev. mod. Phys. **22** (1950) 77.
[7,12] BREIT, G.: Rev. mod. Phys. **23** (1951) 238.
[7,13] CHRISTIAN, R. S., und H. P. NOYES: Phys. Rev. **79** (1950) 85.
[7,14] PANOFSKY, W. K. H., und F. L. FILLMORE: Phys. Rev. **79** (1950) 57; CORK, B., L. JOHNSTON und C. RICHMAN: Phys. Rev. **79** (1950) 71; FILLMORE, F. L.: Phys. Rev. **83** (1951) 1252.

[7,15] YNETEMA, J. L., und M. G. WHITE: Phys. Rev. **95** (1954) 1226.
[7,16] SUTTON, R. B., T. HALL, E. E. ANDERSON et al.: Phys. Rev. **72** (1947) 1147.
[7,17] FERMI, E., und L. MARSHALL: Phys. Rev. **71** (1947) 666.
[7,18] GLAUBER, R., und V. SCHOMAKER: Phys. Rev. **89** (1953) 667.

Kapitel 8

[8,1] NING HU: Phys. Rev. **74** (1948) 131.
[8,2] BAS, A. I.: J. eksp. teor. Fiz. **33** (1957) 923 (Russ.).
[8,3] LANDON, H. H., und V. L. SAILOR: Phys. Rev. **93** (1954) 1031.
[8,4] TAYLOR, H. M., O. LÖNSJÖ, T. BONNER: Phys. Rev. **94** (1954) 807.
[8,5] BOHR, N.: Nature (London) **137** (1936) 344 und 350; Usp. fiz. Nauk **16** (1936) 425 (Russ.); Nature (London) **141** (1938) 326.
[8,6] LANE, A. M., und C. F. WANDEL: Phys. Rev. **98** (1955) 1524.
[8,7] FESHBACH, H., und V. F. WEISSKOPF: Phys. Rev. **76** (1949) 1550.
[8,8] HARRIS, S. P., C. O. MUEHLHAUSE und G. E. THOMAS: Phys. Rev. **79** (1950) 11.
[8,9] BLOCH, F., M. HILL et al.: Phys. Rev. **80** (1950) 553; Rev. mod. Phys. **23** (1951) 147.
[8,10] BETHE, H. A., und G. PLACZEK: Phys. Rev. **51** (1937) 450.
[8,11] BORN, M.: Optik. Springer-Verlag, Berlin 1933, § 93.
[8,12] LAMB, W. E.: Phys. Rev. **55** (1939) 190.
[8,13] SEIDL, F. G. P., D. J. HUGHES et al.: Phys. Rev. **95** (1954) 476; MELKONIAN, E., W. W. HAVENS und L. J. RAINWATER: Phys. Rev. **92** (1953) 702.
[8,14] HUGHES, D. J., R. C. GARTH und J. LEVIN: Phys. Rev. **91** (1953) 1423.
[8,15] HEIDMAN, J., und H. A. BETHE: Phys. Rev. **84** (1951) 275.
[8,16] WIGNER, E. P., und L. EISENBUD: Phys. Rev. **72** (1947) 29.
[8,17] WIGNER, E. P.: Phys. Rev. **73** (1948) 1002.
[8,18] TEICHMANN, T.: Phys. Rev. **77** (1950) 506.
[8,19] WIGNER, E. P.: Phys. Rev. **70** (1946) 606.
[8,20] BETHE, H. A.: Elementary Nuclear Theory. J. Wiley & Sons, New York **1947**.
[8,21] THOMAS, R. G.: Phys. Rev. **97** (1954) 224.
[8,22] FESHBACH, H., C. E. PORTER und V. F. WEISSKOPF: Phys. Rev. **96** (1954) 448.
[8,23] CARTER, R., J. HARKEY et al.: Phys. Rev. **96** (1954) 113.
[8,24] BOLLINGER, L., R. COTE und J. LE BLANC: Bull. Amer. phys. Soc. **30** (1955) 1, 23.
[8,25] PEASLEE, D. C.: Annu. Rev. nucl. Sci. **5** (1955) 99.
[8,26] BLATT, J. M., und L. C. BIEDENHARN: Rev. mod. Phys. **24** (1952) 258.
[8,27] YANG, C. N.: Phys. Rev. **74** (1948) 764.
[8,28] BLOCH, F.: Phys. Rev. **50** (1936) 259; **51** (1937) 994; HUGHES, H., J. WALLACE und R. HOLTZMANN: Phys. Rev. **73** (1948) 1277.
[8,29] ADAIR, A. K., S. DARDEN und R. FIELDS: Phys. Rev. **96** (1954) 503.
[8,30] OKAZAKI, A.: Phys. Rev. **99** (1955) 55.
[8,31] SCHWINGER, J. S.: Phys. Rev. **69** (1946) 681.
[8,32] HUBER, P., und E. BALDINGER: Helv. phys. Acta **25** (1952) 435.
[8,33] LEPORE, L.: Phys. Rev. **79** (1950) 137.
[8,34] SEAGRAWE, J.: Phys. Rev. **92** (1953) 1222.
[8,35] KREGER, W. E., W. JENTSCHKE und P. G. KRUGER: Phys. Rev. **93** (1954) 837.

Kapitel 9

[9,1] SCHWINGER, J. S., und B. A. LIPPMANN: Phys. Rev. **79** (1950) 469.
[9,2] HACK, M. N.: Phys. Rev. **96** (1954) 196; IMAMURA, T.: Progr. theor. Phys. **18** (1957) 51.

[9,3] GELL-MANN, M., und M. L. GOLDBERGER: Phys. Rev. **91** (1953) 398.
[9,4] COESTER, F., M. HAMERMESH und K. TANAKA: Phys. Rev. **96** (1954) 1142.
[9,5] BREIT, G., und P. R. ZILSEL: Phys. Rev. **71** (1947) 232.
[9,6] DAWYDOW, A. S., und D. M. MELNITSCHENKO: J. eksp. teor. Fiz. **32** (1957) 941 (Russ.).
[9,7] LIPPMANN, B. A.: Phys. Rev. **102** (1956) 264.

Kapitel 10

[10,1] LAKIN, W.: Phys. Rev. **98** (1955) 139.
[10,2] OEHME, R.: Phys. Rev. **98** (1955) 147; **98** (1955) 216.
[10,3] WOLFENSTEIN, L., und J. ASHKIN: Phys. Rev. **85** (1952) 947.
[10,4] WOLFENSTEIN, L.: Phys. Rev. **96** (1954) 1654.
[10,5] TSCHEISCHWILI, O. D.: J. eksp. teor. Fiz. **30** (1956) 1147; **32** (1957) 1240 (Russ.).

Kapitel 11

[11,1] DALITZ, R.: Phys. Rev. **95** (1954) 799.
[11,2] WILKINSON, D. H.: Philos. Mag. **44** (1953) 450; WILKINSON, D. H., und G. JONES: Philos. Mag. **44** (1953) 542; WILKINSON, D. H.: Philos. Mag. **44** (1953) 1019; WILKINSON, D. H., und A. CLEGG: Philos. Mag. **44** (1953) 1269 und 1322.
[11,3] MACDONALD, M.: Phys. Rev. **98** (1955) 60.
[11,4] DELBRUCK, M., und G. GAMOW: Z. Phys. **72** (1931) 492.
[11,5] BETHE, H. A.: Rev. mod. Phys. **9** (1937) 222.
[11,6] GOLDHABER, M., und J. WENESER: Ann. Rev. nucl. Sci. **5** (1955) 1.
[11,7] WEISSKOPF, V. F.: Phys. Rev. **83** (1951) 1073.
[11,8] WILKINSON, D. H.: Physica **22** (1956) 1039.
[11,9] TAYLOR, H. M., und N. F. MOTT: Proc. roy. Soc. (London) **A 138** (1932) 665.
[11,10] DAWYDOW, A. S.: J. eksp. teor. Fiz. **10** (1940) 865 (Russ.).
[11,11] Берестецкий, В. Б.: Диссертация, Институт физических проблем АН СССР, 1948 (BERESTEZKI, W. B.: Diss. am Inst. für physikalische Probleme der Akad. d. Wiss. der UdSSR, 1948).
[11,12] HULME, H. R.: Proc. roy. Soc. (London) **A 138** (1932) 643; HEBB, M. H., und G. E. UHLENBECK: Physica **5** (1938) 605; DANCOFF, S. M., und P. MORRISON: Phys. Rev. **55** (1939) 122; BERESTEZKI, W. B.: J. eksp. teor. Fiz. **17** (1947) 12; **18** (1948) 1057 (Russ.); TRALLI, N., und G. GOERTZEL: Phys. Rev. **83** (1951) 399; SCHARFORTH: Helv. phys. Acta **21** (1948) 499; DRELL, S. D.: Phys. Rev. **75** (1949) 132.
[11,13] SLIW, L. A.: J. eksp. teor. Fiz. **21** (1951) 770; **22** (1952) 29 (Russ.).
[11,14] CHURCH, E., und J. WENESER: Phys. Rev. **104** (1956) 1382.
[11,15] Грошев, Л. В., и И. С. Шапиро: Спектроскопия атомных ядер. Гостехиздат, Москва 1952 (GROSCHEW, L. W., und I. S. SCHAPIRO: Kernspektroskopie. Gostechisdat, Moskau 1952).
[11,16] KURTSCHATOW, B. W., I. W. KURTSCHATOW et al.: Compt. rend. **20** (1935) 1201; KURTSCHATOW, I. W., und L. I. RUSSINOW: Jubiläumsband der Akad. d. Wiss. der UdSSR, Teil 1. Verlag der Akad. d. Wiss. der UdSSR, Moskau 1947, S. 285.
[11,17] Корсунский, М. И.: Изомерия атомных ядер. Гостехиздат, Москва 1954 (deutsche Übersetzung: KORSUNSKI, M. I.: Isomerie der Atomkerne. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1957).
[11,18] SEGRÈ, E., und A. C. HELMHOLTZ: Rev. mod. Phys. **21** (1949) 271; Usp. fiz. Nauk **45** (1951) 357 (Russ.).

[11,19] WEIZSÄCKER, C. F. VON: Naturwiss. **25** (1937) 284.
[11,20] BOHR, A., und B. MOTTELSON: Kgl. Danske Videnskab. Selsk., Mat.-fys. Medd. **27** (1953) No. 16.
[11,21] DAWYDOW, A. S.: J. eksp. teor. Fiz. **29** (1955) 75 (Russ.).
[11,22] FALKOFF, D. L., und G. E. UHLENBECK: Phys. Rev. **79** (1950) 323.
[11,23] DOLGINOW, A. S.: J. eksp. teor. Fiz. **23** (1952) 494 (Russ.).
[11,24] BIEDENHARN, L. C., und M. E. ROSE: Rev. mod. Phys. **24** (1952) 249.
[11,25] FRAUENFELDER, H.: Annu. Rev. nucl. Sci. **2** (1953) 129.
[11,26] HAMILTON, D. R.: Phys. Rev. **58** (1940) 122.
[11,27] FALKOFF, D. L.: Phys. Rev. **82** (1951) 98.
[11,28] LING, D. S., und D. L. FALKOFF: Phys. Rev. **76** (1949) 1639.
[11,29] FERMI, E.: Phys. Rev. **48** (1935) 570.
[11,30] GROSCHEW, L. W., und A. M. DEMIDOW: Vortrag auf der 7. Unionskonferenz über Kernspektroskopie, 1957.
[11,31] MESSERVEY, E.: Phys. Rev. **96** (1954) 1006.
[11,32] KINSEY, B. B., und G. A. BARTHOLOMEW: Canad. J. Phys. **31** (1953) 537; KINSEY, B. B., G. A. BARTHOLOMEW und W. H. WALKER: Canad. J. Phys. **31** (1953) 1; Phys. Rev. **83** (1951) 519; **85** (1952) 1012.
[11,33] KINSEY, B. B., und G. A. BARTHOLOMEW: Phys. Rev. **93** (1954) 1260.
[11,34] GROSHEV, L. V., B. P. ADYASSEVICH und A. M. DEMIDOV: P/651 in: A/Conf. 8/Bd. 2. United Nations, New York 1956.
[11,35] Адьясевич, Б. П., Л. В. Грошев и А. М. Демидов: Сессия АН СССР по мирному использованию атомной энергии (заседание отделения физ.-матем. наук). Изд-во АН СССР, Москва 1955 (ADJASSEWITSCH, B. P., L. W. GROSCHEW und A. M. DEMIDOW: Deutsche Übersetzung in: Atomenergie, Bd. II, Math.-Phys. Akademie-Verlag, Berlin 1957, S. 221).
[11,36] ADJASSEWITSCH, B. P., L. W. GROSCHEW und A. M. DEMIDOW: Atomn. Energ. (1956) 2, 28 und 40 (Russ.).
[11,37] ESTULIN, I. W., L. F. KALINKIN und A. S. MELIORANSKI: J. eksp. teor. Fiz. **31** (1956) 886; **32** (1957) 978 (Russ.).
[11,38] ROBERTS, L. D., S. BERNSTEIN et al.: Phys. Rev. **95** (1954) 105.
[11,39] RAE, E. R.: Physica **22** (1956) 1131.
[11,40] WELLER, C., und J. GROSSKREUTZ: Phys. Rev. **102** (1956) 1149; LITHELAND, A., E. B. PAUL et al.: Phys. Rev. **102** (1956) 208.
[11,41] GELL-MANN, M., und V. TELEGDI: Phys. Rev. **91** (1953) 169.
[11,42] JOHNS, H. E., R. S. HORSLEY und A. QUINTON: Phys. Rev. **84** (1956) 856.
[11,43] KATZ, L., R. HASLAM et al.: Phys. Rev. **95** (1954) 464; GOLDEMBERG, J., und L. KATZ: Phys. Rev. **95** (1954) 471; WILSON, R.: Phys. Rev. **104** (1956) 1424.
[11,44] BUNBURY, D.: Proc. phys. Soc. (London) **A 67** (1954) 1006.
[11,45] MIGDAL, A. B.: J. eksp. teor. Fiz. **15** (1945) 81 (Russ.).
[11,46] GOLDHABER, M., und E. TELLER: Phys. Rev. **74** (1948) 1046.
[11,47] STEINWEDEL, H., und J. H. D. JENSEN: Z. Naturforsch. **5a** (1950) 413.
[11,48] FERENTZ, M., M. GELL-MANN und D. PINES: Phys. Rev. **92** (1953) 836.
[11,49] TOMS, M. E., und W. E. STEPHENS: Phys. Rev. **98** (1955) 626.
[11,50] LEVINGER, J. S., und H. A. BETHE: Phys. Rev. **78** (1950) 115.
[11,51] TER-MARTIROSJAN, K. A.: J. eksp. teor. Fiz. **22** (1952) 284 (Russ.).
[11,52] FRANZ, W.: Z. Phys. **98** (1935) 314.
[11,53] BURKHARDT, J. L.: Phys. Rev. **100** (1955) 192.
[11,54] FULLER, E. G., und E. HAYWARD: Phys. Rev. **94** (1954) 732; **95** (1954) 1106.
[11,55] WOOD, R. W.: Physical Optics. MacMillan Co., 3. Aufl. New York 1934.
[11,56] MALMFORS, K. G.: Ark. Fys. **6** (1952) 49.

[11,57] METZGER, F., und W. TODD: Phys. Rev. **94** (1954) 853.
[11,58] METZGER, F.: Phys. Rev. **97** (1955) 1258.
[11,59] MOON, P. B., und A. STORRUSTE: Proc. phys. Soc. (London) **A 66** (1953) 585.
[11,60] Делягин, Н., и В. Шпинель: Тезисы докладов 7-го совещания по ядерной спектроскопии. Изд-во АН СССР, Москва 1957, стр. 42 (DELJAGIN, N., und W. SCHPINEL: in: Thesen zu den Vorträgen der 7. Unionskonferenz über Kernspektroskopie. Verlag der Akad. d. Wiss. der UdSSR, Moskau 1957, S. 42).
[11,61] BURGOW, N., und J. TERECHOW: in: loc. cit. [11,60], S. 41.
[11,62] METZGER, F.: Phys. Rev. **101** (1956) 286; **103** (1956) 983.
[11,63] ILAKOVAC, K., und P. MOON: Phys. Rev. **93** (1954) 254; ILAKOVAC, K.: Proc. phys. Soc. (London) **A 67** (1954) 601.
[11,64] DSHELEPOW, B. S.: Usp. fiz. Nauk **62** (1957) 3 (Russ.).
[11,65] GELL-MANN, M., M. L. GOLDBERGER und W. E. TIRRING: Phys. Rev. **95** (1954) 1612.
[11,66] MANN, A., W. E. STEPHENS und D. H. WILKINSON: Phys. Rev. **97** (1955) 1184.
[11,67] CHOCHLOW, J. K.: J. eksp. teor. Fiz. **26** (1954) 576 (Russ.); Dokl. Akad. Nauk SSSR **97** (1954) 703 (Russ.); J. eksp. teor. Fiz **32** (1957) 124 (Russ.); Diss. am Physikalischen Inst. der Akad. d. Wiss. der UdSSR, 1957.

Kapitel 12

[12,1] ELSASSER, W. M.: Compt. rend. **202** (1936) 1029.
[12,2] WICK, G. C.: Phys. Z. **38** (1937) 403 und 689.
[12,3] FERMI, E., und L. MARSHALL: Phys. Rev. **71** (1947) 666.
[12,4] POMERANTSCHUK, I. J.: Phys. Z. Sowj. **13** (1938) 65.
[12,5] WEINSTOCK, R.: Phys. Rev. **65** (1944) 1.
[12,6] ACHIJESER, A. I., und I. J. POMERANTSCHUK: J. eksp. teor. Fiz. **17** (1947) 769 (Russ.).
[12,7] PLACZEK, G., NIJBOER und L. VAN HOVE: Phys. Rev. **82** (1951) 392; CASSELS, J. M.: Proc. roy. Soc. (London) **A 208** (1951) 527; PLACZEK, G., und L. VAN HOVE: Phys. Rev. **93** (1954) 1207.
[12,8] FERMI, E.: Ricerca sci. **7** (1936) 13.

Kapitel 13

[13,1] WEISSKOPF, V. F.: Helv. phys. Acta **23** (1950) 187.
[13,2] FESHBACH, H., C. E. PORTER und V. F. WEISSKOPF: Phys. Rev. **90** (1953) 166; **91** (1953) 453.
[13,3] FESHBACH, H., C. E. PORTER und V. F. WEISSKOPF: Phys. Rev. **96** (1954) 448.
[13,4] ADAIR, A. K.: Phys. Rev. **94** (1954) 734.
[13,5] WATSON, K. M.: Phys. Rev. **89** (1953) 291.
[13,6] FRANCIS, C., und K. M. WATSON: Phys. Rev. **92** (1953) 291.
[13,7] BRUECKNER, K. A., C. A. LEVINSON und A. M. MAHMOUND: Phys. Rev. **95** (1954) 217.
[13,8] AGRANOWITSCH, W. M., und A. S. DAWYDOW: J. eksp. teor. Fiz. **32** (1957) 1429 (Russ.).
[13,9] WALT, W., und H. H. BARSCHALL: Phys. Rev. **94** (1954) 81.
[13,10] CHASE, D. M., und F. ROHRLICH: Phys. Rev. **94** (1954) 81.
[13,11] NEMIROWSKI, P. E.: J. eksp. teor. Fiz. **30** (1946) 551; **32** (1957) 1141 (Russ.); Diss. am Physikalischen Institut der Akad. d. Wiss. der UdSSR, 1957; JANKOVIČ, Z.: Philos. Mag. **46** (1955) 376; MORRISON, P., et al.: Philos. Mag. **46** (1955) 795; BURGE, FUJIMOTO und HUSSIAIN: Philos. Mag. **1** (1956) 19.

[13,12] Melkanoff, M. A., S. A. Moszkowski et al.: Phys. Rev. **101** (1956) 507.
[13,13] Saxon, D. S., und R. Wood: Phys. Rev. **95** (1954) 577.
[13,14] Bjorklund, F. E., S. Fernbach und N. Sherman: Phys. Rev. **101** (1956) 1832.
[13,15] Bethe, H. A.: Phys. Rev. **103** (1956) 1353.
[13,16] Brueckner, K. A.: Phys. Rev. **96** (1954) 908; **97** (1955) 1353.
[13,17] Lane, A. M., und C. F. Wandel: Phys. Rev. **98** (1955) 1524.
[13,18] Lane, A. M., R. G. Thomas und E. P. Wigner: Phys. Rev. **98** (1955) 693.
[13,19] Heidman, J., und H. A. Bethe: Phys. Rev. **84** (1951) 275.

Kapitel 14

[14,1] Britten, R.: Phys. Rev. 88 (1952) 283.
[14,2] Eisenberg, R., und G. Igo: Phys. Rev. **93** (1954) 1039.
[14,3] Rosen, L., und L. Stewart: Phys. Rev. **99** (1955) 1052.
[14,4] Graves, E., und L. Rosen: Phys. Rev. **89** (1953) 343; Gugelot, P. C.: Phys. Rev. **93** (1954) 425; Paul, E. B., und R. L. Clarke: Canad. J. Phys. **31** (1953) 267.
[14,5] Cohen, B. L.: Phys. Rev. **92** (1953) 1245; **98** (1955) 49.
[14,6] Austern, N., S. T. Butler und H. M. Manus: Phys. Rev. **92** (1953) 350.
[14,7] Schrank, G., P. C. Gugelot und I. Dayton: Phys. Rev. **96** (1954) 1156.
[14,8] Lifschiz, J. M.: J. eksp. teor. Fiz. 8 (1938) 930 (Russ.); Landau, L. D., und J. M. Lifschiz: J. eksp. teor. Fiz. **18** (1948) 750 (Russ.); Dancoff, S. M.: Phys. Rev. **72** (1947) 1017.
[14,9] Oppenheimer, J. R., und M. Phillips: Phys. Rev. **48** (1935) 500.
[14,10] Bethe, H. A.: Phys. Rev. **53** (1938) 39; Volkoff, G. M.: Phys. Rev. **57** (1940) 866; Peaslee, D. C.: Phys. Rev. **74** (1948) 1001.
[14,11] Butler, S. T.: Proc. roy. Soc. (London) **A 208** (1951) 559.
[14,12] Huby, R.: Nature (London) **166** (1950) 552; Proc. roy. Soc. (London) **A 215** (1952) 385.
[14,13] Friedman, F. L., und W. Tobockman: Phys. Rev. **92** (1953) 93.
[14,14] Austern, N.: Phys. Rev. **89** (1953) 318.
[14,15] Gerjuoy, E.: Phys. Rev. **91** (1953) 645.
[14,16] Daitsch, P. B., und J. B. French: Phys. Rev. **87** (1952) 900
[14,17] Sitenko, A. G.: J. eksp. teor. Fiz. **31** (1956) 636 (Russ.); Ukr. fiz. J. **2** (1957) 3 (Russ.).
[14,18] Bhatia, A. B., K. Huang et al.: Philos. Mag. **43** (1952) 485.
[14,19] Serber, R.: Phys. Rev. **72** (1947) 1008.
[14,20] Peaslee, D. C.: Phys. Rev. **74** (1948) 1001.
[14,21] Yoccoz, J.: Compt. rend. **236** (1953) 587; Proc. phys. Soc. (London) **A 67** (1954) 813.
[14,22] Ter-Martirosjan, K. A.: J. eksp. teor. Fiz. **29** (1955) 713 (Russ.).
[14,23] Newns, N. C.: Proc. phys. Soc. (London) **A 66** (1953) 477.
[14,24] Horowitz, J., und A. M. L. Messiah: J. Phys. Radium **14** (1953) 731.
[14,25] Cheston, W. B.: Phys. Rev. **96** (1954) 1590.
[14,26] Hillman, P.: Phys. Rev. **104** (1956) 176.

Kapitel 15

[15,1] Bethe, H. A., und G. Placzek: Phys. Rev. **57** (1940) 1125.
[15,2] Achijeser, A. I., und A. G. Sitenko: Phys. Rev. **106** (1957) 1236; Dokl. Akad. Nauk SSSR **107** (1956) 385 (Russ.).

[15,3] ACHIJESER, A. I., und I. J. POMERANTSCHUK: J. eksp. teor. Fiz. **16** (1946) 396 (Russ.).
[15,4] ACHIJESER, A. I., und I. J. POMERANTSCHUK: Usp. fiz. Nauk **39** (1949) 153 (Russ.).
[15,5] LANDAU, L. D., und I. J. POMERANTSCHUK: J. eksp. teor. Fiz. **24** (1953) 505 (Russ.); Dokl. Akad. Nauk SSSR **96** (1954) 265 (Russ.).
[15,6] POMERANTSCHUK, I. J., und J. L. FEINBERG: Dokl. Akad. Nauk SSSR **93** (1953) 439 (Russ.).
[15,7] FEINBERG, J. L.: J. eksp. teor. Fiz. **29** (1955) 115 (Russ.).
[15,8] ACHIJESER, A. I., und A. G. SITENKO: Učenye zap. Chark. Univ. **64** (1955) 9 (Russ.).
[15,9] GLAUBER, R.: Phys. Rev. **99** (1955) 1515.
[15,10] FERNBACH, S., R. SERBER und T. B. TAYLOR: Phys. Rev. **75** (1949) 1352.
[15,11] JASTROW, R.: Phys. Rev. **82** (1951) 261.
[15,12] VAN DER VEGT, A., und C. C. JONKER: Physica **23** (1957) 359.
[15,13] FOWLER, J. L., und J. E. BROLLEY: Rev. mod. Phys. **28** (1956) 103.
[15,14] DSHELEPOW, W. P., W. L. SATAROW und M. M. GOLOWIN: Dokl. Akad. Nauk SSSR **104** (1955) 717 (Russ.).
[15,15] CHEW, G. F.: Phys. Rev. **80** (1950) 196.
[15,16] CHEW, G. F., und G. C. WICK: Phys. Rev. **85** (1952) 636; CHEW, G. F., und M. L. GOLDBERGER: Phys. Rev. **87** (1952) 778.
[15,17] BRUECKNER, K. A., R. EDEN und N. FRANCIS: Phys. Rev. **98** (1955) 1445.
[15,18] SACHS, M.: Phys. Rev. **103** (1956) 671.
[15,19] FERMI, E.: Progr. theor. Phys. **5** (1950) 570; Phys. Rev. **81** (1951) 683; Usp. fiz. Nauk **46** (1952) 71 (Russ.).
[15,20] MULBURN, R.: Rev. mod. Phys. **27** (1955) 1.
[15,21] FRYE, G. M., J. L. ROSEN und L. STEWART: Phys. Rev. **99** (1955) 1375.

Anhang

[A, 1] CONDON, E. U., und G. H. SHORTLEY: Theory of Atomic Spectra. Cambridge University Press, London 1935.
[A, 2] GELFAND, I., und S. SCHAPIRO: Usp. mat. Nauk **7** (1952) 3 (Russ.).
[A, 3] SOROKIN, W.: J. eksp. teor. Fiz. **18** (1948) 228 (Russ.).
[A, 4] BERESTEZKI, W. B., A. DOLGINOW und K. TER-MARTIROSJAN: J. eksp. teor. Fiz. **20** (1950) 527 (Russ.).
[A, 5] PETRASCHEN, W. I.: Dokl. Akad. Nauk SSSR **46** (1945) 291 (Russ.).
[A, 6] BERESTEZKI, W. B.: J. eksp. teor. Fiz. **17** (1947) 12 (Russ.).
[A, 7] WIGNER, E. P.: Gruppentheorie und ihre Anwendungen auf die Quantenmechanik der Atomspektren. Braunschweig 1931.
[A, 8] RACAH, G.: Phys. Rev. **62** (1942) 438; **63** (1943) 367.
[A, 9] TAMM, I. E., J. A. GOLFAND und W. J. FAINBERG: J. eksp. teor. Fiz. **26** (1954) 649 (Russ.).
[A, 10] RITUS, W. I.: J. eksp. teor. Fiz. **27** (1954) 660; **32** (1957) 1536; **33** (1957) 1264 (Russ.).
[A, 11] GOLFAND, J. A.: J. eksp. teor. Fiz. **31** (1956) 224 (Russ.).
[A, 12] KULAKOW, J. I.: J. eksp. teor. Fiz. **33** (1957) 501 (Russ.).
[A, 13] BIEDENHARN, L. C., J. M. BLATT und M. E. ROSE: Rev. mod. Phys. **24** (1952) 249.
[A, 14] PAULI, W.: Die allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik, in: Handbuch der Physik, Bd. 24, 1. Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1933, S. 83.

[A, 15] Ахиезер, А. И., и В. Б. Берестецкий: Квантовая электродинамика. Гостехиздат, Москва 1953 (ACHIJESER, A. I., und W. B. BERESTEZKI: Quantenelektrodynamik. Gostechisdat, Moskau 1953).

[A, 16] FOLDY, L. L., und S. A. WOUTHUYSEN: Phys. Rev. **78** (1950) 29; KURSUNOGLU, B.: Phys. Rev. **101** (1956) 1419; SUCHER, J.: Phys. Rev. **103** (1956) 468.

[A, 17] SACK, S., L. C. BIEDENHARN und G. BREIT: Phys. Rev. **93** (1954) 321.

Zusammenstellung der zitierten sowjetischen Zeitschriften

Atomn. Energ. (Atomenergie)	Атомная энергия (АЭ)
Dokl. Akad. Nauk SSSR (Berichte der Akad. d. Wiss. der UdSSR)	Доклады Академии наук СССР (ДАН СССР)
Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. fiz. (Nachrichten der Akad. d. Wiss. der UdSSR, Physikalische Serie)	Известия Академии наук СССР, Серия физическая (Изв. АН СССР, Сер. физ.)
J. eksp. teor. Fiz. (Zeitschrift für experimentelle und theoretische Physik)	Журнал экспериментальной и теоретической физики (ЖЭТФ)
Probl. sovr. Fiz. (Probleme der modernen Physik)	Проблемы современной физики (Пробл. совр. физ.)
Učenye zap. Chark. Univ. (Wissenschaftliche Schriften der Universität Charkow)	Ученые записки Харьковского университета (Ученые зап. Харк. унив.)
Ukr. fiz. J. (Ukrainische Physikalische Zeitschrift)	Украинский физический журнал (Укр. физ. журнал)
Usp. fiz. Nauk (Fortschritte der Physik)	Успехи физических наук (УФН)
Usp. mat. Nauk (Fortschritte der Mathematik)	Успехи математических наук (УМН)

SACHVERZEICHNIS

